Literatur

- M. V. Marathe, H. Breu, H.B. Hunt III, S. S. Ravi, and D. J. Rosenkrantz: Simple Heuristics for Unit Disk Graphs. *Networks* 25, 59–68, 1995.
  `http://arxiv.org/pdf/math/9409226`
- T. Nieberg and J. L. Hurink: A PTAS for the minimum dominating set problem in unit disk graphs. Memorandum No. 1732, University of Twente. 2004.
  `http://www.math.utwente.nl/publicaties/2004/1732.pdf`

Dominating Set (DS)

Definition 17
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $W \subseteq V$. Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heisst W-Dominating Set g.d.w. für jeden Knoten $u \in W$ gilt, dass $u \in D$ oder es ein Kante $\{u, v\} \in E$ gibt mit $v \in D$. Im Fall $W = V$ heisst D Dominating Set von G.

Problem Minimum Dominating Set (MDS)

Problem MDS
Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Ein Dominating Set D von G minimaler Kardinalität $|D|$

Entscheidungsproblem MDS
Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Konstante K
Gesucht: Gibt es ein Dominating Set D von G mit Kardinalität $|D| \leq K$?

Dominating Sets in Sensornetzen

- Routing
  - Connected Dominating Set (s. Übung)
- Energiesparen
- Clustering
- Initialisationsphase

Komplexitätsstatus von MDS

- MDS ist $\mathcal{NP}$-vollständig
- Spezialfall des Problems Set Cover
- Bestmögliche Approximation:
  - Faktor $\mathcal{O}(\log \Delta)$ schlechter als optimale Lösung (Δ ist maximaler Knotengrad)
  - Einfacher Greedy-Algorithmus

Approximation von MDS

1. $D := \emptyset$
2. Solange es nicht dominierte Knoten gibt
3. Sei v ein nicht dominierter Knoten, der die meisten nicht dominierten Knoten abdeckt
4. $D := D \cup \{v\}$

Independent Set (IS)

Definition 18

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $I \subseteq V$ heisst Independent Set g.d.w. für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt, dass nicht beide Knoten u und v in I sind.

Maximal Independent Set

Problem Maximal Independent Set

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Ein inklusionsmaximales Independent Set I von G, d.h. es gibt keinen Knoten $v \in V \setminus I$ so dass $I \cup \{v\}$ ein Independent Set ist

- Maximal Independent Set ist in Linearzeit lösbar
  - Solange eine Knoten $v \in V \setminus I$ existiert, dessen Nachbarn alle nicht in I sind, füge v zu I hinzu

Maximum Independent Set

Problem Maximum Independent Set

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Ein kardinalitätsmaximals Independent Set I von G,
d.h. für alle Independent Sets I' gilt $|I| \geq |I'|$

- Maximum Independent Set ist $\mathcal{NP}$-vollständig
  (I ist Independent Set $\Leftrightarrow$ $V \setminus I$ ist Vertex Cover)

Zusammenhang Independent und Dominating Set

- Jedes kardinalitätsmaximale Independent Set ist ein inklusionsmaximales Independent Set
- Jedes inklusionsmaximale Independent Set ist ein Dominating Set
  - Sei V' ein inkusionsmaximales Independent Set in $G = (V, E)$
  - Annahme: V' ist kein Dominating Set. Dann existiert $u \in V \setminus V'$, so dass für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ gilt $v \notin V'$
  - $V' \cup \{v\}$ ist ein Independent Set, das V' echt enthält
  - Widerspruch zur Voraussetzung „V' inklusinsmaximal"
- Problem Minimum Independent Dominating Set

Unit Disk Graph (Wdh.)

Definition 19

Ein Graph $G = (V, E)$ heisst Unit Disk Graph (UDG) g.d.w. es eine Einbettung der Knoten in die Eben gibt, so dass $\{u, v\} \in E$ g.d.w. sich die Kreise um u und v mit Radius 1 schneiden.

Bemerkung

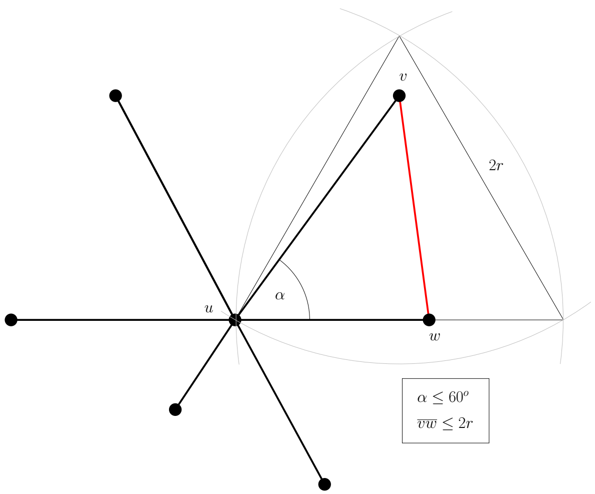
Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Unit Disk Graph g.d.w. es eine Einbettung der Knoten in die Ebene gibt, so dass $\{u, v\} \in E$ g.d.w. der euklidische Abstand zwischen u und v höchstens 1 ist.

