Inhalt I

Inhalt II

Organisatorisches

- Webseite zur Vorlesung:

  `http://i11www.ira.uka.de/teaching/SS_05/algosens/`

  - Folien zur Vorlesung und Übung (soweit verfügbar)
  - Übungsblätter
  - Referenzen auf weiterführende Literatur
  - Ankündigungen zur Vorlesung

Literatur

- H. Attiya, J. Welch: *Distributed Computing*. Wiley, 2004.

Verteilte Systeme

Definition 1

Ein verteiltes System ist eine Menge von selbständigen *Recheneinheiten*, die miteinander *kommunizieren* können.

Verteilte Systeme

- Beispiele
  - Multiprozessorrechner
  - Cluster von Workstations
  - Internet, P2P Netze, Seti@home
  - Sensor- und Ad Hoc-Netze
- Grundlegende Schwierigkeiten
  - Asynchrone Kommunikation
  - Begrenztes lokales Wissen
  - Ausfälle

Theorie des Verteilten Rechnens

- Ziele sind ähnlich wie bei sequentiellem Rechnen, z.B. Algorithmik, Komplexitätstheorie, usw.
- Problem: Kein einheitliches Modell für verteilte Systeme
  - Unterschiedliche Kommunikationsparadigmen
  - Sind Recheneinheiten unterscheidbar?
  - ...
- Komplexitätsmaße
- Basisalgorithmen
- Schwierigkeit von Problemen: oft Negativresultate

Kommunikationsparadigmen

- Synchron ↔ Asynchron
- Nachrichtenbasiert ↔ Shared Memory
  - Synchrone Kommunikation über Shared Memory entspricht dem PRAM Modell
  - Wir betrachten im Folgenden nur Modelle für nachrichtenbasierte („message passing") verteilte Systeme

Beispiel: Broadcast

- Gegeben
  - Kommunikationsgraph $G = (V, E)$
  - Aufspannender Baum mit Wurzel $r \in V$
    - Jeder Knoten v kennt den Nachbarn, der im Baum zur Wurzel zeigt (`parent`(v))
    - Jeder Knoten v kennt die Nachbarn, die im Baum von der Wurzel weg zeigen (`children`(v))
  - Eine Nachricht M an einem Knoten r
- Problem
  - Die Nachricht M soll an alle Knoten des Netzes übermittelt werden

Formales Modell eines verteilten Systems (I)

- n Prozessoren („Recheneinheiten") $p_1, \ldots, p_n$
- Zwei Prozessoren können durch einen bidirektionalen Kommunikationskanal verbunden sein
- Kommunikationsgraph („Topologie", Netz)
  - Knoten: Prozessoren $p_1, \ldots, p_n$
  - Kanten: Kommunikationskanäle $e_{ij} = \{p_i, p_j\}$ $(i \neq j)$
  - Der Grad (Anzahl inzidenter Kanten) von p_i sei d_i
  - Der Graph ist ungerichtet

Formales Modell eines verteilten Systems (II)

- Jeder Prozessor p_i hat Zustandsmenge Q_i, darunter ausgezeichnete Anfangs- und Endzustände
- Kommunikationspuffer $\texttt{outbuf}_i[l]$ und $\texttt{inbuf}_i[l]$ $(1 \leq l \leq d_i)$, jeder dieser Puffer besteht aus einer Folge von Nachrichten
- Am Anfang sind die $\texttt{inbuf}_i[l]$ leer
- Kommunikationspuffer können auch in die Zustände Q_i modelliert werden

Beispiel: Broadcast (Zustände)

- Die Zustände eines Prozessors p_i beinhalten
  - $\texttt{parent}(p_i) = \texttt{parent}_i$, ein Prozessorindex oder `nil`
  - $\texttt{children}(p_i) = \texttt{children}_i$, eine Menge von Prozessorindizes
  - $\texttt{terminated}_i$, eine `boolean` Variable
- Anfangszustände: $\texttt{parent}_i$ und $\texttt{children}_i$ gemäß aufspannendem Baum initialisiert, $\texttt{terminated}_i = \texttt{false}$
- $\texttt{outbuf}_r[j]$ enthält M für alle $j \in \texttt{children}_r$
- Alle anderen $\texttt{outbuf}_i$ sind leer

Verteilter Algorithmus

Verteilter Algorithmus

- Berechnungsschritt $\mathrm{comp}(i)$ bei p_i
  - p_i befindet sich in Zustand $q_i \in Q_i$
  - Abhängig von q_i und $\texttt{inbuf}_i$ Zustandsübergang
  - Nach Berechnungsschritt ist $\texttt{inbuf}_i$ leer
  - Für jede inzidente Kante kann eine Nachricht erstellt und zu $\texttt{outbuf}_i[l]$ hinzugefügt werden

Verteilter Algorithmus

- Berechnungsschritt $\mathrm{comp}(i)$ bei p_i
  - p_i befindet sich in Zustand $q_i \in Q_i$
  - Abhängig von q_i und $\texttt{inbuf}_i$ Zustandsübergang
  - Nach Berechnungsschritt ist $\texttt{inbuf}_i$ leer
  - Für jede inzidente Kante kann eine Nachricht erstellt und zu $\texttt{outbuf}_i[l]$ hinzugefügt werden
- Kommunikationsschritt $\mathrm{del}(i, j, M)$: Sende M über e_{ij}
  - Eine Nachricht M wird von $\texttt{outbuf}_i[l_i]$ nach $\texttt{inbuf}_j[l_j]$ übertragen

Verteilter Algorithmus

- Konfiguration $C = (c_1, \ldots, c_n)$
  - c_i enthält Zustand q_i des Prozessors p_i sowie $\texttt{inbuf}_i$ und $\texttt{outbuf}_i$
  - Beschreibt vollständig den Zustand des ganzen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt

Verteilter Algorithmus

- Konfiguration $C = (c_1, \ldots, c_n)$
  - c_i enthält Zustand q_i des Prozessors p_i sowie $\texttt{inbuf}_i$ und $\texttt{outbuf}_i$
  - Beschreibt vollständig den Zustand des ganzen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt
- Ausführung eines verteilten Algorithmus
  - Unendliche Folge von Konfigurationen und Schritten: $C_1, \phi_1, C_2, \phi_2, \ldots$
  - Eine gültige Ausführung muss gewisse Bedingungen erfüllen

Beispiel: Broadcast (Algorithmus)

- Berechnungsschritt bei p_i:
  - Falls $M \in \texttt{inbuf}_i[k]$ für ein k
    - füge M zu $\texttt{outbuf}_i[j]$ hinzu, für alle $j \in \texttt{children}_i$
    - setze $\texttt{terminated}_i = \texttt{true}$
  - Falls $i = r$ und $\texttt{terminated}_r = \texttt{false}$, so setze $\texttt{terminated}_r = \texttt{true}$
  - Ansonsten wird nichts getan

Asynchrone Kommunikation

- Keine Garantien bzgl. der Dauer einer Nachrichtenübermittlung
- Algorithmus ohne zeitliche Koordinierung („asynchron")
- Sei eine Ausführung $C_1, \phi_1, C_2, \phi_2, \ldots$
- Gültigkeitsbedingungen:
  - C_{k+1} muss durch Schritt ϕ_k aus C_k hervorgehen
  - Jeder Prozessor hat unendlich viele Berechnungsschritte
  - Jede Nachricht wird übermittelt (Achtung: „eventually")
- C_1 besteht aus Initialzuständen mit leeren $\texttt{inbuf}_i$

Synchrone Kommunikation

- Rundenbasiert
  1. Jeder Prozessor kann eine Nachricht zu jedem Nachbarn senden
  2. Diese Nachrichten werden sofort zugestellt
  3. Jeder Prozessor führt einen Berechnungsschritt aus
- Spezialfall einer asynchronen Kommunikation:
  Eine Runde besteht aus
  1. Kommunikationsschritten bis alle $\texttt{outbuf}_i$ leer sind
  2. Einem Berechnungsschritt pro Prozessor
- Die Ausführung ist durch die Anfangskonfiguration C_1 festgelegt

Korrektheit eines verteilten Algorithmus

- Jede gültige Ausführung ist unendlich
- Jeder Prozessor hat eine Teilmenge von Endzuständen
- Aus Endzuständen können nur Endzustände erreicht werden
- Eine gültige Ausführung ist beendet, wenn alle Prozessoren in einem Endzustand sind
- Ein verteilter Algorithmus ist korrekt, wenn alle gültigen Ausführungen nach endlich vielen Schritten enden und danach stets eine korrekte Lösung des Problems vorliegt

Beispiel: Broadcast (Korrektheit)

Lemma 2

Der Broadcast Algorithmus ist korrekt, d.h. jede Ausführung ist nach endlich vielen Schritten beendet und jeder Prozessor hat die Nachricht M erhalten.

Beispiel: Broadcast (Korrektheit)

Beweis.

- Ein Prozessor ist im Endzustand g.d.w. er M erhalten hat

Beispiel: Broadcast (Korrektheit)

Beweis.

- Ein Prozessor ist im Endzustand g.d.w. er M erhalten hat
- Annahme: Es gibt einen Prozessor, der nicht terminiert
  - Sei p_i solch ein Prozessor mit minimaler Höhe im Baum
  - $p_i \neq r$, denn im ersten Berechnungsschritt von r terminiert r
  - Der Vorgänger von p_i im Baum ist terminiert
  - Dann hat der Vorgänger aber M an p_i geschickt
  - Da alle Nachrichten übermittelt werden und jeder Prozessor unendlich viele Berechnungsschritte hat, wird auch p_i nach endlich vielen Schritten M erhalten und terminieren
  - Widerspruch zur Annahme, also terminiert jeder Prozessor und erhält somit auch M

□

Nachrichten-Komplexität

- Maximale Anzahl an gesendeten Nachrichten über alle gültigen Ausführungen des Algorithmus
- Kann bei asynchroner und synchroner Kommunikation angewandt werden

Beispiel: Broadcast (Nachrichten-Komplexität)

Lemma 3

Der Broadcast Algorithmus hat Nachrichtenkomplexität $n-1$.

Beweis.

- Die Nachricht M wird genau einmal pro Kante im aufspannenden Baum versandt
- Jeder Baum mit n Knoten hat $n-1$ Kanten

□

Zeit-Komplexität

- Synchrone Kommunikation
  - Laufzeit: Maximale Anzahl der Runden

Zeit-Komplexität

- Synchrone Kommunikation
  - Laufzeit: Maximale Anzahl der Runden
- Asynchrone Kommunikation
  - Maximale Übermittlungsdauer ist 1
  - Zeitliche Ausführung
    - Jedem Schritt wird ein nichtnegativer Zeitpunkt zugeordnet
    - Zeit startet bei 0, darf nicht abnehmen und nicht beschränkt sein
    - Pro Prozessor ist die Zeit strikt ansteigend
  - Dauer einer Nachrichtenübermittlung: Zeit zwischen Einfügen in $\texttt{outbuf}_i[l_i]$ und Lesen aus $\texttt{inbuf}_j[l_j]$
  - Normierung der maximalen Dauer auf 1
  - Laufzeit: Maximale Zeit bis zur Beendigung des Algorithmus

Beispiel: Broadcast (synchrone Zeitkomplexität)

Lemma 4

Bei jeder gültigen Ausführung im synchronen Modell empfängt jeder Prozessor mit Entfernung t von r im aufspannenden Baum die Nachricht M in Runde t.

Beispiel: Broadcast (synchrone Zeitkomplexität)

Beweis.

Induktion nach t.

- Induktionsanfang: $t = 1$. Jedes Kind von r empfängt M in der ersten Runde.

Beispiel: Broadcast (synchrone Zeitkomplexität)

Beweis.

Induktion nach t.

- Induktionsanfang: $t = 1$. Jedes Kind von r empfängt M in der ersten Runde.
- Induktionsannahme: Jeder Prozessor mit Entfernung $t - 1$ hat M in Runde $t - 1$ empfangen.

Beispiel: Broadcast (synchrone Zeitkomplexität)

Beweis.

Induktion nach t.

- Induktionsanfang: $t = 1$. Jedes Kind von r empfängt M in der ersten Runde.
- Induktionsannahme: Jeder Prozessor mit Entfernung $t-1$ hat M in Runde $t-1$ empfangen.
- Induktionsschluss:
  - Sei p_i ein Prozessor mit Entfernung t im Baum
  - Der Vorgänger $\texttt{parent}_i = p_j$ von p_i hat also Entfernung $t-1$, und nach Induktionsannahme hat p_i die Nachricht M in Runde $t-1$ empfangen
  - Nach dem Algorithmus sendet p_j die Nachricht M in der darauffolgenden Runde an p_i.

□

Beispiel: Broadcast (synchrone Zeitkomplexität)

Beispiel: Broadcast (synchrone Zeitkomplexität)

Lemma 5

Der Broadcast Algorithmus hat im synchronen Modell eine Zeit-Komplexität von h, wobei h die Höhe des aufspannenden Baumes ist.

Beweis.

- Die maximale Entfernung von der Wurzel im Baum ist die Höhe h des aufspannenden Baumes
- Der Beweis folgt somit aus Lemma 4

□

Problemstellung

Problemstellung

- Voraussetzungen
  - Der Kommunikationsgraph ist ein Ring aus n Prozessoren
  - Jeder Prozessor kennt seinen *linken* und *rechten* Nachbarn
- Problem
  - Genau ein Prozessor soll als *Leader* ausgezeichnet werden

Anonymität, Uniformität

Definition 6

Ein verteilter Algorithmus heißt uniform, wenn die Anzahl n der Prozessoren nicht verwendet wird.

Definition 7

Ein verteilter Algorithmus heißt anonym, wenn die Prozessoren keine unterschiedlichen IDs besitzen. (D.h., die Prozessoren führen identische Programme aus.)

Satz 8

Es gibt keinen anonymen Algorithmus für das Leader Election Problem in Ringen.

Beweis.

- Annahme: Es gibt einen solchen Algorithmus
- $O.B.d.A.$ sei der Algorithmus synchron
- Die Ausführung R des Algorithmus ist durch die Anfangskonfiguration festgelegt
- Da der Algorithmus anonym ist, sind die Zustandsübergangsfunktionen für alle Prozessoren identisch
- In jeder Runde k der Ausführung R sind alle Prozessoren am Ende der Runde im selben Zustand
  - Induktion über k
- Sobald ein Prozessor am Ende einer Runde ausgewählt wird, sind alle Prozessoren ausgewählt, also kann der Algorithmus nicht korrekt sein

□

„Symmetry Breaking"

- Jeder Prozessor p_i hat eindeutige $\texttt{ID}_i$
- Einfacher uniformer Algorithmus:
  - Am Anfang: jeder Prozessor p_i sendet $\texttt{ID}_i$ zum linken Nachbarn
  - Prozessor p_i empfängt eine ID vom rechten Nachbarn
    - Falls $\texttt{ID} > \texttt{ID}_i$: sende ID zum linken Nachbarn
    - Falls $\texttt{ID} = \texttt{ID}_i$: sende Nachricht „terminiere" zum linken Nachbarn und terminiere selbst als „Leader"
    - Ansonsten sende ID nicht weiter
  - Prozessor p_i empfängt Nachricht „terminiere"
    - terminiere als „Non-Leader"

„Symmetry Breaking"

- Jeder Prozessor p_i hat eindeutige $\texttt{ID}_i$
- Einfacher uniformer Algorithmus:
  - Am Anfang: jeder Prozessor p_i sendet $\texttt{ID}_i$ zum linken Nachbarn
  - Prozessor p_i empfängt eine ID vom rechten Nachbarn
    - Falls $\texttt{ID} > \texttt{ID}_i$: sende ID zum linken Nachbarn
    - Falls $\texttt{ID} = \texttt{ID}_i$: sende Nachricht „terminiere" zum linken Nachbarn und terminiere selbst als „Leader"
    - Ansonsten sende ID nicht weiter
  - Prozessor p_i empfängt Nachricht „terminiere"
    - terminiere als „Non-Leader"
- Nachrichten-Komplexität: $\mathcal{O}(n^2)$

„Symmetry Breaking"

- Jeder Prozessor p_i hat eindeutige $\texttt{ID}_i$
- Einfacher uniformer Algorithmus:
  - Am Anfang: jeder Prozessor p_i sendet $\texttt{ID}_i$ zum linken Nachbarn
  - Prozessor p_i empfängt eine ID vom rechten Nachbarn
    - Falls $\texttt{ID} > \texttt{ID}_i$: sende ID zum linken Nachbarn
    - Falls $\texttt{ID} = \texttt{ID}_i$: sende Nachricht „terminiere" zum linken Nachbarn und terminiere selbst als „Leader"
    - Ansonsten sende ID nicht weiter
  - Prozessor p_i empfängt Nachricht „terminiere"
    - terminiere als „Non-Leader"
- Nachrichten-Komplexität: $\mathcal{O}(n^2)$
- Bessere Algorithmen: $\Theta(n \log n)$
- Andere Möglichkeit: Randomisierung

Literatur

- R. G. Gallager, P. A. Humblet, and P. M. Spira: A Distributed Algorithm for Minimum-Weight Spanning Trees. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems* 5:1, 66-77, 1983.

