

4. Übungsblatt

Ausgabe: 19. Juni 2005
Besprechung: 27. Juni 2005

Sichtbarkeitsrepräsentation

Das Ziel der Übung ist ein Algorithmus für Sichtbarkeitsrepräsentation eines planaren $s-t$ -Graphen zu entwickeln. Eine *Sichtbarkeitsrepräsentation* eines gerichteten Graphens $D = (V, A)$ ist definiert durch:

- eine Menge von disjunkten achsen-parallelen Rechtecken (mit Einheitshöhe), welche die Knotenmenge V repräsentiert
- einer Menge von vertikalen Liniensegmenten, die sich höchstens in den Endpunkten berühren und die Kanten darstellen
- das Segment ℓ zur Kante (u, v) berührt / schneidet nur die Rechtecke, die zu den Knoten u und v gehören

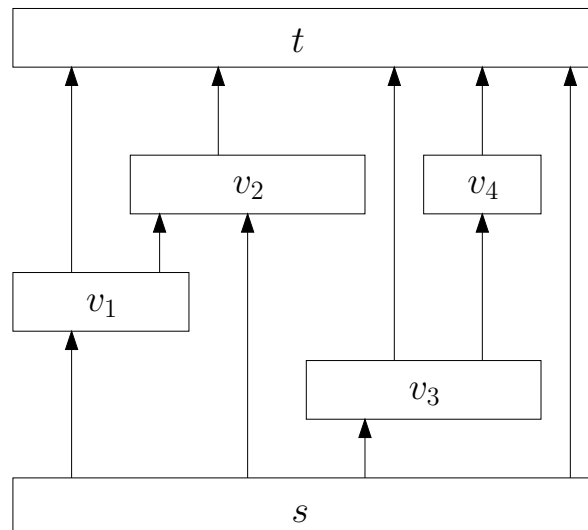


Abbildung 1: Beispiel einer Sichtbarkeitsrepräsentation

Sei im folgenden $D = (V, A)$ ein planarer $s-t$ -Graph, d.h. ein planare, azyklischer, gerichteter Graph mit genau einer Quelle s und einer Senke t . Weiterhin sei ohne Einschränkung D so eingebettet, dass die Kante (s, t) an der äußeren Facette angrenzt.

1. Aufgabe

Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) D ist bimodal
- (b) auf dem Rand jeder Facette f (von D) liegen genau eine Quelle $q(f)$ und eine Senke $z(f)$

2. Aufgabe

Zu D wird folgender *gerichteter Dualgraph* $D^* = (V^*, A^*)$ assoziiert:

- V^* ist die Menge aller Facetten von D , wobei die Facette rechts der Kante (s, t) als s^* und die Facette links der Kante (s, t) als t^* bezeichnet wird
- zu jeder Kante $e \in A$, die nicht zu s und t inzident ist, gibt es eine Kante $(l(e), r(e)) \in A^*$, wobei $l(e)$ die links-liegende Facette und $r(e)$ die rechts-liegende Facette bzgl. e bezeichnet; zusätzlich enthält A^* die Kante (s^*, t^*)

Zeigen Sie, dass D^* ein planarer s - t -Graph ist. Weiterhin seien f, g zwei Facetten in D . Erklären sie anschaulich die Bedeutung der folgenden vier Eigenschaften:

- (1) D hat einen gerichteten Pfad von $z(f)$ nach $q(g)$
- (2) D hat einen gerichteten Pfad von $z(g)$ nach $q(f)$
- (3) D^* hat einen gerichteten Pfad von f nach g
- (4) D^* hat einen gerichteten Pfad von g nach f

Zeigen Sie (formal), dass jedes Facettenpaar $\{f, g\}$ genau eine dieser Eigenschaften erfüllt. Betrachten Sie dazu eine topologische Nummerierung von D .

3. Aufgabe

Sei X eine ganzzahlige topologische Nummerierung von D^* , Y eine ganzzahlige topologische Nummerierung von D und $0 < \varepsilon < 0.5$ ein beliebiger Schwellwert.

Zeigen Sie, dass folgende Zuordnung eine Sichtbarkeitsrepräsentation von D ergibt:

- zeichne jeden Knoten $v \in V$ als Rechteck mit den Eckpunkten: $(X(l(v)), Y(v) - \varepsilon)$ und $(X(r(v)) - 1, Y(v) + \varepsilon)$
- zeichne jede Kante $e = (v, w) \in E$ als Liniesegment mit Endpunkten: $(X(l(e)), Y(v))$ und $(X(l(e)), Y(w))$