2. Übungsblatt

Ausgabe:	18. Mai 2005
Besprechung:	30. Mai 2005

1. Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zusammenhängender Graph und A die zugehörige Adjazenzmatrix definiert durch:

$$A[u,v] := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \{u,v\} \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Sei λ_i mit $1 \leq i \leq n$ die Eigenwerte von A. Geben Sie 'anschauliche' Formel für $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j$ an.
Tipp: *Folgt der heißen Spur!*

2. Aufgabe

Sei G ein beliebiger ungerichteter, ungewichteter und einfacher Graph und L die zugehörige Laplace Matrix.

(a) Zeigen Sie, die Vielfachheit des Eigenwert 0 von L ist genau die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

(b) Falls G zusammenhängend ist, was kann über die Koordinaten bezüglich des Eigenvektors zu λ_2 der Knoten u und v, die die gleiche Nachbarschaft haben, gesagt werden?

(c) Zeigen Sie, dass $\lambda_2 \leq 1/2(\deg(u) + \deg(v))$ für zwei unverbundene Knoten ist.

3. Aufgabe Sei G ein planarer Graph mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Für $1 \leq i \leq f$ sei a_i die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G, wobei die Facetten so numeriert seien, daß die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.
Kann es zu einem planaren Graphen G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so daß die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

4. Aufgabe Zwei Einbettungen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ mit Facettenmengen F_1 und F_2 eines einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ sind *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\varphi : F_1 \to F_2$ gibt, so dass für jede Facette $f \in F_1$ und für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt: $\{u, v\}$ ist zu f inzident g.d.w. $\{u, v\}$ zu $\varphi(f)$ inzident ist.

Zeigen Sie: Alle Einbettungen eines 3-fach zusammenhängenden, einfachen planaren Graphen sind äquivalent. Tipp: *Betrachten Sie den induzierten Subgraphen einer Facette.*