Problemstellung

- Voraussetzungen
  - Ungerichteter, zusammenhängender Kommunikationsgraph $G = (V, E)$ ($|V| = n$, $|E| = m$)
  - Kantengewichte $W : E \to \mathbb{R}$, paarweise verschieden
  - Asynchrone Kommunikation
  - Jeder Knoten kennt Kantengewichte inzidenter Kanten
- Problem
  - Bestimme einen aufspannenden Baum minimalen Gewichts (Minimum Spanning Tree, MST)

Motivation

- Fundamentales Problem in verteilten Systemen
- Aufspannende Bäume bilden Grundlage für weitere Algorithmen wie
  - Broadcast
  - Leader Election
  - Zählen der Knoten
  - Berechnen von Funktionen wie Maximum, Summe, ...
- Energieaufwand in Sensor- und Ad Hoc-Netzen
  - Kantengewichte entsprechen Energieaufwand für Kommunikation
  - Minimiere Energieaufwand

Definition 9

Sei T ein Teilbaum („Fragment") eines Graphen $G = (V, E)$, der durch eine Teilmenge der Kanten $E_T \subset E$ induziert wird. Dann heißt eine Kante e ausgehend aus T wenn genau einer der beiden Endknoten von e zum Teilbaum T gehört.

Lemma 10

Sei ein Teilbaum T eines MST induziert durch eine Kantenmenge E_T und e eine aus T ausgehende Kante minimalen Gewichts. Dann ist der durch $E_T \cup e$ induzierte Baum ebenfalls ein Teilbaum eines MST.

Sequentieller Algorithmus von Prim (Wdh.)

1. Wähle einen beliebigen Startknoten und betrachte diesen als ,,grünen Baum"
2. Wiederhole den folgenden Färbungsschritt $n-1$ mal
3. Wähle eine ungefärbte aus dem grünen Baum ausgehende Kante minimalen Gewichts und färbe sie grün.

- Laufzeit $\mathcal{O}(m \log_{2+m/n} n)$
- Zu sequentiellen MST-Algorithmen siehe auch Kapitel 4 im Skript zur Vorlesung ,,Entwurf und Analyse von Algorithmen":

`http://i11www.ira.uka.de/algo/teaching/scripts/sources/ad.pdf`

Lemma 11

Wenn alle Kantengewichte eines Graphen paarweise verschieden sind, so ist der MST eindeutig bestimmt.

Lemma 11

Wenn alle Kantengewichte eines Graphen paarweise verschieden sind, so ist der MST eindeutig bestimmt.

Lemma 12

Bei paarweise verschiedenen Kantengewichten ist jeder MST-Algorithmus, der Schritt für Schritt zu (mehreren) bestehenden Teilen des MST die ausgehende Kante minimalen Gewichts hinzufügt, korrekt.

Idee des Algorithmus

- Anfangszustand
  - Alle Knoten sind im Zustand $\mathrm{Sleeping}$
  - Jeder Knoten bildet ein einzelnes Fragment F des MST
  - Das Level L_F jedes Fragments ist am Anfang 0

Idee des Algorithmus

- Anfangszustand
  - Alle Knoten sind im Zustand $\mathrm{Sleeping}$
  - Jeder Knoten bildet ein einzelnes Fragment F des MST
  - Das Level L_F jedes Fragments ist am Anfang 0
- Jedes Fragment F sucht die ausgehende Kante e_F minimalen Gewichts und versucht mit dem benachbarten Fragment F' zu verschmelzen
  - Falls $L = L'$ und $e_F = e_{F'}$, so verschmelzen F und F' zu einem Fragment mit Level $L + 1$ und $\mathrm{core}\ e_F$
  - Falls $L < L'$, so wird F von F' absorbiert
  - Ansonsten wartet F bis F' ein höheres Level erhält

Idee des Algorithmus

- Fragment F hat zwei ausgezeichnete Kanten
  - $\min_F$: Die minimale ausgehende Kante
  - core_F: Kante der letzten Verschmelzung oder gleich $\min_F$
- Knoten v speichern
  - Level L
  - Fragment-ID (Gew. der core-Kante der letzten Verschmelzung)
  - Zu inzidenten Kanten ob sie zum MST gehören oder nicht
  - Kante in Richtung $\min_F$
  - Kante in Richtung core_F
- Knotenzustände
  - $\mathrm{Sleeping}$: Anfangszustand
  - Find: Suche nach minimaler ausgehender Kante
  - Found: minimale ausgehende Kante ist bekannt

Aufwachen: Erster Schritt im Zustand Sleeping

- Knoten im Zustand Sleeping
  - Markiere minimale inzidente Kante als branch
  - Sende $\langle \text{connect} \rangle(0)$ über diese Kante
  - Gehe in Zustand Found
  - Bei Empfang von $\langle \text{connect} \rangle$ oder $\langle \text{test} \rangle$ weiter wie später beschrieben

Verschmelzen zweier Fragmente bei e

- Für F_1 und F_2 ist e minimale ausgehende Kante $\min$ und core
- Beide Endknoten haben $\langle \mathrm{connect} \rangle (L)$ zum anderen Endknoten geschickt
- Broadcast von $\langle \mathrm{init} \rangle (L+1, W_e, \mathrm{Find})$ an beide Fragmente über branch Kanten
  - Die Knoten updaten den Level und die Fragment-ID (W_e), senden die $\langle \mathrm{init} \rangle$ Nachricht weiter und suchen dann ihre minimal ausgehende Kante
- Von Blättern aus Antwort von $\langle \mathrm{report} \rangle (W)$: Gewicht der neuen minimalen ausgehenden Kante („Convergecast")
- Neue core-Kante des Fragments wird minimal ausgehende Kante

Knoten sucht minimalen ausgehenden Kante I

- Bei Erhalt einer Nachricht $\langle \text{init} \rangle (L, F, \text{Find})$
- Welche inzidenten Kanten sind ausgehend?
- Klassifiziere Kanten als
  - branch: gehört zum MST
  - rejected: gehört nicht zum MST
  - basic: steht noch nicht fest
- Sende $\langle \text{test} \rangle (F, L)$ an minimale Kante mit Status basic
- Antwort $\langle \text{reject} \rangle ()$: Nachbar gehört selbst zu F; markiere Kante als rejected, sende $\langle \text{test} \rangle (F, L)$ an nächste Kante
- Antwort $\langle \text{accept} \rangle ()$: Kante gefunden!

Knoten sucht minimalen ausgehenden Kante II

- Antwort auf $\langle \text{test} \rangle (F', L')$
  - Falls $F' = F$, so sende $\langle \text{reject} \rangle ()$ zurück
  - Ansonsten
    - Falls $L \geq L'$, so sende $\langle \text{accept} \rangle ()$ zurück
    - Falls $L < L'$, so verzögere Antwort bis $L \geq L'$

Antwort auf $\langle \text{init} \rangle$: Convergecast des min. Kantengew.

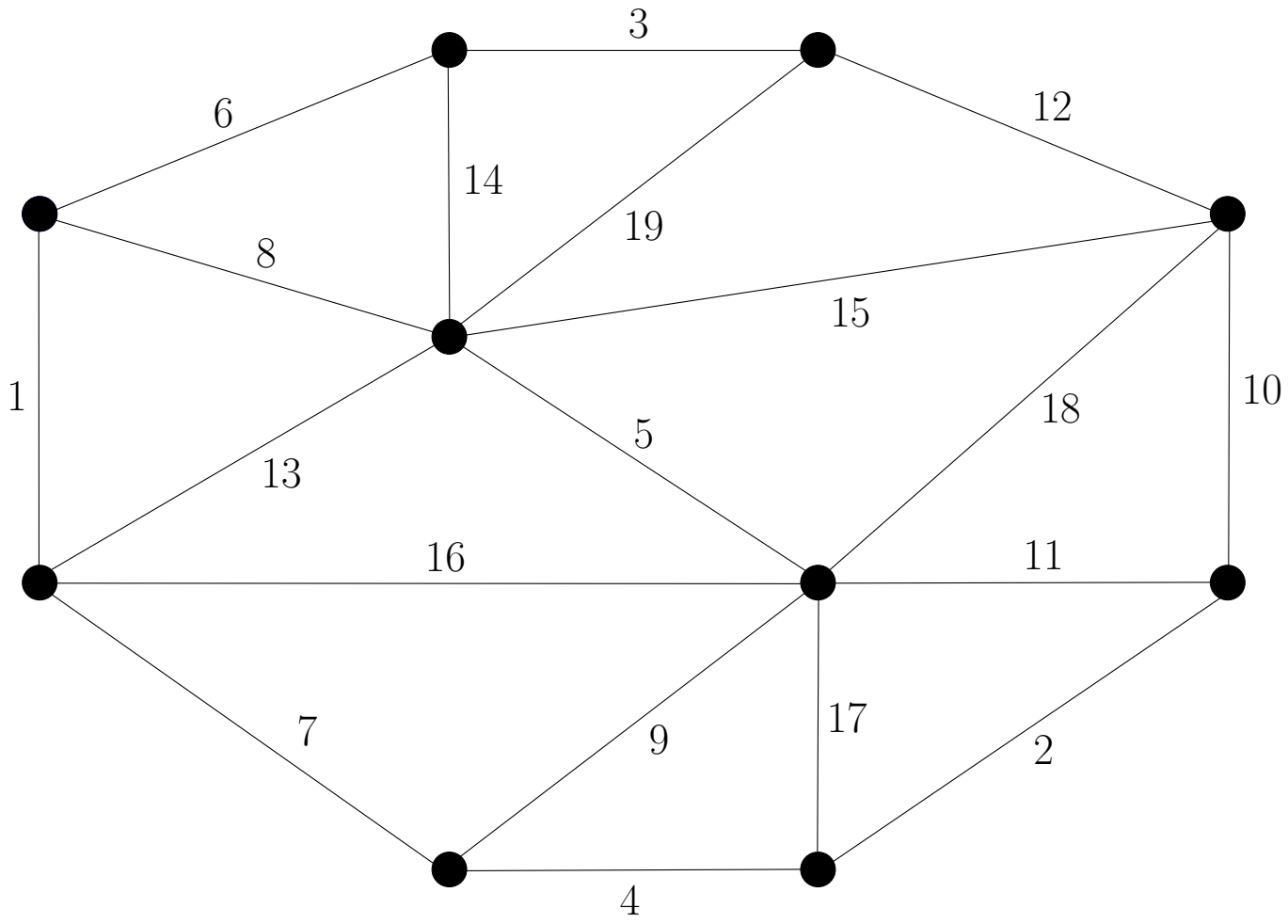
- Blatt eines Fragments
  - W_e sei Gewicht der minimalen ausgehenden Kante e (oder ∞)
  - Sende $\langle \text{report} \rangle(W_e)$ in Richtung core
  - Gehe in Zustand Found
- Innere Knoten
  - Nach Erhalt der $\langle \text{report} \rangle(W_{e_i})$ Nachrichten von allen ausgehenden branch-Kanten e_i
  - Nach Bestimmung der eigenen ausgehenden Kante minimalen Gewichts W_e
  - Bilde das Minimum W über die Gewichte W_{e_i} und W_e
  - Merke Richtung zur minimalen ausgehenden Kante
  - Sende $\langle \text{report} \rangle(W)$ in Richtung core
  - Gehe in Zustand Found

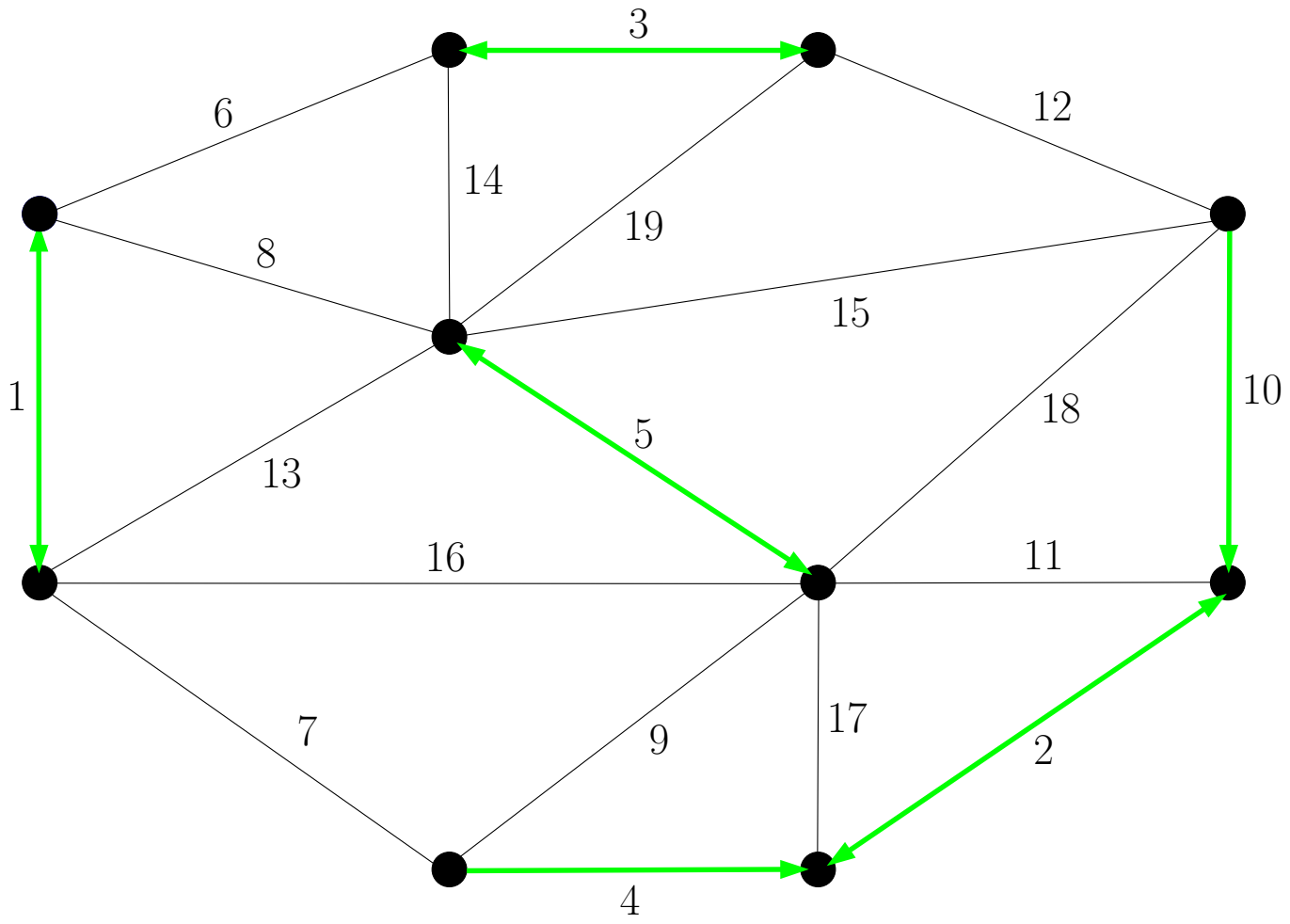
Wechsel der core-Kante und neuer $\langle \text{connect} \rangle$

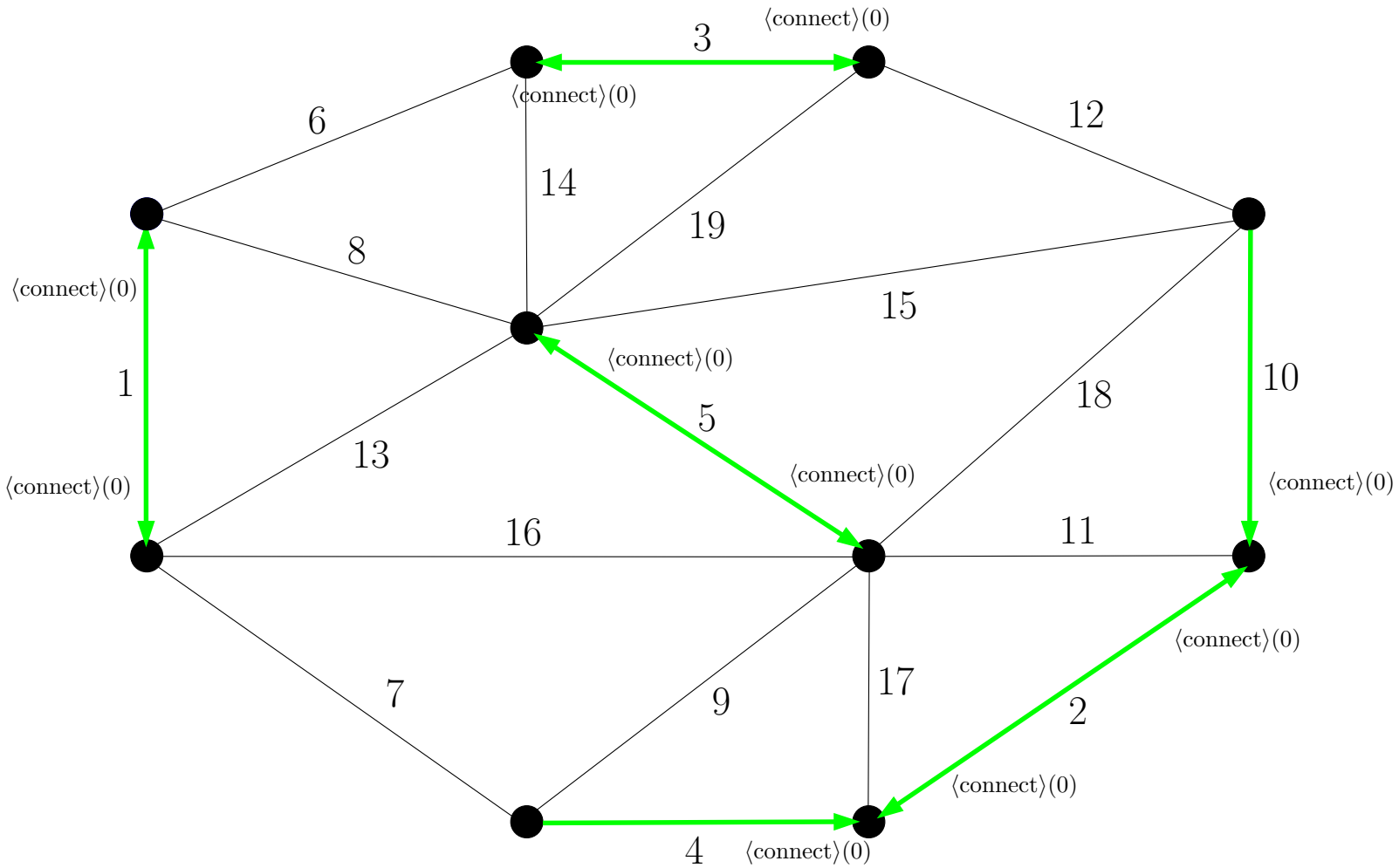
- Ankunft von $\langle \text{report} \rangle(W)$ am core
  - Falls $W = \infty$ terminiere (Broadcast $\langle \text{terminate} \rangle$)
  - Sende $\langle \text{change-core} \rangle()$ entlang des Weges zur minimalen ausgehenden Kante
    - Update der Kante in Richtung core
  - Gespeicherte Kanten in Richtung neuer core-Kante bilden jetzt gerichteten Baum
  - Wurzel ist Knoten, der zur core-Kante inzident ist
  - Markiere die Kante minimalen Gewichts als branch
  - Über die neue core-Kante minimalen Gewichts wird $\langle \text{connect} \rangle(L)$ gesendet

