Inhalt I

Verteilter Algorithmus für Dominating Set
Literatur

- F. Kuhn und R. Wattenhofer: Constant-Time Distributed Dominating Set Approximation. *Proceedings 22nd ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, Boston, Massachusetts, USA, Juli 2003.
  http://dcg.ethz.ch/members/pascal/refs/ds_2003_kuhn.pdf

Notation

- Graph $G = (V, E)$, Knotenanzahl $n = |V|$
- Knoten $V = \{1, \ldots, n\}$
- Matrizen: A, N, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Vektoren: x, y, b, $c \in \mathbb{R}^n$
- Knotengrad: δ_i
- Maximaler Knotengrad in r-Nachbarschaft:
$$\delta_i^{(r)} := \max\{\delta_j | j \in N^r(i)\}$$

Mathematische Modellierung

- Modelliere Teilmenge $D \in V$
  - Pro Knoten $i \in V$ eine Variable $x_i \in \{0, 1\}$
  - $x_i = 1$ g.d.w. $i \in D$
- Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$
  - A ist $n \times n$ Matrix
  - $A_{ij} = 1$ g.d.w. $\{i, j\} \in E$
- Nachbarschaftsmatrix $N := A + I$
  - I ist die $n \times n$ Einheitsmatrix
  - $N_{ij} = 1$ g.d.w. $j \in N(i)$
- $D \subseteq V$ ist Dominating Set g.d.w. $N \cdot x \geq 1$

ILP für Dominating Set (Integer Linear Program)

$$\begin{array}{rcl} \min & & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ N \cdot x & \geq & 1^n \\ x & \in & \{0,1\}^n \end{array}$$

Relaxierung: LP (Linear Program)

$$\begin{array}{rcl} \min & & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ N \cdot x & \geq & 1^n \\ x & \geq & 0^n \end{array}$$

Duales LP

$$\begin{array}{rcl} \max & & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ N \cdot y & \leq & 1^n \\ y & \geq & 0^n \end{array}$$

Dualitätssatz

Satz 30

Sei $\min \sum_{i=0}^{n} x_i$ die Zielfunktion eines LP und $\max \sum_{i=0}^{n} y_i$ die Zielfunktion des dualen LP. Dann gilt für zulässige Lösungen x' und y'

$$\sum_{i=0}^{n} y'_i \leq \sum_{i=0}^{n} x'_i.$$

(ohne Beweis)

Untere Schranke I

Lemma 31
Sei $\delta_i^{(1)}$ das Maximum aller Knotengrade in $N(i)$. Für ein Dominating Set D gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_i^{(1)}+1} \leq |D|.$$

Untere Schranke II

Beweis.

- Ein Dominating Set D liefert eine zulässige LP-Lösung x
- Setze $y_i := 1/(\delta_i^{(1)}+1)$
- y ist zulässige Lösung für das duale LP

$$\begin{aligned}(N \cdot y)_i &= \sum_{j \in N(i)} y_i \leq \sum_{j \in N(i)} \frac{1}{\delta_i+1} \\ &= (\delta_i+1)\frac{1}{\delta_i+1} = 1\end{aligned}$$

- Mit dem Dualitätssatz gilt

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = |D|$$

□

Algorithmus Runden

Gegeben: α-Approximation $x^{(\alpha)}$ für Relaxierung
Gesucht: Dominating Set D über Variablen x_D

1. berechne $\delta_i^{(2)}$
2. $p_i := \min\left\{1, x_i^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(2)}+1)\right\}$
3. $x_{D,i} := \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
4. sende $x_{D,i}$ an alle Nachbarn
5. falls $x_{D,j} = 0$ für alle $j \in N(i)$
6. $\quad x_{D,i} := 1$

Erwartungswert Runden

Satz 32
Sei Δ der Maximalgrad in G, und $x^{(\alpha)}$ eine α-Approximation für das LP. Dann ist x_D eine zulässige ILP-Lösung und der Erwartungswert der Größe des Dominating Set D ist

$$E[|D|] \leq (1 + \alpha \ln(\Delta+1))|D_{OPT}|.$$

Beweis Erwartungswert I

Beweis

- Für eine optimale Lösung x^* des LP gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq |D_{OPT}|$.
- Für die Anzahl X der in Schritt 3 ausgewählten Knoten gilt:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{n} p_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(2)} + 1) \\ &\leq \ln(\Delta+1) \sum_{i=1}^{n} x_i^{(\alpha)} \leq \alpha \ln(\Delta+1) \sum_{i=1}^{n} x_i^* \\ &\leq \alpha \ln(\Delta+1)|D_{OPT}|. \end{aligned}$$