Sternlemma

Lemma 20

Sei $G = (V, E)$ ein Unit Disk Graph. Dann enthält G keinen $K_{1,6}$ als knoteninduzierten Teilgraph.

Beweisskizze Sternlemma



Faktor-5 Approximation I

Satz 21

Sei $G = (V, E)$ ein Unit Disk Graph, D_{OPT} ein kardinalitätsminimales Dominating Set und I ein inklusionsmaximales Independent Set. Dann ist I ein Dominating Set mit $|I| \leq 5|D_{OPT}|$.

Bemerkung

Der Linearzeit-Algorithmus für Maximal Independent Set liefert also eine Faktor-5 Approximation für Dominating Set in Unit Disk Graphen in linearer Zeit.

Faktor-5 Approximation II

Beweis.

- Ein Knoten v in D_{OPT} dominiert höchstens 5 Knoten in I
  - Falls $v \in I$, so dominiert v keinen weiteren Knoten in I
  - Ansonsten angenommen v dominiert $v_1, \ldots, v_6 \in I$. Dann würde durch v und die v_i ein $K_{1,6}$ induziert (Knoten in I sind nicht durch Kanten verbunden), im Widerspruch zum obigen Lemma 20.
- Da D_{OPT} ganz V und somit auch ganz I dominiert, kann I höchstens 5-mal mehr Knoten enthalten als D_{OPT}.

$\square$

Polynomiales Approximationsschema (PAS) (Polynomial Time Approximation Scheme, PTAS)

- Eingabe: Unit Disk Graph $G = (V, E)$ und eine Konstante ε
- Gesucht: Dominating Set $D \subseteq V$ mit $|D| \leq (1 + \varepsilon)|D_{OPT}|$
- Laufzeit des Algorithmus polynomial in $|G|$

Eigenschaften des PTAS

- Keine geometrische Einbettung als Unit Disk Graph gegeben
  - Es ist $\mathcal{NP}$-vollständig solch eine Einbettung zu konstruieren
  - Viele andere Algorithmen basieren darauf
- Algorithmus ist robust, d.h. in polynomialer Zeit wird entweder eine Lösung berechnet oder ein Nachweis, dass G kein Unit Disk Graph ist

Nachbarschaft I

Definition 22
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $v \in V$ ein Knoten und $W \subseteq V$ eine Teilmenge aller Knoten.

- $N(v) := \{u \in V | \{u, v\} \in E\} \cup \{v\}$ ist die abgeschlossene Nachbarschaft von v
- $N(W) := \bigcup_{u \in W} N(u)$ bezeichnet die abgeschlossene Nachbarschaft von W
- $N^r(v) := N(N^{r-1}(v))$ definiert rekursiv die r-Nachbarschaft von v, wobei $N^1(v) := N(v)$

Nachbarschaft II

Definition 23
Der graphentheoretische Abstand zweier Knoten $v, w \in V$ ist die minimale Anzahl der Kanten auf einem v-w-Weg.

Bemerkung

- $D \subseteq V$ ist ein Dominating Set g.d.w. $N(D) = V$.
- $N^r(v)$ enthält alle Knoten w mit $d(v, w) \leq r$.

2-Separation I

Definition 24
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $\mathcal{S} := \{S_1, \ldots, S_k\}$ mit $S_i \subseteq V$ $(1 \leq i \leq k)$ heisst 2-Separation g.d.w. für je zwei Knoten $s \in S_i$ und $\overline{s} \in S_j$ mit $i \neq j$ gilt, dass $d(s, \overline{s}) > 2$.

2-Separation II

Lemma 25

Sei $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ eine 2-Separation, D_{OPT} ein Dominating Set minimaler Kardinalität von G, und $D(S_i)$ seien S_i-Dominating Sets minimaler Kardinalität in G. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k} |D(S_i)| \le |D_{OPT}|.$$

2-Separation III

Beweis.

- Da $\mathcal{S}$ 2-Separation sind die $N(S_i)$ paarweise disjunkt
- $D_{OPT} \cap N(S_i)$ ist S_i-Dominating Set
- $D(S_i)$ ist kardinalitätsminimales S_i-Dominating Set, also $|D(S_i)| \le |D_{OPT} \cap N(S_i)|$
- Somit folgt

$$\sum_{i=1}^{k} |D(S_i)| \le \sum_{i=1}^{k} |D_{OPT} \cap N(S_i)| \le |D_{OPT}|$$

□

Algorithmus

1. $X := V$, $D := \emptyset$
2. Solange X nicht leer sei $v \in X$
3. $\quad r := 0$
4. $\quad$ Solange $|D\left(N^{r+2}(v)\right)| > (1+\varepsilon)|D(N^r(v))|$
5. $\quad\quad r := r + 1$
6. $\quad X := X \setminus N^{r+2}(v)$, $D := D \cup D\left(N^{r+2}(v)\right)$