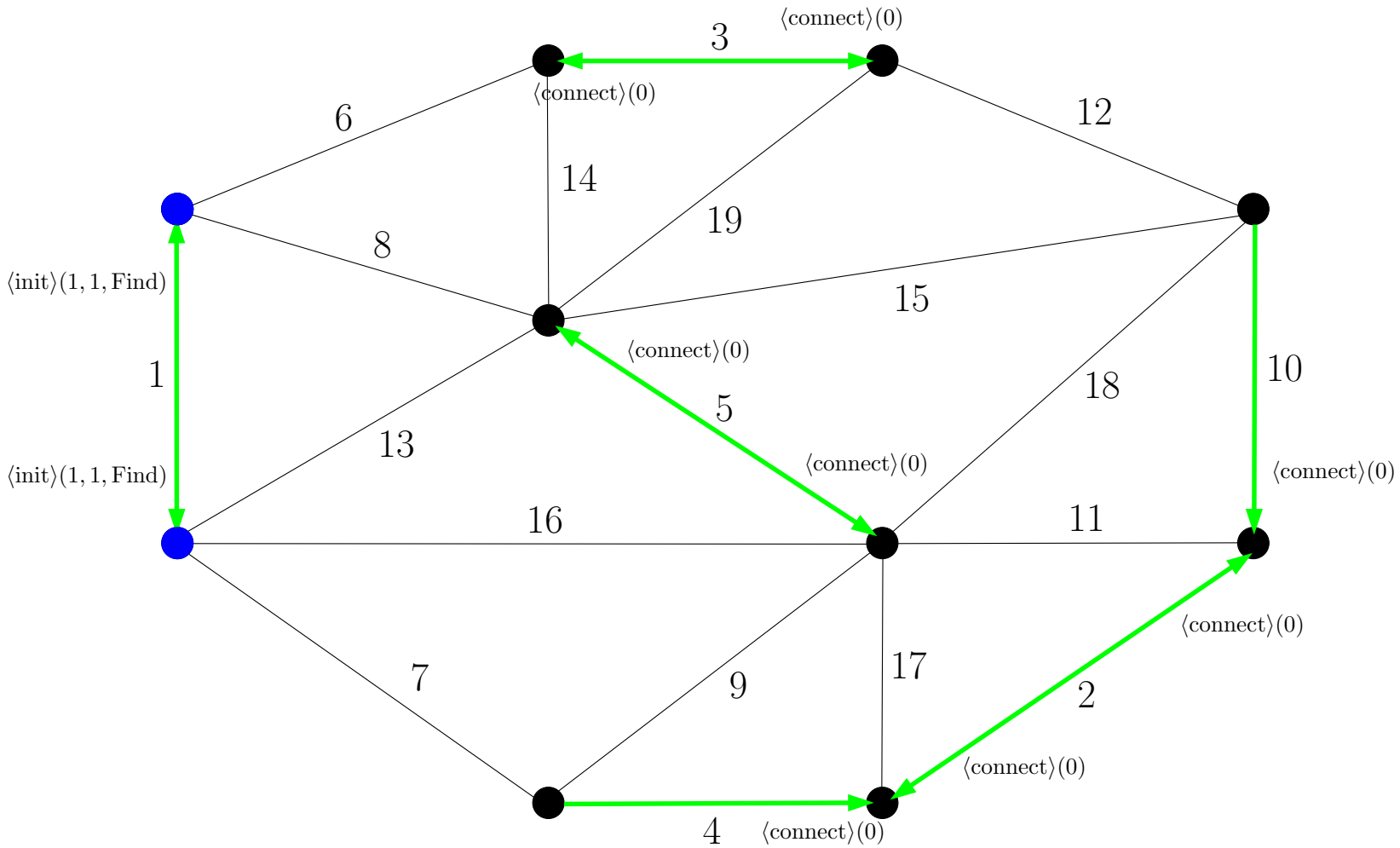
Eingliederung Fragmente niedrigeren Levels

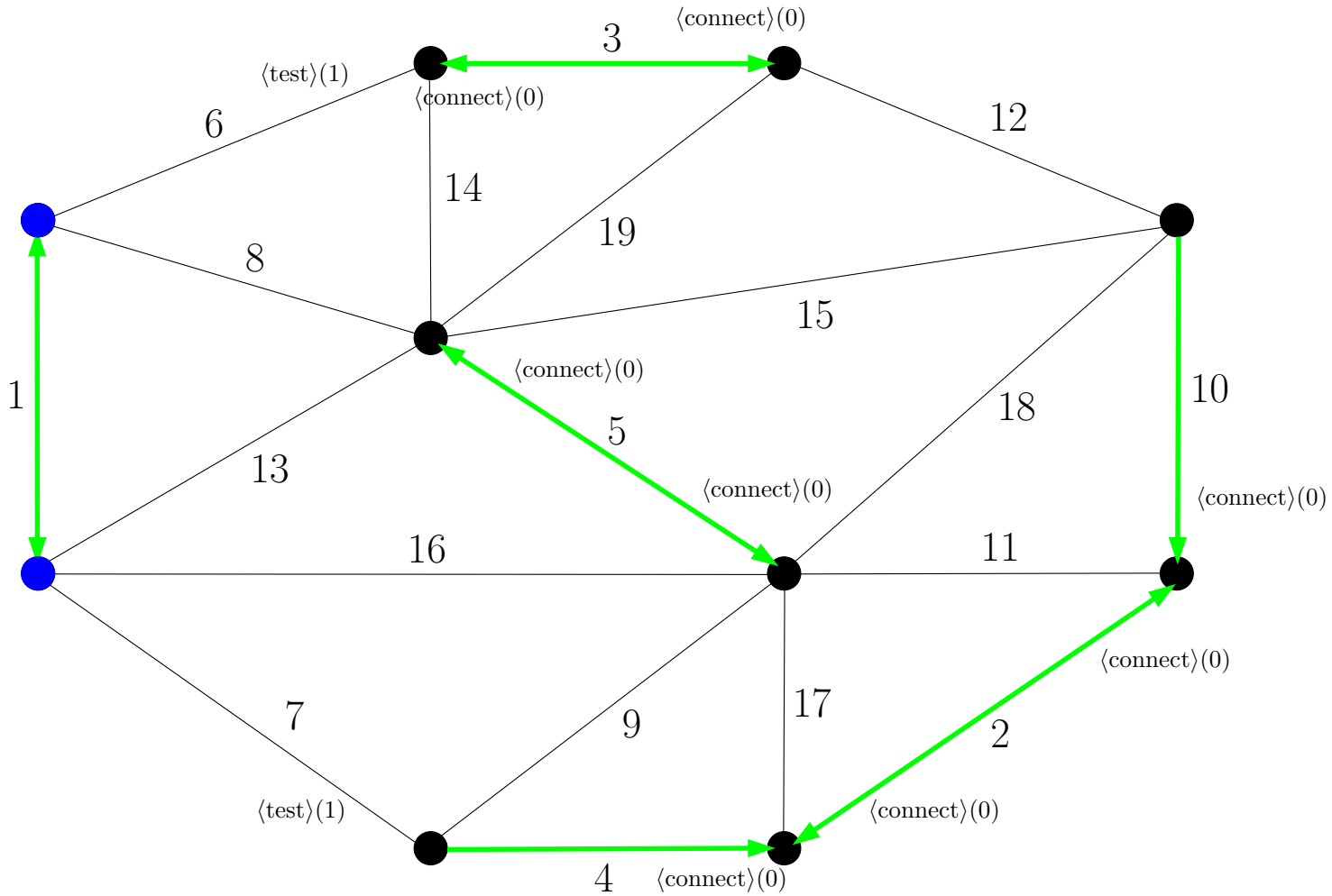
- v empfängt Nachricht $\langle \text{connect} \rangle(L')$ mit $L' < L$ von u
  - Eingliederung des benachbarten Fragments
  - Markiere Kante $\{u, v\}$ als branch
  - Sende $\langle \text{init} \rangle(L, W_{\text{core}}, f)$ an u
  - Falls v in Zustand Find, so ist $f = \text{Find}$
    - Die Knoten des benachbarten Fragments nehmen an Suche nach minimaler ausgehender Kante teil
  - Falls v in Zustand Found, so ist $f = \text{Found}$
    - v hat eine ausgehende Kante kleineren Gewichts als die Kante $\{u, v\}$
    - Die Knoten des benachbarten Fragments gehen nach Weiterleitung der $\langle \text{init} \rangle(\ldots)$ Nachricht in den Zustand Found

