Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ILKD Wagner

Algorithmen für Sensor und AdHoc-Netze
SS 2005
Prof. Dr. D. Wagner, Dr. F. Schulz, S. Mecke

Letztes Übungsblatt

Ausgabe: 28. Juni 2005
Abgabe: 4. Juli in der Vorlesung

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Steinerbaum-Problem ***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit euklidischen Kantenlängen. $s_1, \ldots, s_k \in V$ bilden die Menge der *Terminale*. Das (euklidische) Steinerbaum-Problem besteht darin, einen Baum $T \subset G$ minimaler Gesamtlänge zu finden, der alle Terminale verbindet.

Der folgende Algorithmus berechnet im Wesentlichen einen MST (In welchem Graphen?). Hierbei sei $d(v, w)$ die Länge eines kürzesten Weges von v nach w in G.

1. $T := (\{t_1\}, \emptyset\}$, $S = \{t_2, \ldots, t_k\}$
2. Solange S nicht leer ist
3. Finde den Knoten w mit dem kürzesten Abstand zu T.
4. Füge zu T den kürzesten Pfad von w nach T hinzu.
5. Entferne w aus S.

Zeigen Sie: Der vom Algorithmus berechnete Baum ist höchstens um den Faktor 2 länger als der minimale Steinerbaum. Hinweis: Erweitern sie G sinnvoll zu einem vollständigen Graphen und betrachten sie eine „kürzeste Rundtour“ (TSP-Tour) in dem ursprünglichen Graphen.

Problem 2: Datenaggregation **

Sei G ein Graph mit Kostenfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$, $s \in V$ die „Senke“, $s_1, \ldots, s_k$ die k „Quellen“. Es sollen von allen Quellen Pakete der Größe D an die Senke geschickt werden. Sei $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ die „Datenaggregationsfunktion“. Gesucht ist ein Baum $T \subset G$ mit minimalen Kosten

$$C(T) := \sum_{e \in T} c(e) \cdot f(d(e)).$$

Dabei wird angenommen, dass die in jedem Knoten von T ankommenden Daten d gemäß f aggregiert werden können (vgl. Vorlesung). Ist die Aggregationsfunktion konstant ($f(d) = D$), so entspricht dies dem Steinerbaum-Problem. Welches Problem ergibt sich bei $f(d) = d$ (keine Aggregation)?

Problem 3: Eigenvektoren

/*//***

Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit Gewichten $w\colon E \to \mathbb{R}_0^+$. Sei $A = (a_{ij}) \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ seine *Adjazenzmatrix*, also $a_{ij} = w(i, j) = w(j, i)$, falls $i \neq j$ und $a_{ii} = 0$. Sei $D = diag(d_i)$ die *Gradmatrix* mit $d_i := deg(i) := \sum_j w_{ij}$ und $L = D - A$ die *Laplacematrix*.

Als Konvention seien Eigenwerte stets vom kleinsten zum größten sortiert. Eigenvektoren seien stets D-normalisiert, d.h. $u^T D u = 1$. Ein Vektor u und ein Skalar μ heißen generalisiertes Eigenpaar von (L, D), falls

$$Lu = \mu D u.$$

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $x^T L x = \sum_{i<j} w_{ij}(x_i - x_j)^2$.

(b) Die generalisierten Eigenvektoren von (A, D) sind die (nicht generalisierten) Eigenvektoren von $D^{-1}A$.

(c) Für reguläre Graphen (d.h. der Grad aller Knoten ist gleich) sind die Eigenvektoren der Laplacematrix L gleich den Eigenwerten der Adjazenzmatrix A, in umgekehrter Reihenfolge.

(d) Die generalisierten Eigenvektoren von (L, D) sind auch die generalisierten Eigenvektoren von (A, D) in umgekehrter Reihenfolge.