Beweis Erwartungswert II

- Sei q_i die Wahrscheinlichkeit, dass kein Knoten in $N(i)$ in Schritt 3 ausgewählt wurde: $q_i = \prod_{j \in N(i)} (1 - p_i)$
- Falls ein $j \in N(i)$ existiert mit $p_j = 1$ so ist $q_i = 0$.
- Im Folgenden betrachte nur i mit $p_j < 1$ für alle $j \in N(i)$.
- Für $j \in N(i)$ gilt $\delta_i^{(1)} \leq \delta_j^{(2)}$
- Also gilt für alle $j \in N(i)$:

$$0 < 1 - p_j = 1 - x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_j^{(2)} + 1) \leq 1 - x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(1)} + 1)$$

Zwei Ungleichungen

Für eine endliche Menge von positiven reellen Zahlen $\mathcal{A}$ gilt

$$\prod_{x \in \mathcal{A}} x \leq \left(\frac{\sum_{x \in \mathcal{A}} x}{|\mathcal{A}|} \right)^{|\mathcal{A}|}$$

und für $1 \leq x \leq n$ gilt

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$

Beweis Erwartungswert III

$$\begin{aligned} q_i &= \prod_{j \in N(i)} (1 - p_j) \leq \prod_{j \in N(i)} \left(1 - x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(1)} + 1)\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{\sum_{j \in N(i)} x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(1)} + 1)}{\delta_i + 1}\right)^{\delta_i + 1} \\ &\leq \left(1 - \frac{\ln(\delta_i^{(1)} + 1)}{\delta_i^{(1)} + 1}\right)^{\delta_i^{(1)} + 1} \leq e^{-\ln(\delta_i^{(1)} + 1)} \\ &= \frac{1}{\delta_i^{(1)} + 1} \end{aligned}$$

Beweis Erwartungswert IV

- Für die Anzahl Y der in Schritt 6 ausgewählten Knoten gilt mit Lemma 31:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} q_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_i^{(1)} + 1} \leq |D_{OPT}|$$

- Insgesamt ergibt sich

$$E[|D|] = E[X] + E[Y] \leq (1 + \alpha \ln(\Delta + 1))|D_{OPT}|$$

- x_D ist zulässig: in Schritt 6 wird für alle noch nicht dominierten Knoten $x_{D,i} := 1$ gesetzt □

Algorithmus LP

Gegeben: Δ, k Gesucht: zulässige LP-Lösung x

1. $x_i := 0, \text{farbe}_i := \text{weiss}$
2. für $l := k-1$ bis 0
3. für $m := k-1$ bis 0
4. sende farbe_i an alle Nachbarn
5. $\tilde{\delta}(i) := |\{j \in N(i) \mid \text{farbe}_j = \text{weiss}\}|$
6. falls $\tilde{\delta}(i) \geq (\Delta+1)^{l/k}$
7. $x_i := \max\left\{x_i, \frac{1}{(\Delta+1)^{m/k}}\right\}$
8. sende x_i an alle Nachbarn
9. falls $\sum_{j \in N(i)} x_j \geq 1$ setze $\text{farbe}_i := \text{grau}$

Invariante 1

Lemma 33
Am Anfang jeden Durchlaufs der äußeren Schleife gilt

$$\tilde{\delta}(i) \leq (\Delta+1)^{(l+1)/k}.$$

Beweis.

- Für $l = k-1$ folgt $\tilde{\delta}(i) \leq \Delta + 1$ nach Definition von Δ
- Ansonsten: Sei i Knoten mit $\tilde{\delta}(i) > (\Delta+1)^{(l+1)/k}$
  - Am Ende der vorigen Iteration $l+1$ wurde $x_i := 1$ gesetzt
  - Alle Knoten in $N(i)$ wurden grau markiert
  - Also $\tilde{\delta}(i) = 0$ □

Aktive Knoten

Definition 34
Knoten mit $\tilde{\delta}(i) \geq (\Delta+1)^{l/k}$ heissen aktiv.
Für weisse Knoten wird die Anzahl aktiver Knoten in $N(i)$ mit $a(i)$ bezeichnet. Für graue Knoten ist $a(i) = 0$.

Invariante 2

Lemma 35

Am Anfang jeden Durchlaufs der inneren Schleife gilt

$$a(i) \leq (\Delta + 1)^{(m+1)/k}.$$

Beweis.