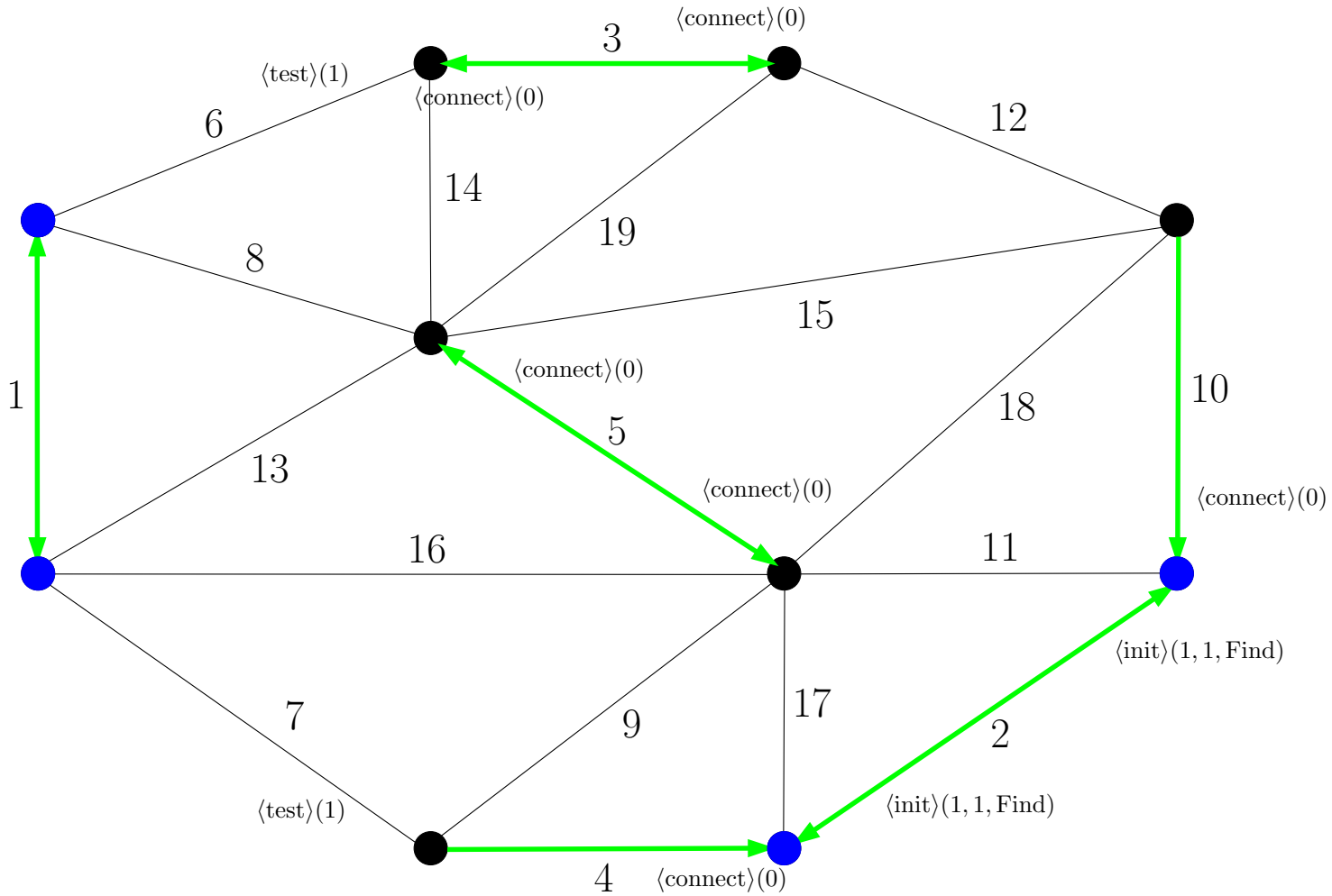

3
6
12
14
19
8
15
1
10
18
5
13
16
11
7
9
17
2
4

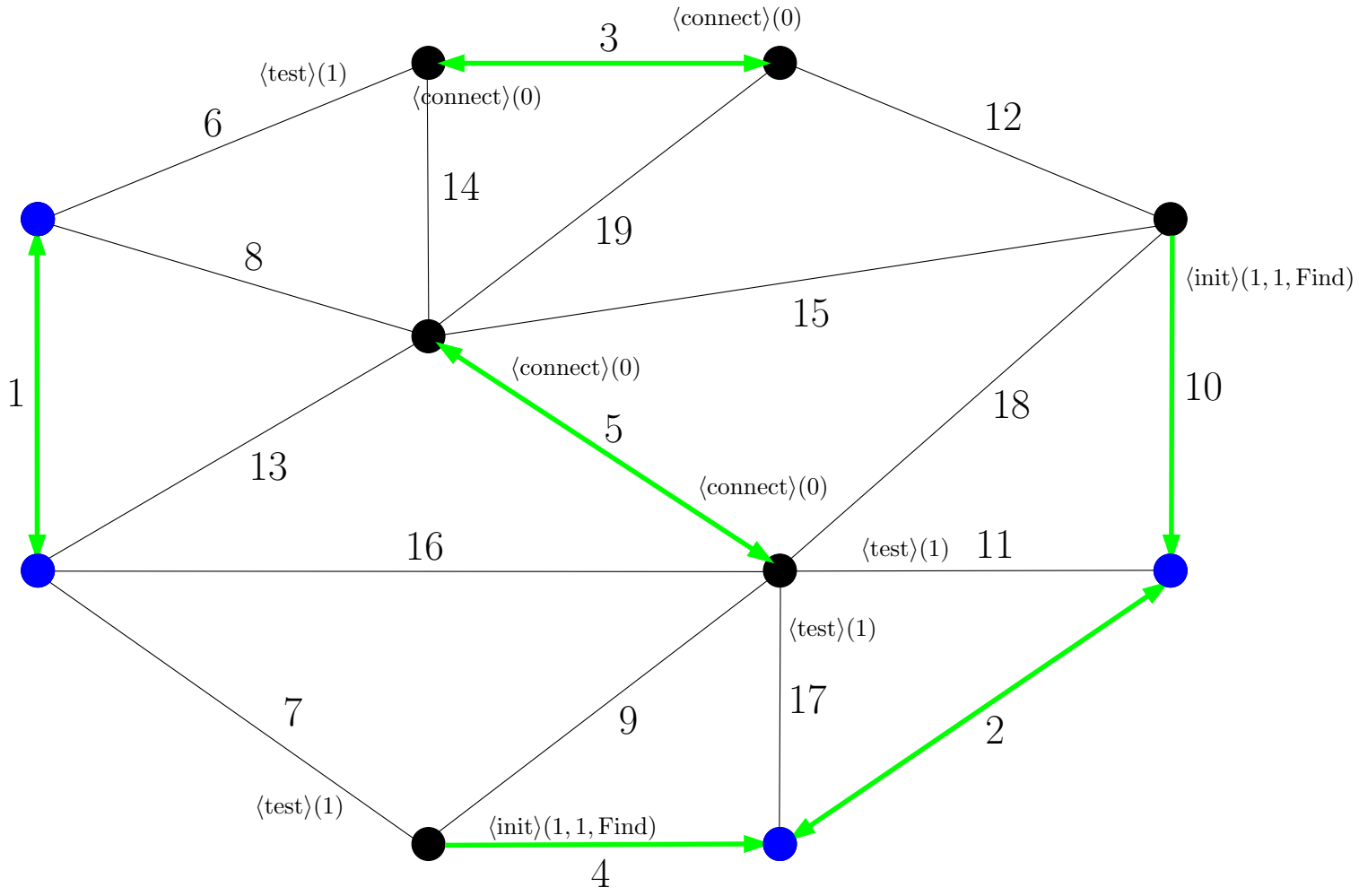

3
6
12
14
19
8
15
1
10
5
18
13
16
11
7
9
17
2
4

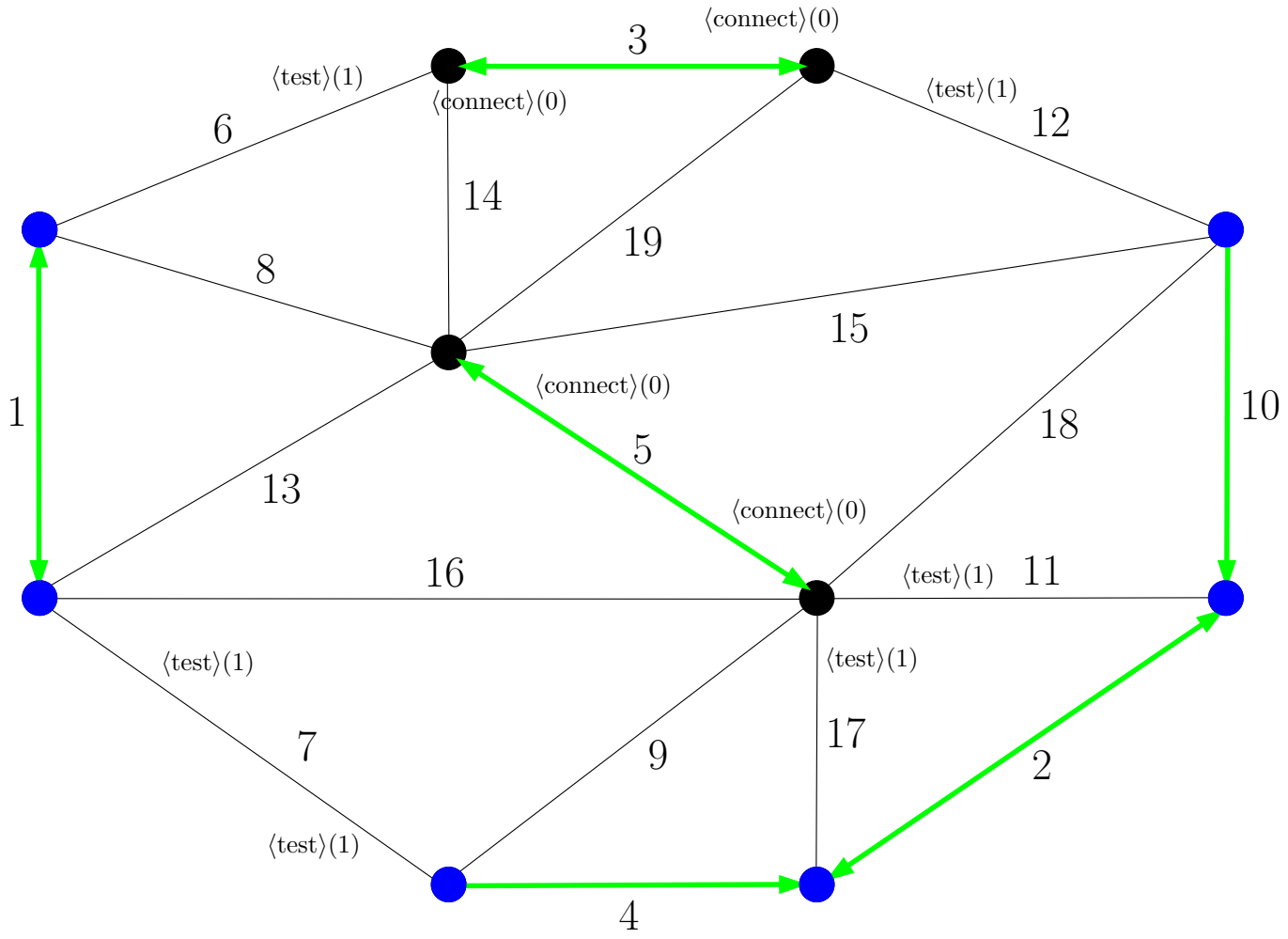

⟨connect⟩(0)
3
⟨connect⟩(0)
6
12
14
19
8
⟨connect⟩(0)
15
⟨connect⟩(0)
1
5
18
10
13
⟨connect⟩(0)
⟨connect⟩(0)
⟨connect⟩(0)
16
11
⟨connect⟩(0)
7
9
17
2
⟨connect⟩(0)
4
⟨connect⟩(0)

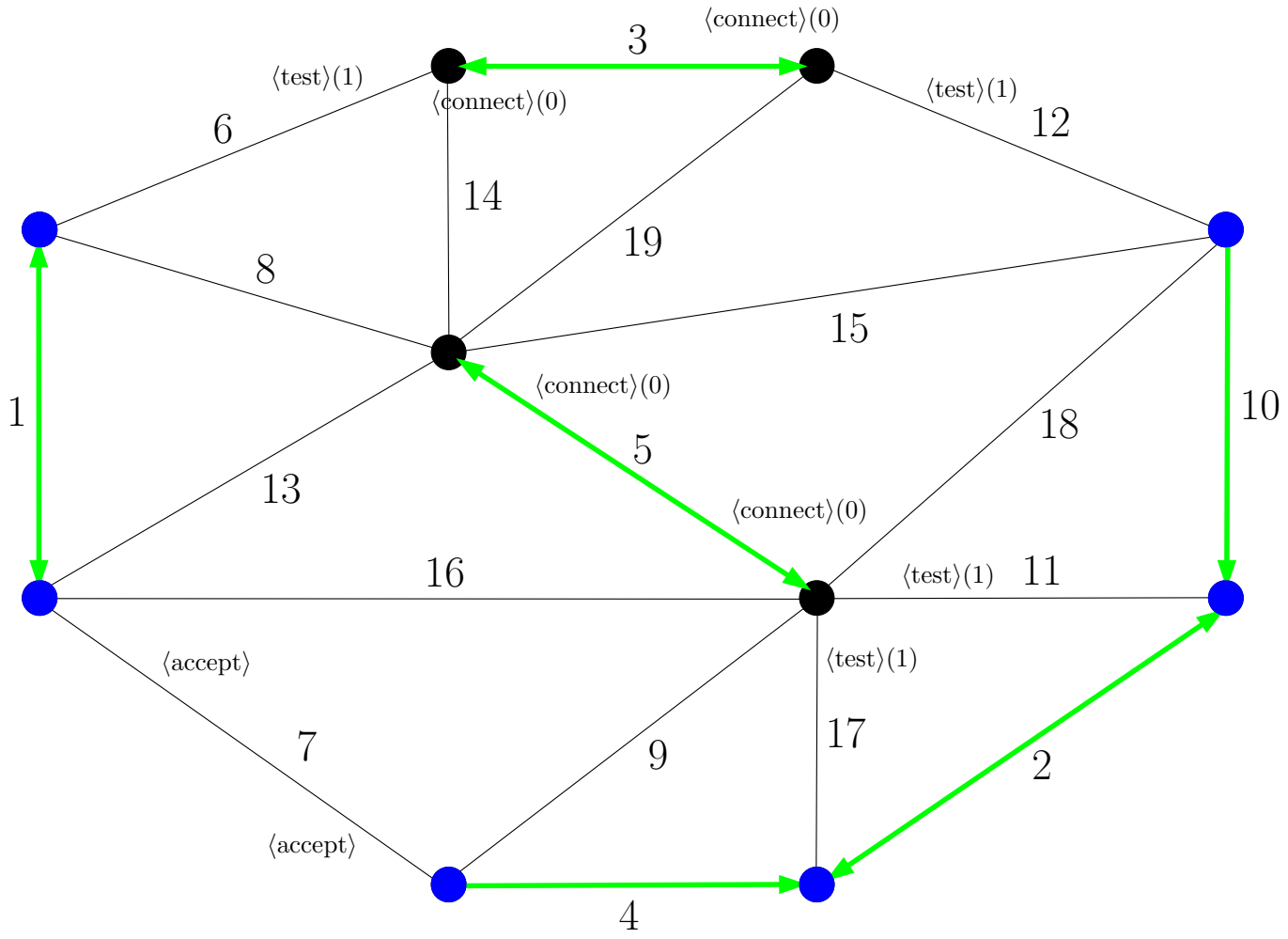

⟨connect⟩(0)
3
⟨connect⟩(0)
6
12
14
19
8
⟨init⟩(1, 1, Find)
15
⟨connect⟩(0)
1
5
18
10
13
⟨connect⟩(0)
⟨init⟩(1, 1, Find)
⟨connect⟩(0)
16
11
⟨connect⟩(0)
7
9
17
2
⟨connect⟩(0)
4
⟨connect⟩(0)

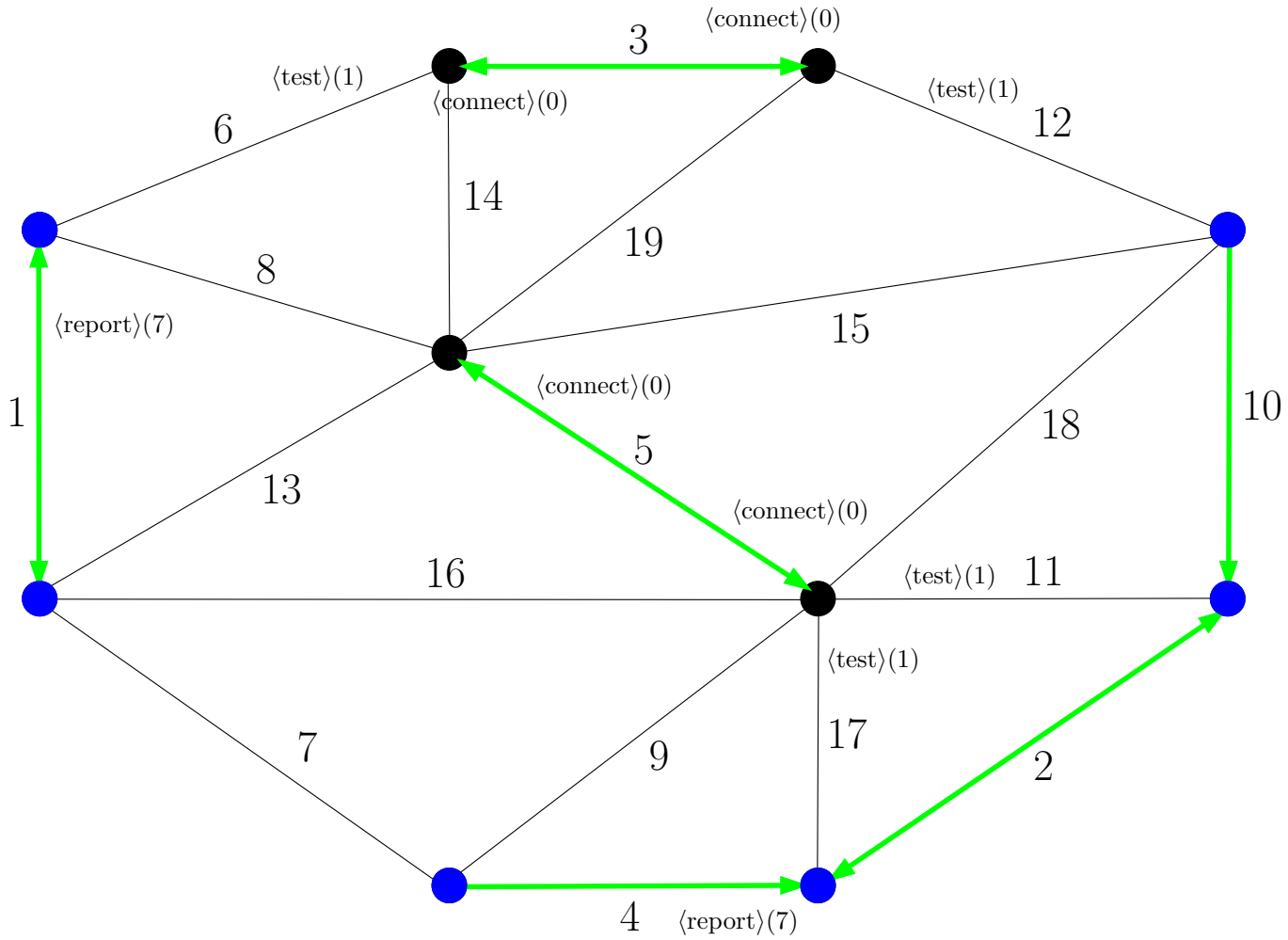

⟨connect⟩(0)
3
⟨test⟩(1)
⟨connect⟩(0)
6
12
14
19
8
15
⟨connect⟩(0)
1
10
18
5
13
⟨connect⟩(0)
⟨connect⟩(0)
16
11
⟨connect⟩(0)
7
9
17
2
⟨test⟩(1)
⟨connect⟩(0)
4
⟨connect⟩(0)

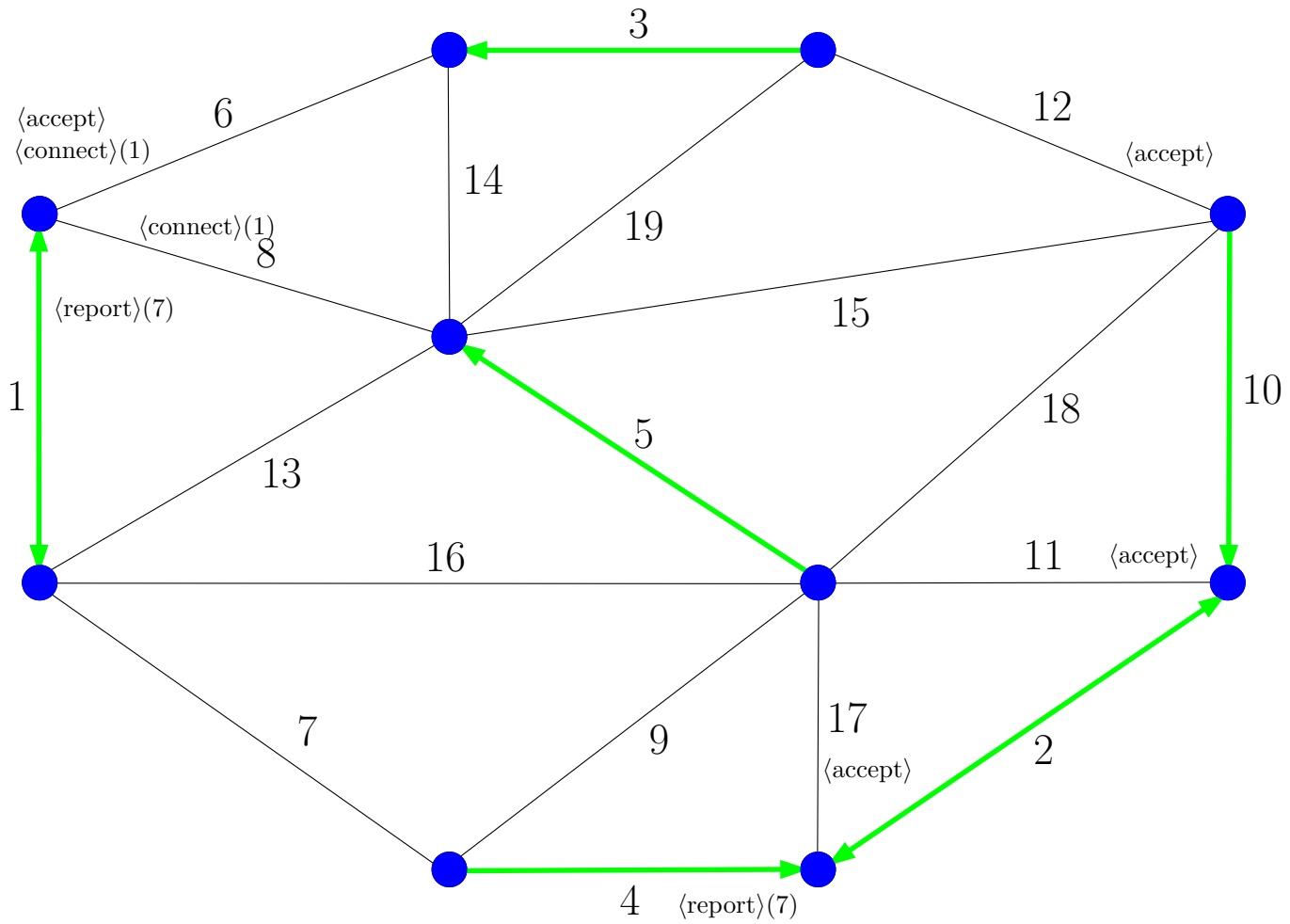

⟨connect⟩(0)
3
⟨test⟩(1)
⟨connect⟩(0)
6
12
14
19
8
15
⟨connect⟩(0)
1
10
18
5
13
⟨connect⟩(0)
⟨connect⟩(0)
16
11
⟨init⟩(1, 1, Find)
7
9
17
2
⟨test⟩(1)
⟨init⟩(1, 1, Find)
4
⟨connect⟩(0)

