Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

D. Wagner, S. Mecke, M. Holzer

Drittes Übungsblatt

Ausgabe: 23. Mai 2006
Abgabe: 30. Mai, in der Vorlesung oder in Raum 307

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Verschiedene Bäume

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit $S = S_m \cup S_M$ einen gültigen Separator findet.

Problem 2: Folgerung aus dem PLANAR SEPARATOR THEOREM:

Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

Sei ein einfacher, zusammenhängender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten gegeben. Der Graph G sei kombinatorisch eingebettet, d.h. dargestellt als $\mathcal{G} = (V, \vec{E}, s, t, \Theta, ^{-})$, wobei $\mathcal{G}$ in der Form ,,erweiterter Inzidenzlisten" gespeichert sei (wie in der Übung besprochen):
Es gibt eine doppelt verkettete Liste von Zeigern auf die *Knoten*. Ein *Knoten* ist dargestellt als eine zirkulär verkettete Liste von *gerichteten Kanten*, die im Gegenuhrzeigersinn geordnet sind. Die Nachfolgekante („links“) von e ist $\Theta(e)$. Eine *gerichtete Kante* $e \in \vec{E}$ besteht aus einem Zeiger auf die Kante $\bar{e}$ (e in entgegengesetzter Richtung) und einem Zeiger auf den Fußknoten der Kante. Dadurch sind die Funktionen s(ource), t(arget), $^{-}$, Θ und $\Theta^*(e) := \Theta(\bar{e})$ repräsentiert. Alle Funktionen können so in konstanter Zeit berechnet werden.

Problem 3: Dualgraph I

Geben Sie einen linearen Algorithmus an, der aus den Inzidenzlisten zu $\mathcal{G}$ die Inzidenzlisten des kombinatorischen Dualgraphen $\mathcal{G}^*$ konstruiert.

Problem 4: Dualgraph II

(a) Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^*. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^*, (E \setminus E')^*)$ von G^* unzusammenhängend ist.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^* = (V^*, E^*)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^*, (E \setminus E')^*)$ ein aufspannender Baum von G^* ist.

Problem 5: Triangulierung

(a) Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung $\mathcal{G}'$ findet.
(Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten. Eine Möglichkeit ist, zuerst einen Graph G'' zu konstruieren, der Mehrfachkanten enthalten darf, und in einem zweiten Schritt Mehrfachkanten geeignet durch andere Kanten zu ersetzen.)

(b) Führen Sie Ihren Algorithmus an folgenden Beispielgraphen aus und numerieren Sie jeweils die von Ihrem Algorithmus eingefügten Kanten in der Reihenfolge, in der Ihr Algorithmus sie einfügt.

a) $K_{1,2}$ b) $K_{1,3}$ c) Q_2 d) G_1

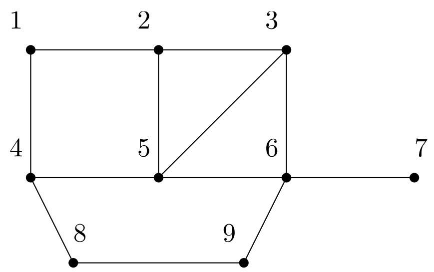

Abbildung 1: Der Graph G_1 zu Aufgabe 2