- Für $m = k - 1$ folgt $a(i) \leq \Delta + 1$ nach Definition von Δ.
- Ansonsten: Sei i Knoten mit $a(i) > (\Delta + 1)^{(m+1)/k}$
  - Am Ende der vorigen Iteration $m + 1$ gilt für aktive Knoten $x_j \geq 1/(\Delta + 1)^{(m+1)/k}$
  - Die Summe der x-Werte in $N(i)$ ist größer als 1
  - i wurde demnach grau markiert, und $a(i) = 0$ □

Erhöhung in innerer Schleife

- Variable z_i pro Knoten
- $z_i := 0$ vor Beginn der inneren Schleife
- Bei Erhöhung von x_i um d
  - Verteile d auf die z_j für alle *weissen* $j \in N(i)$
- Es gilt also

$$\sum_{i \in V} z_i = \sum_{i \in V} x_i$$

Invariante 3

Lemma 36

Am Ende jeden Durchlaufs der äußeren Schleife gilt

$$z_i \leq \frac{1}{(\Delta + 1)^{\frac{l-1}{k}}}.$$

Invariante 3 - Beweis I

Beweis.

- Für Knoten i kann z_i nur erhöht werden solange i weiss ist
- Phase I:
  - Alle Iterationen bei denen i weiss bleibt
  - Es gilt stets $\sum_{j \in N(i)} x_j < 1$
  - Erhöhungen der x-Variablen werden auf $(\Delta + 1)^{l/k}$ z-Variablen aufgeteilt, also

$$z_i \leq \frac{\sum_{j \in N(i)} x_j}{(\Delta + 1)^{l/k}} < \frac{1}{(\Delta + 1)^{l/k}}$$

  nach Phase I

Invariante 3 - Beweis II

- Phase II: Die Iteration bei der i grau wird
  - Aktive Knoten $j \in N(i)$ waren schon in voriger Iteration aktiv, und $x_j \geq 1/(\Delta+1)^{(m+1)/k}$
  - x_j wird nun auf $1/(\Delta+1)^{m/k}$ erhöht
  - Die Differenz wird auf mindestens $(\Delta+1)^{l/k}$ z-Variablen verteilt
  - Die Anzahl aktiver Knoten in $N(i)$ ist $a(i)$, somit erhöht sich z_i um höchstens

$$\frac{\frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{m}{k}}} - \frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{m+1}{k}}}}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}} a(i) \leq \frac{(\Delta+1)^{\frac{1}{k}} - 1}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}}$$

Invariante 3 - Beweis III

- z_i wird nur für weisse Knoten erhöht
  - nach Phase II ändert sich z_i nicht mehr
- Phase I und Phase II zusammengezählt ergibt

$$z_i \leq \frac{(\Delta+1)^{\frac{1}{k}} - 1}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}} + \frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}} = \frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{l-1}{k}}}$$

$\square$

Ergebnis

Satz 37

Der Algorithmus LP berechnet eine zulässige Lösung x für das Lineare Programm, wobei x eine $k(\Delta+1)^{2/k}$-Approximation der optimalen Lösung darstellt. Der Algorithmus terminiert nach $2k^2$ Runden.

Beweis Satz I

Beweis

- In jeder inneren Schleife werden 2 Nachrichten gesendet
  - Insgesamt $2k^2$ Runden
- Die ausgegebene Lösung ist zulässig
  - Beim letzten Schleifendurchlauf wird $x_i := 1$ gesetzt für jeden noch weissen Knoten i
  - Für graue Knoten i ist $\sum_{j \in N(i)} x_j \geq 1$
  - Also $N \cdot x \geq 1$

Beweis Satz II

- Betrachte Durchlauf der äußeren Schleife:
  - Invariante 1:
    Es gibt höchstens $(\Delta+1)^{(l+1)/k}$ positive z_j für $j \in N(i)$
  - Invariante 3: $z_j \leq (\Delta+1)^{-(l+1)/k}$
  - Somit

$$\sum_{j \in N(i)} z_j \leq \frac{(\Delta+1)^{\frac{l+1}{k}}}{(\Delta+1)^{\frac{-(l+1)}{k}}} = (\Delta+1)^{\frac{2}{k}}$$

Beweis Satz III

- Betrachte $y_i := z_i/(\Delta+1)^{2/k}$
  - Es gilt $\sum_{j \in N(i)} y_i \leq 1$ für alle i
  - Also ist y zulässige Lösung des dualen LP
  - Sei x^* optimale Lösung des LP
  - Dualitätssatz: $\sum_{i=1}^n y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^*$
- Damit gilt $\sum_{i=1}^n z_i \leq (\Delta+1)^{2/k} \sum_{i=1}^n x_i^*$
- $\sum_{i=1}^n z_i$ ist gleich der Erhöhung der x_i in einem Schritt der äußeren Schleife, also

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k(\Delta+1)^{2/k} \sum_{i=1}^n x_i^*.$$

□