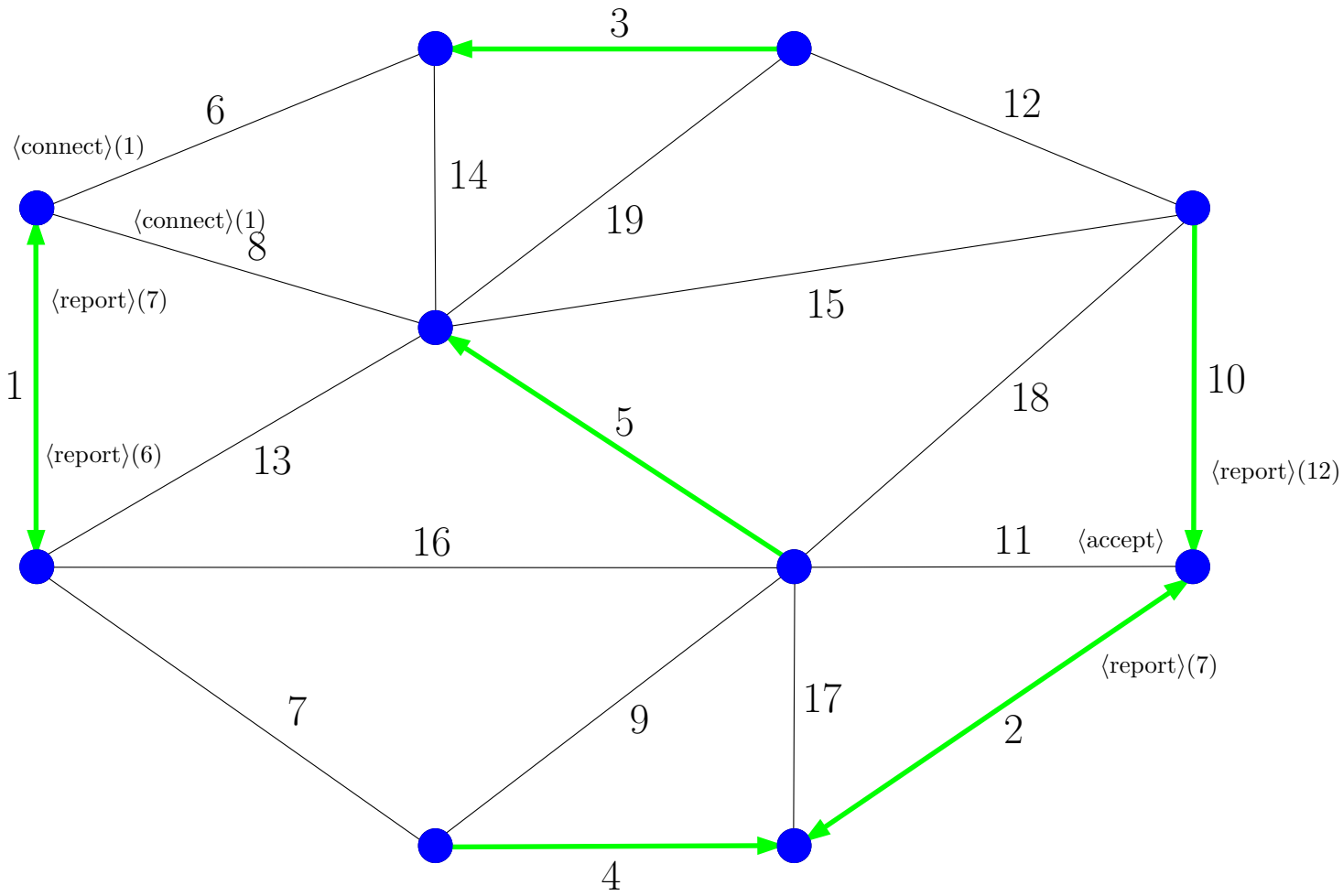

⟨connect⟩(0)
3
⟨test⟩(1)
⟨connect⟩(0)
6
12
14
19
8
⟨init⟩(1, 1, Find)
15
⟨connect⟩(0)
1
10
18
5
13
⟨connect⟩(0)
16
⟨test⟩(1)
11
⟨test⟩(1)
17
7
9
2
⟨test⟩(1)
⟨init⟩(1, 1, Find)
4

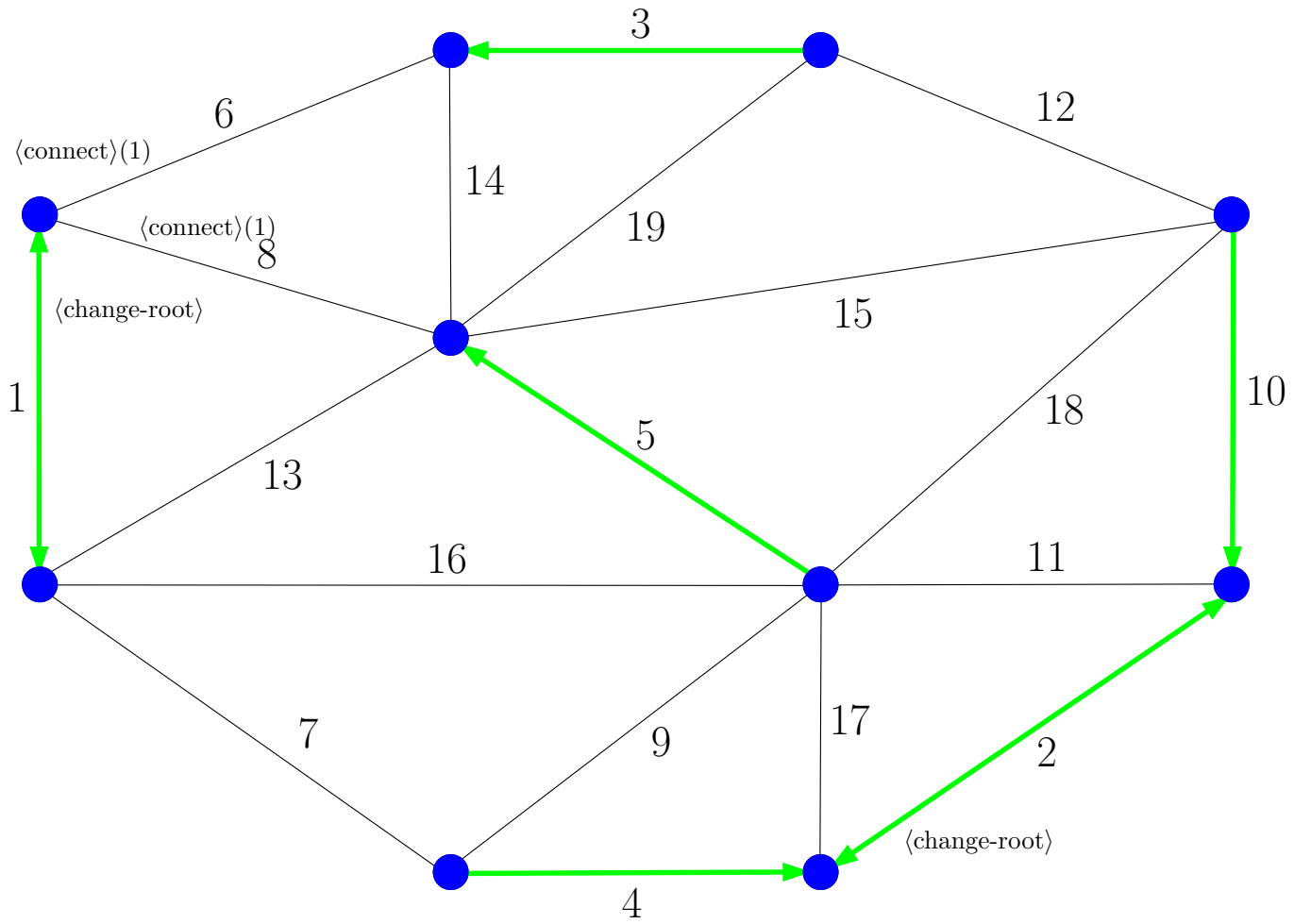

⟨connect⟩(0)
3
⟨test⟩(1)
⟨connect⟩(0)
⟨test⟩(1)
6
12
14
19
8
15
⟨connect⟩(0)
1
10
18
5
13
⟨connect⟩(0)
16
⟨test⟩(1)
11
⟨test⟩(1)
⟨test⟩(1)
7
9
17
2
⟨test⟩(1)
4

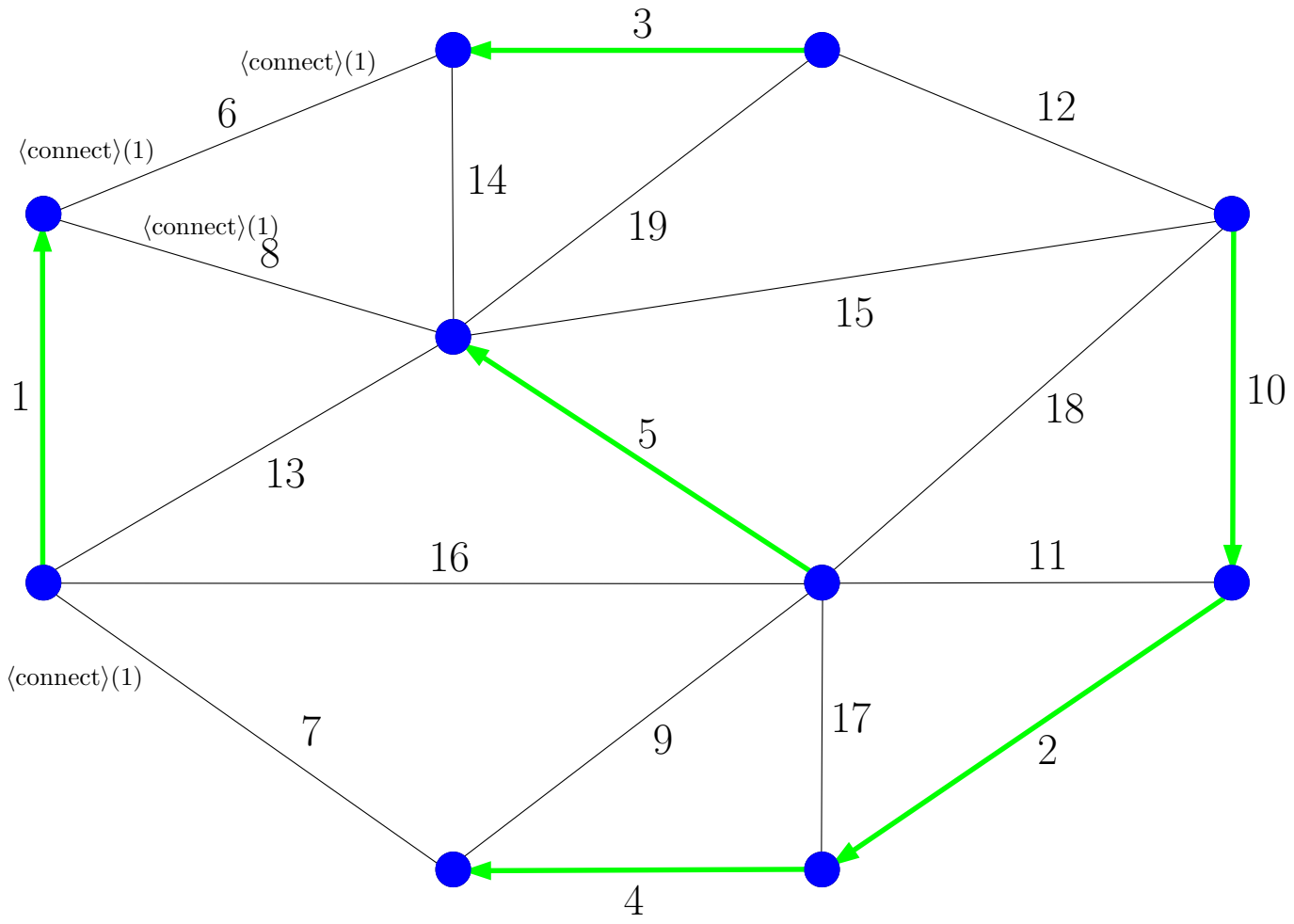

⟨connect⟩(0)
3
⟨test⟩(1)
⟨connect⟩(0)
⟨test⟩(1)
6
12
14
19
8
15
⟨connect⟩(0)
1
10
5
18
13
⟨connect⟩(0)
16
⟨test⟩(1)
11
⟨accept⟩
⟨test⟩(1)
7
9
17
2
⟨accept⟩
4

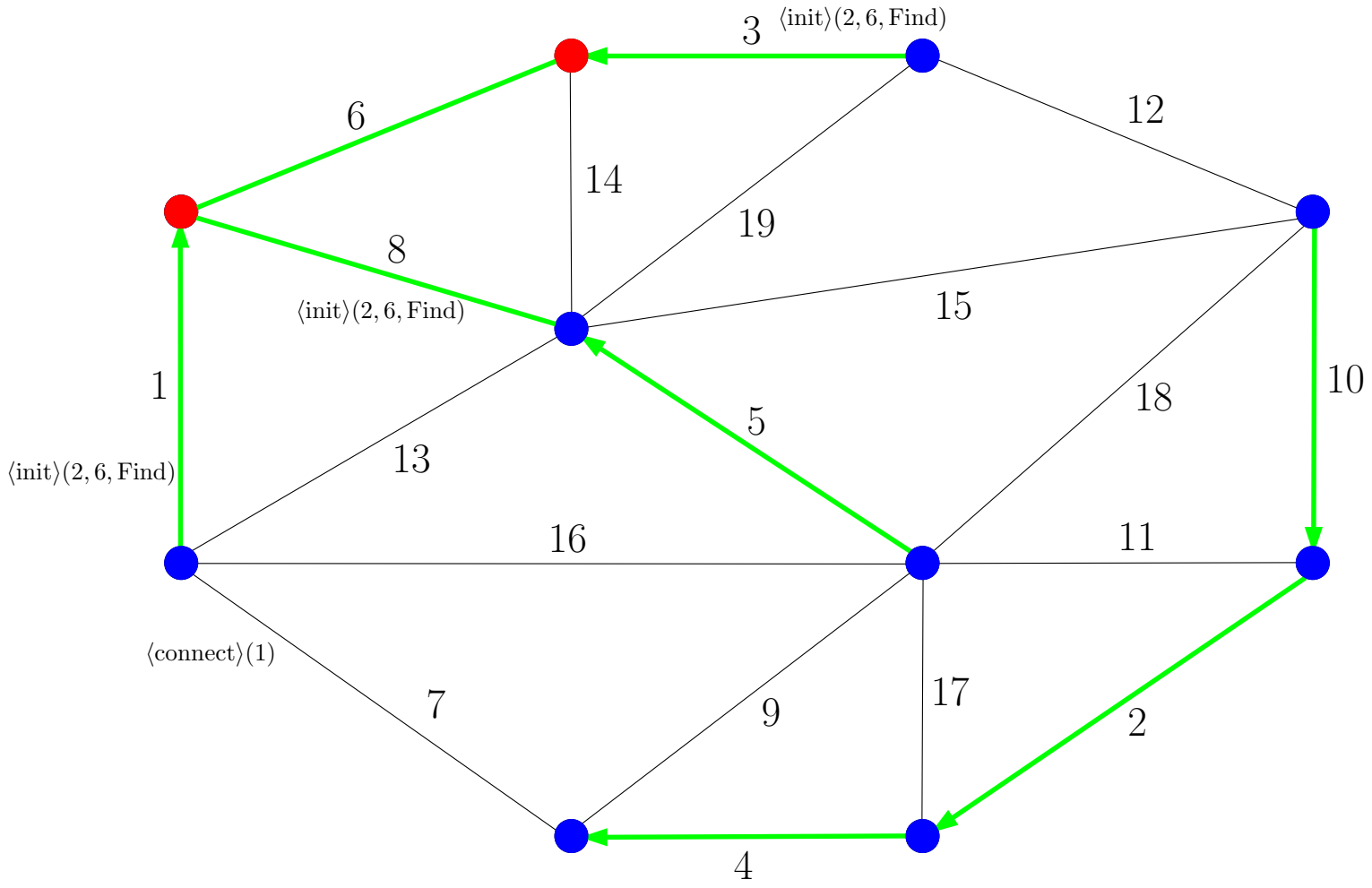

⟨connect⟩(0)
3
⟨test⟩(1)
⟨connect⟩(0)
⟨test⟩(1)
6
12
14
19
8
⟨report⟩(7)
15
⟨connect⟩(0)
1
10
5
18
13
⟨connect⟩(0)
16
⟨test⟩(1)
11
⟨test⟩(1)
17
7
9
2
4
⟨report⟩(7)

