3. Übungsblatt

Ausgabe: 17. Mai 2005
Abgabe: 24. Mai in der Vorlesung

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Dominierende Mengen II **

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $D \subset V$ eine dominierende Menge.

(a) Es gibt nicht unbedingt eine zusammenhängende dominierende Menge, die höchstens zwei mal so groß wie D ist.

(b) Es gibt es eine zusammenhängende dominierende Menge, die höchstens drei mal so groß wie D ist.

Problem 2: Dualität **

Zeigen Sie den schwachen Dualitätssatz: Seien x^* und y^* zulässige Lösungen zu dualen Problemen. Dann gilt

$$c^T x^* \geq b^T y^*.$$

Zu einem linearen Problem (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$) sei dabei das duale Problem (mit $y \in R^m$) wie folgt gegeben:

Primal:

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiere} & c^T x, & \\ \text{so dass} & & \\ Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0. \end{array} \qquad \text{(LP)}$$

Dual:

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiere} & b^T y, & \\ \text{so dass} & & \\ A^T y & \leq & c \\ y & \geq & 0. \end{array} \qquad \text{(DLP)}$$

Problem 3: Lineare Programme ***

Sei $E \in \{0, 1\}^{m \times n}$ die Inzidenzmatrix eines Graphen (d.h. $E_{ij} = 1$ gdw. $v_j \in e_i$).

(a) Wie lässt sich eine beliebige Instanz von MINIMUM VERTEX COVER als äquivalente Instanz von INTEGER LINEAR PROGRAMMING formulieren?

(b) Wie sieht das dazu duale Problem aus (bezogen auf die Relaxierung des ILP, d.h. mit $0 \leq x \in \mathbb{R}$)?

(c) Was ist die „umgangssprachliche“ Formulierung des dualen Problems?

Problem INTEGER LINEAR PROGRAMMING

Gegeben: $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $b_i, c_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Aufgabe:

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiere} & c^T x, & \\ \text{so dass} & & \\ Ax & \geq & b \\ x & \in & \mathbb{N}_0 \end{array} \tag{ILP}$$

Problem 4: Topologiekontrolle **

Sei $V \subset \mathbb{R}^2$, $|v, w|$ der euklidische Abstand zweier Punkte $v, w \in V$, $H = (V, E_H)$ ein vollständiger geometrischer Graph. Die Kantenlängen von H sind also die euklidischen Abstände der Punktepaare von V. Sei T ein minimaler aufspannender Baum von H.

Sei $GG = (V, E_G)$ der Gabrielgraph, d.h.

$$\{v, w\} \in E_G \text{ gdw. } |v, w|^2 < |v, x|^2 + |x, w|^2 \text{ für alle } x \in V, v \neq x \neq w.$$

Sei $RNG = (V, E_R)$ der „Relative Neighbourhood Graph“, d.h.

$$\{v, w\} \in E_R \text{ gdw. } |v, w| \leq \max\{|v, x|, |x, w|\} \text{ für alle } x \in V, v \neq x \neq w.$$

(a) GG und RNG sind planar.

(b) $T \subseteq RNG \subseteq GG$

(c) GG und RNG enthalten zu jedem Knoten die kürzeste ausgehende Kante von H.