Bemerkungen

- $D(W)$ bezeichnet ein kardinalitätsminimales W-Dominating Set in G (Enumeration aller möglichen Lösungen)
- $N^r(v)$ bezeichnet Nachbarschaft im von X induzierten Graph

Bezeichnungen

- Betrachte Schritt i der Hauptschleife (2)
- v_i und X_i sind das v bzw. X aus Schritt i
- r_i bezeichne das maximale r in Schritt i
- $N_i^{+2} := N_{X_i}^{r+2}(v_i)$ die Knoten, die in Schritt i entfernt werden
- $N_i := N_{X_i}^{r}(v_i)$
- k sei die Anzahl der Schritte in der Hauptschleife

Korrektheit I

Lemma 26
Nach Ausführung des Algorithmus gilt

$$\bigcup_{i=1}^{k} N_i^{+2} = V$$

und $\mathcal{N} := \{N_1, \ldots, N_k\}$ *ist eine 2-Separation in* G.

Korrektheit II

Satz 27
Die Knotenmenge $D := \bigcup_{i=1}^{k} D(N_i^{+2})$ *ist ein Dominating Set von* G, *wobei* $|D| \leq (1+\varepsilon)|D_{OPT}|$.

Bemerkung
Dieser Satz gilt für beliebige ungerichtete Graphen.

Korrektheit III

Beweis.
D ist Dominating Set von G weil mit obigem Lemma 26 jeder Knoten von G in einem N_i^{+2} enthalten ist und somit von einem Knoten in D dominiert wird. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
|D| &= \left|\bigcup_{i=1}^{k} D(N_i^{+2})\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |D(N_i^{+2})| \\
&\leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{k} |D(N_i)| && \text{[Def. Algorithmus]} \\
&\leq (1+\varepsilon) D_{OPT} && \text{[Lemma 25 und 26]}
\end{aligned}$$

□

Intermezzo: Independent Set in UDG

Lemma 28
Sei $G = (V, E)$ *ein Unit Disk Graph,* $v \in V$, *und* $I^r \subseteq N^r(v)$ *ein Independent Set. Dann gilt*

$$|I^r| \leq (2r+1)^2 \in \mathcal{O}(r^2).$$

Beweis.

- Betrachte korrekte Einbettung des UDG
- Die Knoten in I^r sind nicht durch Kanten verbunden
- Einheitskreise mit Fläche π um die Knoten in I^r sind disjunkt
- All diese Kreise sind in Kreis um v mit Radius $2r+1$ enthalten
- $|I^r| \leq \pi(2r+1)^2/\pi = (2r+1)^2$

□

Laufzeit

Satz 29

Sei G ein Unit Disk Graph und $\varepsilon > 0$ eine Konstante. Dann ist die Laufzeit des Algorithmus polynomial in der Anzahl der Knoten n.

Beweis Laufzeit I

Beweis.

- Betrachte den Schleifendurchlauf mit größten Wert von r
  - Gesamtlaufzeit wird dadurch dominiert
- Es gilt $|D(N^r(v))| \leq (2r+1)^2$
  - Nach Lemma 28 hat ein beliebiges kardinalitätsmaximales Independent Set I^r höchstens $(2r+1)^2$ Knoten
  - I^r ist auch ein Dominating Set
  - Ein kardinalitätsminimales Dominating Set hat also höchstens $(2r+1)^2$ Knoten
- Berechnung von $D(N^r(v)$ durch Enumeration
  - Es gibt $\mathcal{O}(n^\alpha)$ viele Kandidaten, wobei $\alpha \in \mathcal{O}(r^2)$

Beweis Laufzeit II

- r ist beschränkt durch eine Konstante c abhängig nur von ε
  - O.B.d.A. sei r gerade (sonst endet folgende Ungl. bei $N^1(v)$)
  - Es gilt nach Konstruktion des Algorithmus:

$$\begin{aligned}(2r+1)^2 &\geq |D(N^r(v))| > (1+\varepsilon)|D(N^{r-2}(v))| > \dots \\ &> (1+\varepsilon)^{r/2}|D(N^0(v)| \\ &= \left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^r\end{aligned}$$

  - $\left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^r$ wächst asymptotisch schneller als $(2r+1)^2$
  - Obige Ungleichung kann also nur für $r \leq c$ gelten, wobei c nur von ε abhängt
- Gesamtlaufzeit ist polynomial in n $(\mathcal{O}(n^{c^2})$ mit $c \in \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon}))$

□

Robustheit

- Algorithmus bricht ab falls kein $N^r(v)$-Dominating Set der Größe $(2r+1)^2$ gefunden wird
- Kontruiere dann ein maximales Independent Set I^r von $N^r(v)$
  - $|I^r| > (2r+1)^2$
  - Nachweis, dass der Graph kein Unit Disk Graph ist
- Falls der Graph kein Unit Disk Graph ist wird
  - entweder ein Dominating Set D mit $|D| \leq (1+\varepsilon)D_{OPT}$ geliefert
  - oder ein Nachweis geliefert, dass der kein Unit Disk Graph ist,
  - in polynomialer Laufzeit in der Größe des Graphen.