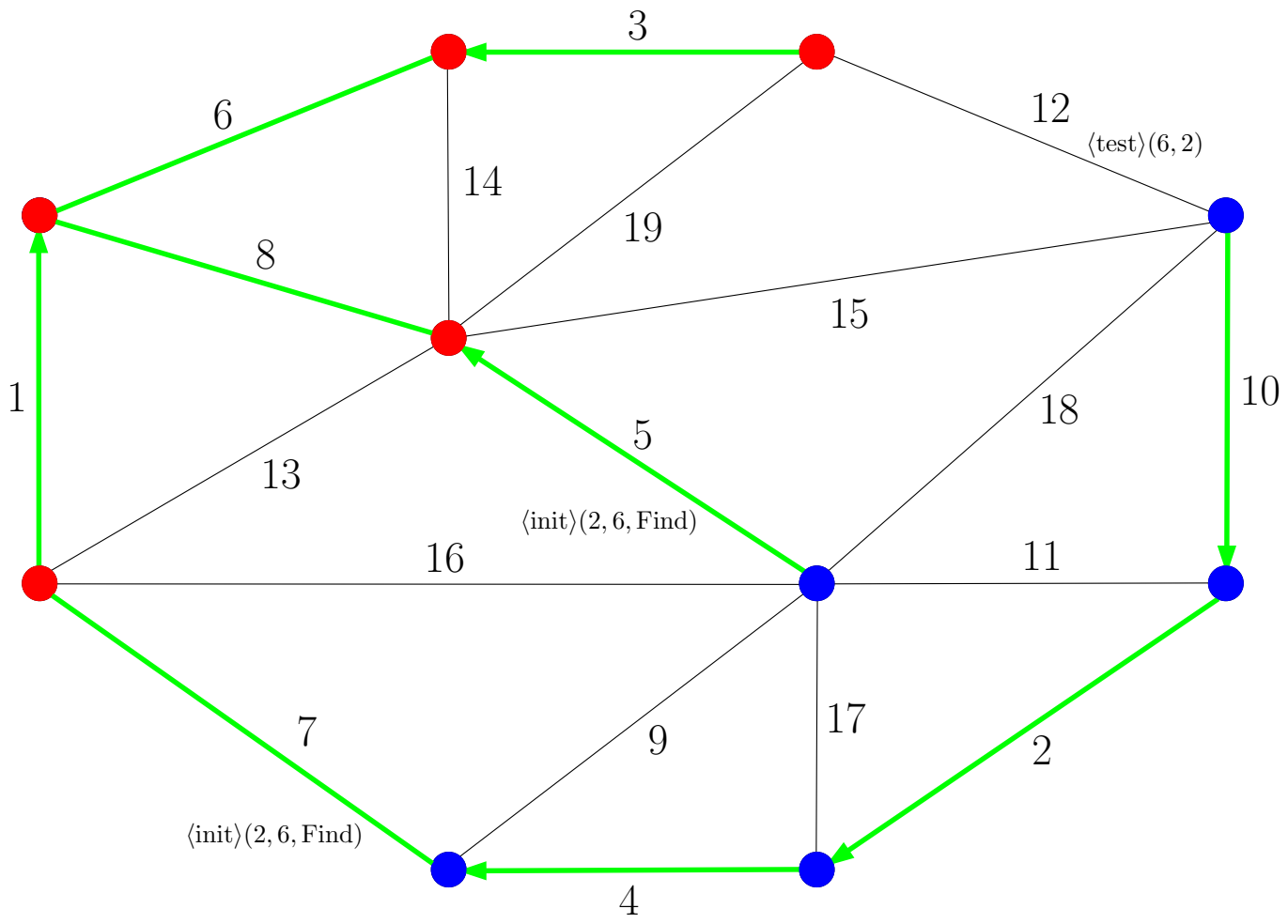

3
6
12
⟨accept⟩
⟨connect⟩(1)
14
⟨accept⟩
⟨connect⟩(1)
19
8
⟨report⟩(7)
15
1
10
5
18
13
16
11
⟨accept⟩
7
9
17
⟨accept⟩
2
4
⟨report⟩(7)

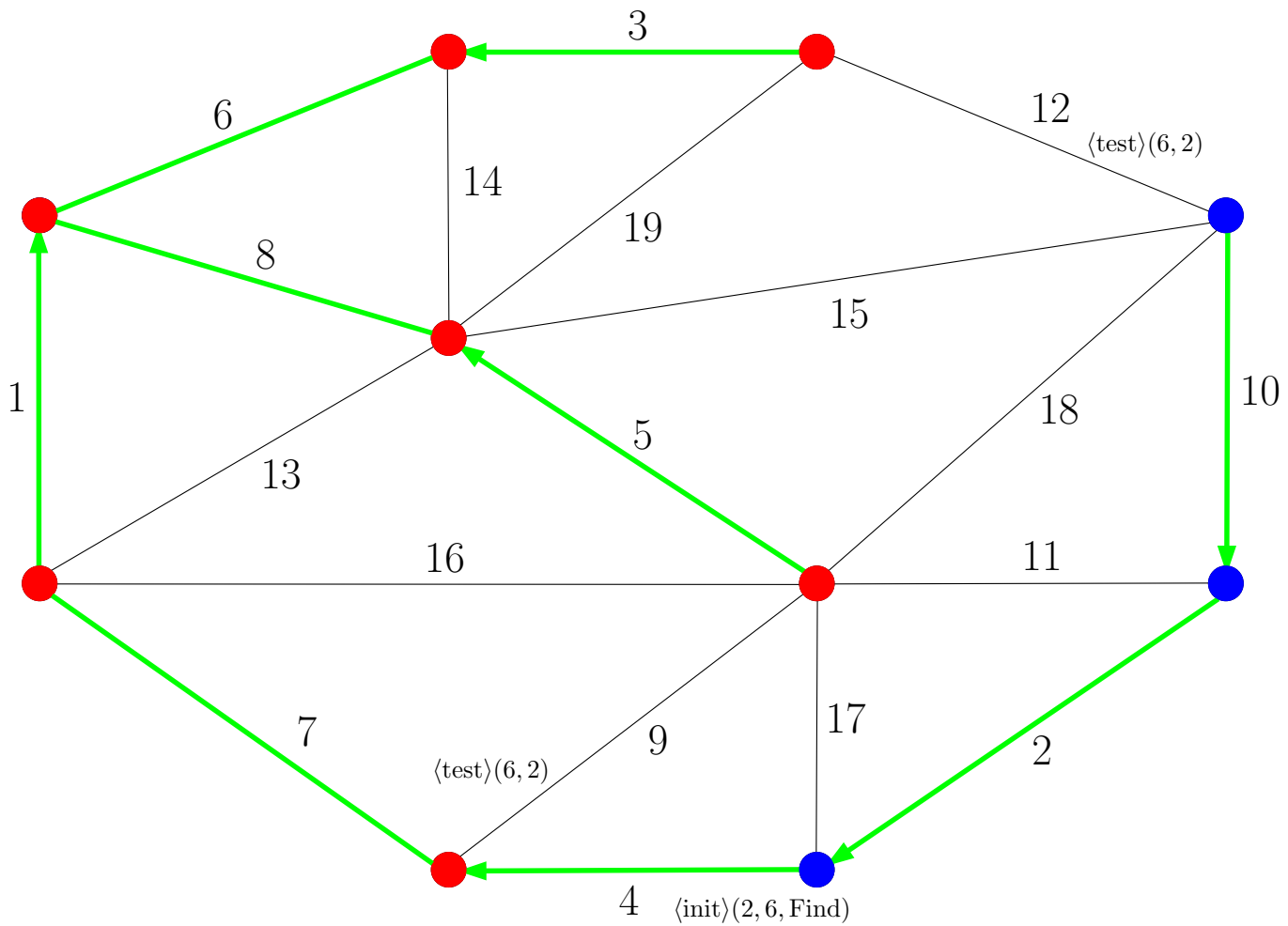

3
6
12
⟨connect⟩(1)
14
⟨connect⟩(1)
19
8
⟨report⟩(7)
15
1
10
18
5
⟨report⟩(6)
13
⟨report⟩(12)
16
11
⟨accept⟩
⟨report⟩(7)
7
9
17
2
4

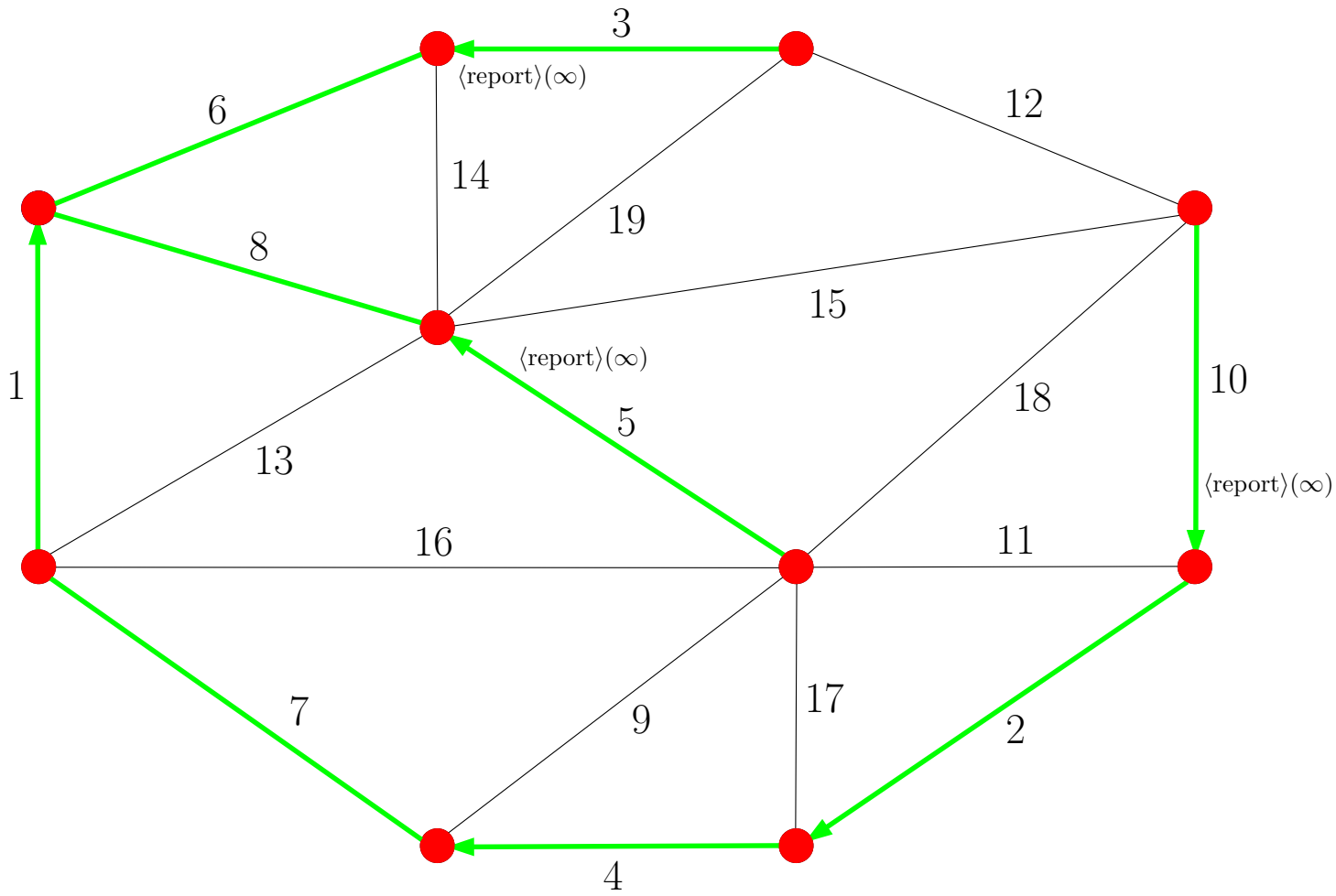

3
6
12
⟨connect⟩(1)
14
⟨connect⟩(1)
19
8
⟨change-root⟩
15
1
10
18
5
13
16
11
7
9
17
2
⟨change-root⟩
4

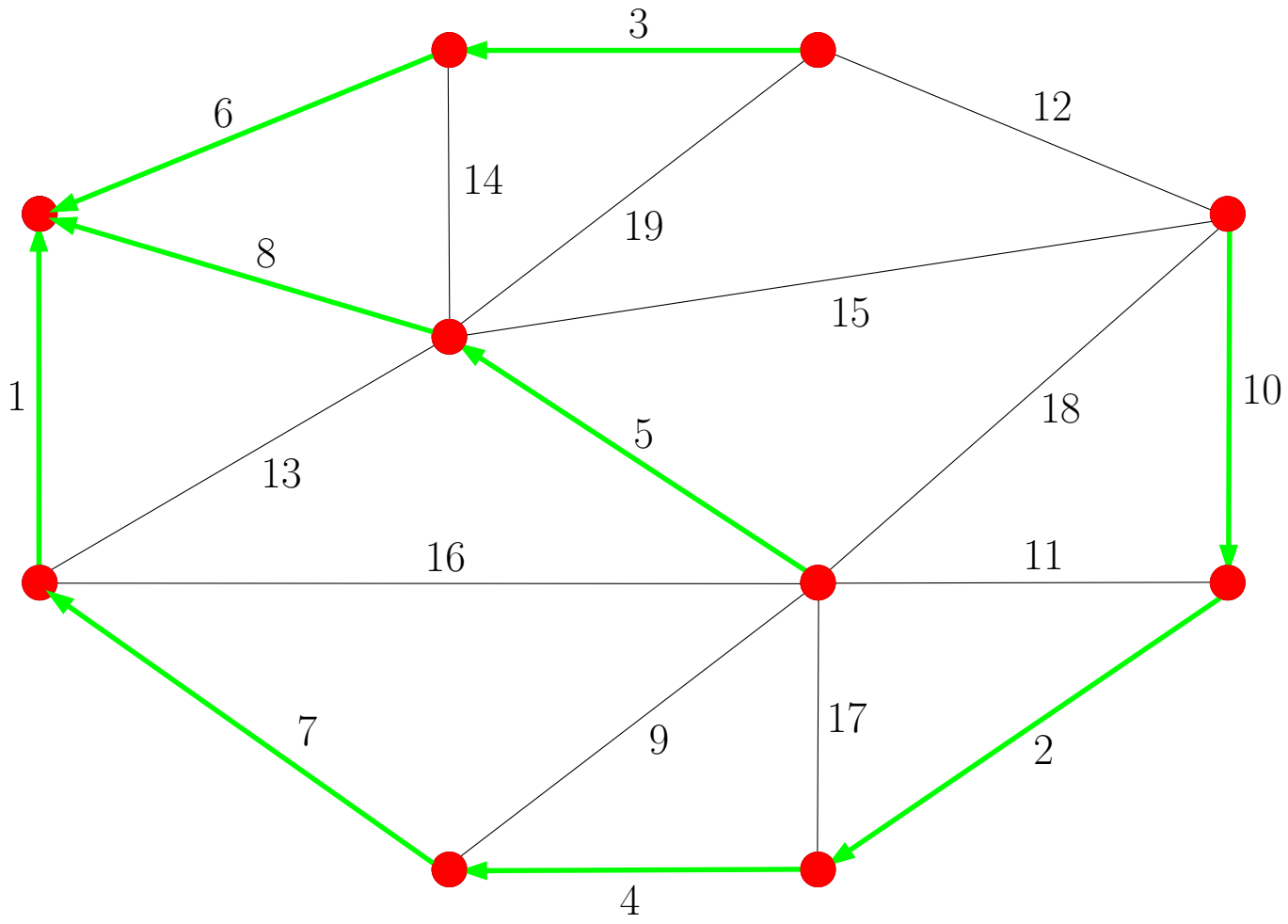

3
⟨connect⟩(1)
6
12
⟨connect⟩(1)
14
⟨connect⟩(1)
19
8
15
1
10
5
18
13
16
11
⟨connect⟩(1)
7
9
17
2
4


⟨init⟩(2, 6, Find)
3
6
12
14
19
8
⟨init⟩(2, 6, Find)
15
1
10
18
5
⟨init⟩(2, 6, Find)
13
16
11
⟨connect⟩(1)
7
9
17
2
4


3
6
12
⟨test⟩(6, 2)
14
19
8
15
1
10
18
5
13
⟨init⟩(2, 6, Find)
16
11
7
9
17
2
⟨init⟩(2, 6, Find)
4


3
6
12
⟨test⟩(6, 2)
14
19
8
15
1
10
18
5
13
16
11
7
9
17
2
⟨test⟩(6, 2)
4
⟨init⟩(2, 6, Find)


3
⟨report⟩(∞)
6
12
14
19
8
15
⟨report⟩(∞)
1
10
18
5
13
⟨report⟩(∞)
16
11
7
9
17
2
4


3
6
12
14
19
8
15
1
10
18
5
13
16
11
7
9
17
2
4

Korrektheit I

Lemma 13

Der verteilte MST-Algorithmus ist korrekt, d.h. der Algorithmus terminiert und die als $branch$ klassifizierten Kanten bilden einen MST.

Beweis.

- Die branch-Kanten bilden einen MST
  - Folgt aus Lemma 12, denn es werden nur minimal ausgehende Kanten aus Fragmenten des MST als branch markiert
- Wenn der Algorithmus terminiert:
  - Für ein Fragment wird keine ausgehende Kante gefunden
  - Dieses Fragment spannt den ganzen Graph auf

Korrektheit II

- Es gibt keine ,,Deadlocks”
  - Betrachte beliebigen Zeitpunkt vor Terminierung
  - Nichtleere Menge von Fragmenten, jeweils mit einer ausgehende Kante minimalen Gewichts
  - Sei F ein Fragment im niedrigsten Level mit kleinster ausgehenden Kante in diesem Level
  - Jede $\langle \text{test} \rangle$ Nachricht von F wird beantwortet oder weckt einen neuen Knoten auf
  - Jede $\langle \text{connect} \rangle$ Nachricht weckt einen neuen Knoten auf oder
    - Geht an Fragment höheren Levels $\Rightarrow$ F wird eingegliedert
    - Geht an Fragment F' gleichen Levels mit gleicher minimaler ausgehenden Kante $\Rightarrow$ F und F' verschmelzen

□

Nachrichtenkomplexität I

Lemma 13

Die Anzahl der Nachrichten im verteilten MST-Algorithmus ist $\mathcal{O}(m + n \log n)$.

Beweis.

- Ein Fragment in Level $L+1$ enthält immer zwei Fragmente in Level L
  - Level-L Fragmente enthalten mindestens 2^L Knoten
  - Der maximale Level ist durch $\log n$ beschränkt
- Eine Kante wird höchstens einmal als $\mathrm{rejected}$ markiert, dabei wird eine $\langle \mathrm{test} \rangle$ und eine $\langle \mathrm{reject} \rangle$ Nachricht verschickt: $2m$ Nachrichten

Nachrichtenkomplexität II

- In jedem Level ausser 0 und dem höchsten Level kann ein Knoten
  - je einmal $\langle \text{accept} \rangle$ und $\langle \text{init} \rangle$ erhalten,
  - je einmal $\langle \text{test} \rangle$ (erfolgreich) und $\langle \text{report} \rangle$ senden, und
  - einmal $\langle \text{change-core} \rangle$ oder $\langle \text{connect} \rangle$ senden.

