# Sechstes Übungsblatt

**Ausgabe:** 30. Juni 2006
**Abgabe:** 7. Juli 2006, bis 16:00 Uhr, in Raum 306 oder per Mail an `mholzer@ira.uka.de`

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

## Problem 1:

In Schritt 2 des Algorithmus für das kantendisjunkte Menger-Problem werden in einem planaren Graphen $G$ mit fester Einbettung einfache Kreise $C_1, \ldots, C_l$ wie folgt konstruiert:

Sei $F$ die Menge der Facetten und $f_0$ die äußere Facette von $G$. Bezeichne weiter $\text{dist}(f)$ die Länge eines kürzesten Weges vom der Facette $f$ entsprechenden Dualknoten zum $f_0$ entsprechenden Dualknoten, und $l := \max_{f \in F} \text{dist}(f)$. Für $1 \leq i \leq l$ sei $C_i$ die Vereinigung der einfachen Kreise in $G$ so, dass $\text{dist}(f) \geq i$ für alle Facetten $f$ im Inneren und $\text{dist}(f) < i$ für alle Facetten $f$ im Äußeren eines Kreises aus $C_i$ gilt.

**Aufgabe:** Geben Sie einen Algorithmus mit linearer Laufzeit an, der zu einem gegebenen Graphen $G$ mit fester Einbettung die Kantenmengen $C_1, \ldots, C_l$ bestimmt.

## Problem 2:

Sei $G$ ein ungerichteter, zusammenhängender, planar eingebetteter Graph, $G^*$ der zugehörige Dualgraph und $e = (u, v)$ eine orientierte Kante.

**Algorithmus 1** : Right-First-Kanten-DFS

```
Lege e auf einen Stapel
Solange Stapel nicht leer wiederhole
    Betrachte oberste Kante (x, y)
    Falls y inzident zu nichtorientierter Kante
        Orientiere im Gegenuhrzeigersinn bzgl. y nächste nichtorientierte
        Kante y → w und lege diese auf den Stapel
    sonst
        Entferne (x, y) vom Stapel
```

**Algorithmus 2** : Left-First-Kanten-BFS

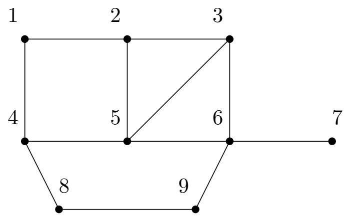
```
Orientiere alle zu u inzidenten Kanten u → w und hänge diese, beginnend bei e, im
Uhrzeigersinn bzgl. u an eine Warteschlange
Solange Warteschlange nicht leer wiederhole
    Betrachte erste Kante (x, y)
    Falls y inzident zu nichtorientierter Kante
        Orientiere alle solche Kanten y → w und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.
        y an die Warteschlange
    sonst
        Entferne (x, y) aus der Warteschlange
```

In diesen beiden Kantensuchen wird jeweils eine Reihenfolge $R = (e_1, \ldots, e_m)$ der Kanten festgelegt. Die zu $e$ „rechte“ Facette sei $f_1$, und die Dualkante $e^* = (f_1, f_2)$ zu $e$ sei orientiert ausgehend von $f_1$.

Wir betrachten eine Right-First-Tiefensuche in $G$, beginnend bei Kante $e$, mit Kantenfolge $R = (e = e_1, \ldots, e_m)$ und eine Left-First-Breitensuche in $G^*$, beginnend bei Kante $e^*$, mit Kantenfolge $R^* = (e^* = e_1^*, \ldots, e_m^*)$. Die Reihenfolgen $R$ und $R^*$ heißen dual, falls $e_i$ Dualkante zu $e_i^*$ für alle $1 \leq i \leq m$.

(a) Bestimmen Sie für den zweidimensionalen Würfel $Q_2$ sowie untenstehenden Graphen ($G_1$ vom 2. Übungsblatt) die Reihenfolgen $R$ und $R^*$ bei beliebiger Startkante $e$.

**Hinweis:** Die Reihenfolgen sind dual.




(b) Geben Sie einen Graphen an, für den $R$ und $R^*$ nicht dual sind.

**Hinweis:** Betrachten Sie Graphen mit Brücken und Kreisen.

## Problem 3:

Geben Sie einen einfachen Algorithmus an, der folgendes Problem in Linearzeit löst:

Gegeben ein planarer Graph $G$ mit fester Einbettung und ausgezeichneten Knoten $s$ und $t$, die an der äußeren Facette liegen, bestimme eine maximale Anzahl von paarweise kantendisjunkten $s$-$t$-Wegen in $G$.

**Hinweis:** Ein Algorithmus für dieses Problem benötigt keinen der komplizierten Schritte, die der in der Vorlesung für das allgemeine kantendisjunkte Menger-Problem in planaren Graphen angegebene Algorithmus ausführt. Es genügt eine Vorgehensweise ähnlich wie bei einer Graphsuche, die die gegebene Einbettung des planaren Graphen ausnutzt.