  $5n(-1 + \log n)$ Nachrichten
- In Level 0 kann jeder Knoten einmal $\langle \text{init} \rangle$ empfangen und einmale $\langle \text{connect} \rangle$ senden, und im höchsten Level einmal $\langle \text{report} \rangle$ senden: $5n$ Nachrichten
- Insgesamt also höchstens $2m + 5n \log n$ Nachrichten

□

Untere Schranke Nachrichtenkomplexität I

Lemma 13

Die Anzahl der Nachrichten für einen verteilten, uniformen und asynchronen MST-Algorithmus ist $\Omega(m + n \log n)$. D.h. unser MST-Algorithmus ist optimal bzgl. Nachrichtenkomplexität.

Beweis.

- Über jede Kante muss eine Nachricht geschickt werden, denn sonst könnte sich ,,in der Mitte" dieser Kante ein Knoten befinden, der nicht gefunden würde
  - $\Omega(m)$ Nachrichten

Untere Schranke Nachrichtenkomplexität II

- Leader Election in Ringen benötigt $\Omega(n \log n)$ Nachrichten im asynchronen Fall (ohne Beweis; s. Kapitel ,,Verteilte Algorithmen")
  - Algorithmus für MST $\Rightarrow$ Algorithmus für Leader Election mit gleicher Laufzeit
  - $\Omega(n \log n)$ Nachrichten

□

Schlechte Zeitkomplexität

- Es gibt Beispiele, für die $\Omega(n^2)$ Zeiteinheiten notwendig sind
- Problem dabei
  - Nur ein Knoten wacht spontan auf
  - $\Omega(n^2)$ sequentielle Nachrichten
- Verbesserung des Algorithmus
  - Zu Beginn des Algorithmus ,,aufwecken" aller Knoten
  - Schicke $\langle \text{wake-up} \rangle$ über alle Kanten, auf denen noch keine solche Nachricht empfangen wurde
  - $\mathcal{O}(n)$ Zeiteinheiten, $\mathcal{O}(m)$ Nachrichten

Zeitkomplexität I

Lemma 13

Der verbesserte MST-Algorithmus („mit Aufwecken") terminiert nach spätestens $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeiteinheiten.

Beweis.

- Zeigen per Induktion: Nach $5ln - 3n$ Zeiteinheiten sind alle Knoten in Level l
- Induktionsanfang $l = 1$:
  - Nach n Zeiteinheiten sind alle Prozessoren aufgewacht
  - Jeder Prozessor hat dann eine $\langle \text{connect} \rangle$ Nachricht verschickt
  - Nach $2n$ Zeiteinheiten ist jeder Prozessor in Level 1 (Empfang oder Auslösen von $\langle \text{init} \rangle$)

Zeitkomplexität II

- Induktionsschritt
  - In Level l sendet jeder Knoten max. n $\langle \text{test} \rangle$ Nachrichten, die spätestens nach $2n$ Zeiteinheiten beantwortet sind
  - Weiter $3n$ Zeiteinheiten für
    - $\langle \text{report} \rangle$
    - $\langle \text{change-root} \rangle$ und $\langle \text{connect} \rangle$
    - $\langle \text{init} \rangle$
  - Danach, zum Zeitpunkt $5ln - 3n + 5n = 5(l+1)n - 3n$, sind alle Prozessoren in Level $l+1$

□

Bessere Zeitkomplexität

- Es gibt Beispiele, für die der verbesserte Algorithmus $\Omega(n \log n)$ Zeiteinheiten benötigt werden
- $\Omega(n)$ ist triviale untere Schranke
- Der beschriebene MST-Algorithmus kann weiter verbessert werden auf optimale Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(n)$

Aktuelle Forschung

- Bessere Algorithmen für spezielle Graphklassen
- Durchmesser

$$D(G) = \max_{u \in V} \max_{v \in V} d(u, v)$$

- Radius

$$R(G) = \min_{u \in V} \max_{v \in V} d(u, v)$$

- MST-Radius $\mu(G, W)$
- Zeitkomplexität in Abhängigkeit von D bzw. μ
  - $\mathcal{O}(D(G) + \sqrt{n} \log^* n)$
  - $\mathcal{O}(\mu(G, W) + \sqrt{n})$

PTAS für Dominating Sets
Literatur

- M. V. Marathe, H. Breu, H.B. Hunt III, S. S. Ravi, and D. J. Rosenkrantz: Simple Heuristics for Unit Disk Graphs. *Networks* 25, 59–68, 1995.

  `http://arxiv.org/pdf/math/9409226`

- T. Nieberg and J. L. Hurink: A PTAS for the minimum dominating set problem in unit disk graphs. Memorandum No. 1732, University of Twente. 2004.

  `http://www.math.utwente.nl/publicaties/2004/1732.pdf`

Dominating Set (DS)

Definition 13

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $W \subseteq V$. Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heisst W-Dominating Set g.d.w. für jeden Knoten $u \in W$ gilt, dass $u \in D$ oder es ein Kante $\{u, v\} \in E$ gibt mit $v \in D$. Im Fall $W = V$ heisst D Dominating Set von G.

Problem Minimum Dominating Set (MDS)

Problem MDS

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Ein Dominating Set D von G minimaler Kardinalität $|D|$

Entscheidungsproblem MDS

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Konstante K
Gesucht: Gibt es ein Dominating Set D von G mit Kardinalität $|D| \leq K$?

Dominating Sets in Sensornetzen

- Routing
  - Connected Dominating Set (s. Übung)
- Energiesparen
- Clustering
- Initialisationsphase

Komplexitätsstatus von MDS

- MDS ist $\mathcal{NP}$-vollständig
- Spezialfall des Problems Set Cover
- Bestmögliche Approximation:
  - Faktor $\mathcal{O}(\log \Delta)$ schlechter als optimale Lösung (Δ ist maximaler Knotengrad)
  - Einfacher Greedy-Algorithmus

Approximation von MDS

1. $D := \emptyset$
2. Solange es nicht dominierte Knoten gibt
3. Sei v ein nicht dominierter Knoten, der die meisten nicht dominierten Knoten abdeckt
4. $D := D \cup \{v\}$

Independent Set (IS)

Definition 14

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $I \subseteq V$ heisst Independent Set g.d.w. für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt, dass nicht beide Knoten u und v in I sind.

Maximal Independent Set

Problem Maximal Independent Set

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Ein inklusionsmaximales Independent Set I von G, d.h. es gibt keinen Knoten $v \in V \setminus I$ so dass $I \cup \{v\}$ ein Independent Set ist

- Maximal Independent Set ist in Linearzeit lösbar
  - Solange eine Knoten $v \in V \setminus I$ existiert, dessen Nachbarn alle nicht in I sind, füge v zu I hinzu

Maximum Independent Set

Problem Maximum Independent Set

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Ein kardinalitätsmaximals Independent Set I von G,
d.h. für alle Independent Sets I' gilt $|I| \geq |I'|$

- Maximum Independent Set ist $\mathcal{NP}$-vollständig
(I ist Independent Set $\Leftrightarrow V \setminus I$ ist Vertex Cover)

Zusammenhang Independent und Dominating Set

- Jedes kardinalitätsmaximale Independent Set ist ein inklusionsmaximales Independent Set
- Jedes inklusionsmaximale Independent Set ist ein Dominating Set
  - Sei V' ein inkusionsmaximales Independent Set in $G = (V, E)$
  - Annahme: V' ist kein Dominating Set. Dann existiert $u \in V \setminus V'$, so dass für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ gilt $v \notin V'$
  - $V' \cup \{v\}$ ist ein Independent Set, das V' echt enthält
  - Widerspruch zur Voraussetzung ,,V' inklusinsmaximal"
- Problem Minimum Independent Dominating Set

Unit Disk Graph (Wdh.)

Definition 15

Ein Graph $G = (V, E)$ heisst Unit Disk Graph (UDG) g.d.w. es eine Einbettung der Knoten in die Eben gibt, so dass $\{u, v\} \in E$ g.d.w. sich die Kreise um u und v mit Radius 1 schneiden.

Bemerkung

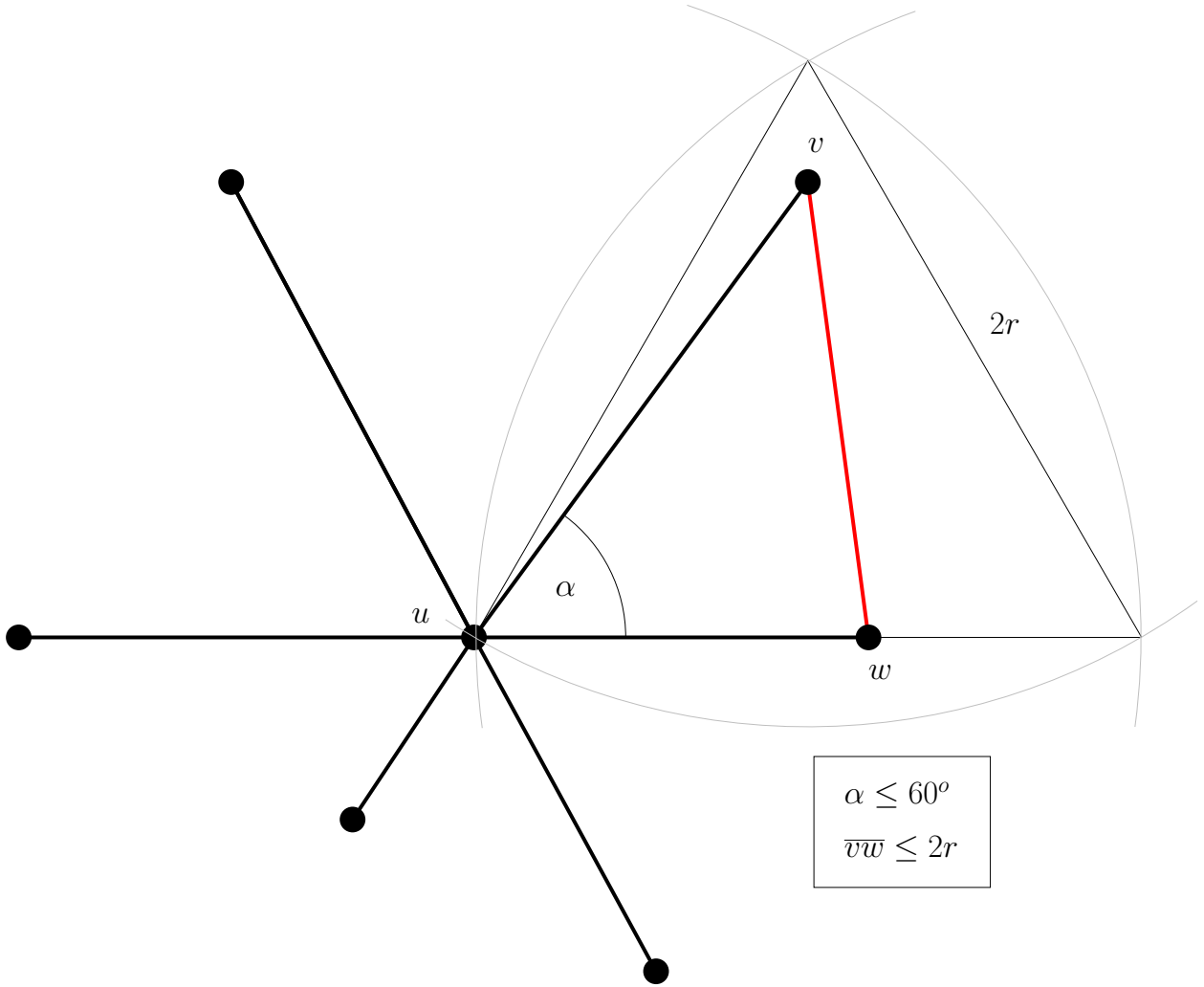
Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Unit Disk Graph g.d.w. es eine Einbettung der Knoten in die Ebene gibt, so dass $\{u, v\} \in E$ g.d.w. der euklidische Abstand zwischen u und v höchstens 1 ist.

Sternlemma

Lemma 16

Sei $G = (V, E)$ ein Unit Disk Graph. Dann enthält G keinen $K_{1,6}$ als knoteninduzierten Teilgraph.

Beweisskizze Sternlemma



Faktor-5 Approximation I

Satz 17

Sei $G = (V, E)$ ein Unit Disk Graph, D_{OPT} ein kardinalitätsminimales Dominating Set und I ein inklusionsmaximales Independent Set. Dann ist I ein Dominating Set mit $|I| \leq 5|D_{OPT}|$.

Bemerkung

Der Linearzeit-Algorithmus für Maximal Independent Set liefert also eine Faktor-5 Approximation für Dominating Set in Unit Disk Graphen in linearer Zeit.

Faktor-5 Approximation II

Beweis.

- Ein Knoten v in D_{OPT} dominiert höchstens 5 Knoten in I
  - Falls $v \in I$, so dominiert v keinen weiteren Knoten in I
  - Ansonsten angenommen v dominiert $v_1, \ldots, v_6 \in I$.
    Dann würde durch v und die v_i ein $K_{1,6}$ induziert (Knoten in I sind nicht durch Kanten verbunden), im Widerspruch zum obigen Lemma 16.
- Da D_{OPT} ganz V und somit auch ganz I dominiert, kann I höchstens 5-mal mehr Knoten enthalten als D_{OPT}.

□

Polynomiales Approximationsschema (PAS) (Polynomial Time Approximation Scheme, PTAS)

- Eingabe: Unit Disk Graph $G = (V, E)$ und eine Konstante ε
- Gesucht: Dominating Set $D \subseteq V$ mit $|D| \leq (1 + \varepsilon)|D_{OPT}|$
- Laufzeit des Algorithmus polynomial in $|G|$

Eigenschaften des PTAS

- Keine geometrische Einbettung als Unit Disk Graph gegeben
  - Es ist $\mathcal{NP}$-vollständig solch eine Einbettung zu konstruieren
  - Viele andere Algorithmen basieren darauf
- Algorithmus ist robust, d.h. in polynomialer Zeit wird entweder eine Lösung berechnet oder ein Nachweis, dass G kein Unit Disk Graph ist

Nachbarschaft I

Definition 18

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $v \in V$ ein Knoten und $W \subseteq V$ eine Teilmenge aller Knoten.

- $N(v) := \{u \in V | \{u, v\} \in E\} \cup \{v\}$ ist die abgeschlossene Nachbarschaft von v
- $N(W) := \bigcup_{u \in W} N(u)$ bezeichnet die abgeschlossene Nachbarschaft von W
- $N^r(v) := N(N^{r-1}(v))$ definiert rekursiv die r-Nachbarschaft von v, wobei $N^1(v) := N(v)$

Nachbarschaft II

Definition 19

Der graphentheoretische Abstand $d(v, w)$ zweier Knoten $v, w \in V$ ist die minimale Anzahl der Kanten auf einem v-w-Weg.

Bemerkung

- $D \subseteq V$ ist ein Dominating Set g.d.w. $N(D) = V$.
- $N^r(v)$ enthält alle Knoten w mit $d(v, w) \leq r$.

2-Separation I

Definition 20

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $\mathcal{S} := \{S_1, \ldots, S_k\}$ mit $S_i \subseteq V$ $(1 \leq i \leq k)$ heisst 2-Separation g.d.w. für je zwei Knoten $s \in S_i$ und $\overline{s} \in S_j$ mit $i \neq j$ gilt, dass $d(s, \overline{s}) > 2$.

2-Separation II

Lemma 21

Sei $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ eine 2-Separation, D_{OPT} ein Dominating Set minimaler Kardinalität von G, und $D(S_i)$ seien S_i-Dominating Sets minimaler Kardinalität in G. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k} |D(S_i)| \leq |D_{OPT}|.$$

2-Separation III

Beweis.

- Da $\mathcal{S}$ 2-Separation sind die $N(S_i)$ paarweise disjunkt
- $D_{OPT} \cap N(S_i)$ ist S_i-Dominating Set
- $D(S_i)$ ist kardinalitätsminimales S_i-Dominating Set, also $|D(S_i)| \leq |D_{OPT} \cap N(S_i)|$
- Somit folgt

$$\sum_{i=1}^{k} |D(S_i)| \leq \sum_{i=1}^{k} |D_{OPT} \cap N(S_i)| \leq |D_{OPT}|$$

□

Algorithmus

1. $X := V$, $D := \emptyset$
2. Solange X nicht leer sei $v \in X$
3. $\quad r := 0$
4. $\quad$ Solange $|D\left(N^{r+2}(v)\right)| > (1+\varepsilon)|D(N^r(v))|$
5. $\quad\quad r := r + 1$
6. $\quad X := X \setminus N^{r+2}(v)$, $D := D \cup D\left(N^{r+2}(v)\right)$

Bemerkungen

- $D(W)$ bezeichnet ein kardinalitätsminimales W-Dominating Set in G (Enumeration aller möglichen Lösungen)
- $N^r(v)$ bezeichnet Nachbarschaft im von X induzierten Graph

Bezeichnungen

- Betrachte Schritt i der Hauptschleife (2)
- v_i und X_i sind das v bzw. X aus Schritt i
- r_i bezeichne das maximale r in Schritt i
- $N_i^{+2} := N_{X_i}^{r+2}(v_i)$ die Knoten, die in Schritt i entfernt werden
- $N_i := N_{X_i}^{r}(v_i)$
- k sei die Anzahl der Schritte in der Hauptschleife

Korrektheit I

Lemma 22

Nach Ausführung des Algorithmus gilt

$$\bigcup_{i=1}^{k} N_i^{+2} = V$$

und $\mathcal{N} := \{N_1, \ldots, N_k\}$ *ist eine 2-Separation in* G.

Korrektheit II

Satz 23

Die Knotenmenge $D := \bigcup_{i=1}^{k} D(N_i^{+2})$ *ist ein Dominating Set von* G*, wobei* $|D| \leq (1+\varepsilon)|D_{OPT}|$.

Bemerkung

Dieser Satz gilt für beliebige ungerichtete Graphen.

Korrektheit III

Beweis.

D ist Dominating Set von G weil mit obigem Lemma 22 jeder Knoten von G in einem N_i^{+2} enthalten ist und somit von einem Knoten in D dominiert wird. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
|D| &= \left|\bigcup_{i=1}^{k} D(N_i^{+2})\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |D(N_i^{+2})| \\
&\leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{k} |D(N_i)| && \text{[Def. Algorithmus]} \\
&\leq (1+\varepsilon) D_{OPT} && \text{[Lemma 21 und 22]}
\end{aligned}
$$

□

Intermezzo: Independent Set in UDG

Lemma 24

Sei $G = (V, E)$ ein Unit Disk Graph, $v \in V$, und $I^r \subseteq N^r(v)$ ein Independent Set. Dann gilt

$$|I^r| \leq (2r+1)^2 \in \mathcal{O}(r^2).$$

Beweis.

- Betrachte korrekte Einbettung des UDG
- Die Knoten in I^r sind nicht durch Kanten verbunden
- Einheitskreise mit Fläche π um die Knoten in I^r sind disjunkt
- All diese Kreise sind in Kreis um v mit Radius $2r+1$ enthalten
- $|I^r| \leq \pi(2r+1)^2/\pi = (2r+1)^2$

□

Laufzeit

Satz 25

Sei G ein Unit Disk Graph und $\varepsilon > 0$ eine Konstante. Dann ist die Laufzeit des Algorithmus polynomial in der Anzahl der Knoten n.

Beweis Laufzeit I

Beweis.

- Betrachte den Schleifendurchlauf mit größten Wert von r
  - Gesamtlaufzeit wird dadurch dominiert
- Es gilt $|D(N^r(v))| \leq (2r+1)^2$
  - Nach Lemma 24 hat ein beliebiges kardinalitätsmaximales Independent Set I^r höchstens $(2r+1)^2$ Knoten
  - I^r ist auch ein Dominating Set
  - Ein kardinalitätsminimales Dominating Set hat also höchstens $(2r+1)^2$ Knoten
- Berechnung von $D(N^r(v)$ durch Enumeration
  - Es gibt $\mathcal{O}(n^\alpha)$ viele Kandidaten, wobei $\alpha \in \mathcal{O}(r^2)$

Beweis Laufzeit II

- r ist beschränkt durch eine Konstante c abhängig nur von ε
  - O.B.d.A. sei r gerade (sonst endet folgende Ungl. bei $N^1(v)$)
  - Es gilt nach Konstruktion des Algorithmus:

$$\begin{aligned}(2r+1)^2 &\geq |D(N^r(v))| > (1+\varepsilon)|D(N^{r-2}(v))| > \dots \\ &> (1+\varepsilon)^{r/2}|D(N^0(v)| \\ &= \left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^r\end{aligned}$$

  - $\left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^r$ wächst asymptotisch schneller als $(2r+1)^2$
  - Obige Ungleichung kann also nur für $r \leq c$ gelten, wobei c nur von ε abhängt
- Gesamtlaufzeit ist polynomial in n ($\mathcal{O}(n^{c^2})$ mit $c \in \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon^2}\log\frac{1}{\varepsilon})$)

Robustheit

- Algorithmus bricht ab falls kein $N^r(v)$-Dominating Set der Größe $(2r+1)^2$ gefunden wird
- Kontruiere dann ein maximales Independent Set I^r von $N^r(v)$
  - $|I^r| > (2r+1)^2$
  - Nachweis, dass der Graph kein Unit Disk Graph ist
- Falls der Graph kein Unit Disk Graph ist wird
  - entweder ein Dominating Set D mit $|D| \leq (1+\varepsilon)D_{OPT}$ geliefert
  - oder ein Nachweis geliefert, dass der kein Unit Disk Graph ist,
  - in polynomialer Laufzeit in der Größe des Graphen.

Verteilter Algorithmus für Dominating Set
Literatur

- F. Kuhn und R. Wattenhofer: Constant-Time Distributed Dominating Set Approximation. *Proceedings 22nd ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, Boston, Massachusetts, USA, Juli 2003.

  `http://dcg.ethz.ch/members/pascal/refs/ds_2003_kuhn.pdf`

Notation

- Graph $G = (V, E)$, Knotenanzahl $n = |V|$
- Knoten $V = \{1, \ldots, n\}$
- Matrizen: A, N, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Vektoren: x, y, b, $c \in \mathbb{R}^n$
- Knotengrad: δ_i
- Maximaler Knotengrad in r-Nachbarschaft:

$$\delta_i^{(r)} := \max\{\delta_j | j \in N^r(i)\}$$

Mathematische Modellierung

- Modelliere Teilmenge $D \in V$
  - Pro Knoten $i \in V$ eine Variable $x_i \in \{0, 1\}$
  - $x_i = 1$ g.d.w. $i \in D$
- Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$
  - A ist $n \times n$ Matrix
  - $A_{ij} = 1$ g.d.w. $\{i, j\} \in E$
- Nachbarschaftsmatrix $N := A + I$
  - I ist die $n \times n$ Einheitsmatrix
  - $N_{ij} = 1$ g.d.w. $j \in N(i)$
- $D \subseteq V$ ist Dominating Set g.d.w. $N \cdot x \geq 1$

ILP für Dominating Set (Integer Linear Program)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ N \cdot x \quad & \geq \quad 1^n \\ x \quad & \in \quad \{0,1\}^n \end{aligned}$$

Relaxierung: LP (Linear Program)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ N \cdot x \quad & \geq \quad 1^n \\ x \quad & \geq \quad 0^n \end{aligned}$$

Duales LP

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ N \cdot y &\leq 1^n \\ y &\geq 0^n \end{aligned}$$

Dualitätssatz

Satz 26

Sei $\min \sum_{i=0}^{n} x_i$ *die Zielfunktion eines LP und* $\max \sum_{i=0}^{n} y_i$ *die Zielfunktion des dualen LP. Dann gilt für zulässige Lösungen* x' *und* y'

$$\sum_{i=0}^{n} y'_i \leq \sum_{i=0}^{n} x'_i.$$

(ohne Beweis)

Untere Schranke I

Lemma 27

Sei $\delta_i^{(1)}$ das Maximum aller Knotengrade in $N(i)$. Für ein Dominating Set D gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_i^{(1)} + 1} \leq |D|.$$

Untere Schranke II

Beweis.

- Ein Dominating Set D liefert eine zulässige LP-Lösung x
- Setze $y_i := 1/(\delta_i^{(1)} + 1)$
- y ist zulässige Lösung für das duale LP

$$\begin{aligned}(N \cdot y)_i &= \sum_{j \in N(i)} y_i \leq \sum_{j \in N(i)} \frac{1}{\delta_i + 1} \\ &= (\delta_i + 1)\frac{1}{\delta_i + 1} = 1\end{aligned}$$

- Mit dem Dualitätssatz gilt

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = |D|$$

□

Algorithmus Runden

Gegeben: α-Approximation $x^{(\alpha)}$ für Relaxierung
Gesucht: Dominating Set D über Variablen x_D

1. berechne $\delta_i^{(2)}$
2. $p_i := \min\left\{1, x_i^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(2)} + 1)\right\}$
3. $x_{D,i} := \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
4. sende $x_{D,i}$ an alle Nachbarn
5. falls $x_{D,j} = 0$ für alle $j \in N(i)$
6. $\quad x_{D,i} := 1$

Erwartungswert Runden

Satz 28

Sei Δ der Maximalgrad in G, und $x^{(\alpha)}$ eine α-Approximation für das LP. Dann ist x_D eine zulässige ILP-Lösung und der Erwartungswert der Größe des Dominating Set D ist

$$E[|D|] \leq (1 + \alpha \ln(\Delta + 1))|D_{OPT}|.$$

Beweis Erwartungswert I

Beweis

- Für eine optimale Lösung x^* des LP gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq |D_{OPT}|$.
- Für die Anzahl X der in Schritt 3 ausgewählten Knoten gilt:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{n} p_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(2)} + 1) \\ &\leq \ln(\Delta + 1) \sum_{i=1}^{n} x_i^{(\alpha)} \leq \alpha \ln(\Delta + 1) \sum_{i=1}^{n} x_i^* \\ &\leq \alpha \ln(\Delta + 1) |D_{OPT}|. \end{aligned}$$

Beweis Erwartungswert II

- Sei q_i die Wahrscheinlichkeit, dass kein Knoten in $N(i)$ in Schritt 3 ausgewählt wurde: $q_i = \prod_{j \in N(i)} (1 - p_i)$
- Falls ein $j \in N(i)$ existiert mit $p_j = 1$ so ist $q_i = 0$.
- Im Folgenden betrachte nur i mit $p_j < 1$ für alle $j \in N(i)$.
- Für $j \in N(i)$ gilt $\delta_i^{(1)} \leq \delta_j^{(2)}$
- Also gilt für alle $j \in N(i)$:

$$0 < 1 - p_j = 1 - x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_j^{(2)} + 1) \leq 1 - x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(1)} + 1)$$

Zwei Ungleichungen

Für eine endliche Menge von positiven reellen Zahlen $\mathcal{A}$ gilt

$$\prod_{x \in \mathcal{A}} x \leq \left(\frac{\sum_{x \in \mathcal{A}} x}{|\mathcal{A}|} \right)^{|\mathcal{A}|}$$

und für $1 \leq x \leq n$ gilt

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$

Beweis Erwartungswert III

$$
\begin{aligned}
q_i &= \prod_{j \in N(i)} (1 - p_j) \leq \prod_{j \in N(i)} \left(1 - x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(1)} + 1)\right) \\
&\leq \left(1 - \frac{\sum_{j \in N(i)} x_j^{(\alpha)} \ln(\delta_i^{(1)} + 1)}{\delta_i + 1}\right)^{\delta_i + 1} \\
&\leq \left(1 - \frac{\ln(\delta_i^{(1)} + 1)}{\delta_i^{(1)} + 1}\right)^{\delta_i^{(1)} + 1} \leq e^{-\ln(\delta_i^{(1)} + 1)} \\
&= \frac{1}{\delta_i^{(1)} + 1}
\end{aligned}
$$

Beweis Erwartungswert IV

- Für die Anzahl Y der in Schritt 6 ausgewählten Knoten gilt mit Lemma 27:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} q_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta_i^{(1)} + 1} \leq |D_{OPT}|$$

- Insgesamt ergibt sich

$$E[|D|] = E[X] + E[Y] \leq (1 + \alpha \ln(\Delta + 1))|D_{OPT}|$$

- x_D ist zulässig: in Schritt 6 wird für alle noch nicht dominierten Knoten $x_{D,i} := 1$ gesetzt $\square$

Algorithmus LP

Gegeben: Δ, k Gesucht: zulässige LP-Lösung x

1. $x_i := 0, \text{farbe}_i := \text{weiss}$
2. für $l := k-1$ bis 0
3. für $m := k-1$ bis 0
4. sende farbe_i an alle Nachbarn
5. $\tilde{\delta}(i) := |\{j \in N(i) \mid \text{farbe}_j = \text{weiss}\}|$
6. falls $\tilde{\delta}(i) \geq (\Delta+1)^{l/k}$
7. $x_i := \max\left\{x_i, \frac{1}{(\Delta+1)^{m/k}}\right\}$
8. sende x_i an alle Nachbarn
9. falls $\sum_{j \in N(i)} x_j \geq 1$ setze $\text{farbe}_i := \text{grau}$

Invariante 1

Lemma 29

Am Anfang jeden Durchlaufs der äußeren Schleife gilt

$$\tilde{\delta}(i) \leq (\Delta + 1)^{(l+1)/k}.$$

Beweis.

- Für $l = k - 1$ folgt $\tilde{\delta}(i) \leq \Delta + 1$ nach Definition von Δ
- Ansonsten: Sei i Knoten mit $\tilde{\delta}(i) > (\Delta + 1)^{(l+1)/k}$
  - Am Ende der vorigen Iteration $l + 1$ wurde $x_i := 1$ gesetzt
  - Alle Knoten in $N(i)$ wurden grau markiert
  - Also $\tilde{\delta}(i) = 0$

□

Aktive Knoten

Definition 30

Knoten mit $\tilde{\delta}(i) \geq (\Delta + 1)^{l/k}$ heissen aktiv.

Für weisse Knoten wird die Anzahl aktiver Knoten in $N(i)$ mit $a(i)$ bezeichnet. Für graue Knoten ist $a(i) = 0$.

Invariante 2

Lemma 31

Am Anfang jeden Durchlaufs der inneren Schleife gilt

$$a(i) \leq (\Delta + 1)^{(m+1)/k}.$$

Beweis.

- Für $m = k - 1$ folgt $a(i) \leq \Delta + 1$ nach Definition von Δ.
- Ansonsten: Sei i Knoten mit $a(i) > (\Delta + 1)^{(m+1)/k}$
  - Am Ende der vorigen Iteration $m + 1$ gilt für aktive Knoten $x_j \geq 1/(\Delta + 1)^{(m+1)/k}$
  - Die Summe der x-Werte in $N(i)$ ist größer als 1
  - i wurde demnach grau markiert, und $a(i) = 0$ □

Erhöhung in innerer Schleife

- Variable z_i pro Knoten
- $z_i := 0$ vor Beginn der inneren Schleife
- Bei Erhöhung von x_i um d
  - Verteile d auf die z_j für alle *weissen* $j \in N(i)$
- Es gilt also

$$\sum_{i \in V} z_i = \sum_{i \in V} x_i$$

Invariante 3

Lemma 32

Am Ende jeden Durchlaufs der äußeren Schleife gilt

$$z_i \leq \frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{l-1}{k}}}.$$

Invariante 3 - Beweis I

Beweis.

- Für Knoten i kann z_i nur erhöht werden solange i weiss ist
- Phase I:
  - Alle Iterationen bei denen i weiss bleibt
  - Es gilt stets $\sum_{j \in N(i)} x_j < 1$
  - Erhöhungen der x-Variablen werden auf $(\Delta + 1)^{l/k}$ z-Variablen aufgeteilt, also

$$z_i \leq \frac{\sum_{j \in N(i)} x_j}{(\Delta + 1)^{l/k}} < \frac{1}{(\Delta + 1)^{l/k}}$$

  nach Phase I

Invariante 3 - Beweis II

- Phase II: Die Iteration bei der i grau wird
  - Aktive Knoten $j \in N(i)$ waren schon in voriger Iteration aktiv, und $x_j \geq 1/(\Delta+1)^{(m+1)/k}$
  - x_j wird nun auf $1/(\Delta+1)^{m/k}$ erhöht
  - Die Differenz wird auf mindestens $(\Delta+1)^{l/k}$ z-Variablen verteilt
  - Die Anzahl aktiver Knoten in $N(i)$ ist $a(i)$, somit erhöht sich z_i um höchstens

$$\frac{\frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{m}{k}}} - \frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{m+1}{k}}}}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}} a(i) \leq \frac{(\Delta+1)^{\frac{1}{k}} - 1}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}}$$

Invariante 3 - Beweis III

- z_i wird nur für weisse Knoten erhöht
  - nach Phase II ändert sich z_i nicht mehr
- Phase I und Phase II zusammengezählt ergibt

$$z_i \leq \frac{(\Delta+1)^{\frac{1}{k}}-1}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}} + \frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{l}{k}}} = \frac{1}{(\Delta+1)^{\frac{l-1}{k}}}$$

□

Ergebnis

Satz 33

Der Algorithmus LP berechnet eine zulässige Lösung x für das Lineare Programm, wobei x eine $k(\Delta+1)^{2/k}$-Approximation der optimalen Lösung darstellt. Der Algorithmus terminiert nach $2k^2$ Runden.

Beweis Satz I

Beweis

- In jeder inneren Schleife werden 2 Nachrichten gesendet
  - Insgesamt $2k^2$ Runden
- Die ausgegebene Lösung ist zulässig
  - Beim letzten Schleifendurchlauf wird $x_i := 1$ gesetzt für jeden noch weissen Knoten i
  - Für graue Knoten i ist $\sum_{j \in N(i)} x_j \geq 1$
  - Also $N \cdot x \geq 1$

Beweis Satz II

- Betrachte Durchlauf der äußeren Schleife:
  - Invariante 1:
    Es gibt höchstens $(\Delta+1)^{(l+1)/k}$ positive z_j für $j \in N(i)$
  - Invariante 3: $z_j \leq (\Delta+1)^{-(l+1)/k}$
  - Somit

$$\sum_{j \in N(i)} z_j \leq \frac{(\Delta+1)^{\frac{l+1}{k}}}{(\Delta+1)^{\frac{-(l+1)}{k}}} = (\Delta+1)^{\frac{2}{k}}$$

Beweis Satz III

- Betrachte $y_i := z_i/(\Delta+1)^{2/k}$
  - Es gilt $\sum_{j\in N(i)} y_i \leq 1$ für alle i
  - Also ist y zulässige Lösung des dualen LP
  - Sei x^* optimale Lösung des LP
  - Dualitätssatz: $\sum_{i=1}^n y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^*$
- Damit gilt $\sum_{i=1}^n z_i \leq (\Delta+1)^{2/k} \sum_{i=1}^n x_i^*$
- $\sum_{i=1}^n z_i$ ist gleich der Erhöhung der x_i in einem Schritt der äußeren Schleife, also

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k(\Delta+1)^{2/k} \sum_{i=1}^n x_i^*.$$

□