Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ILKD Wagner

Algorithmen für Sensor und AdHoc-Netze
SS 2005
Prof. Dr. D. Wagner, Dr. F. Schulz, S. Mecke

3. Übungsblatt – mit Ergänzungen

Problem 1: Dominierende Mengen II **

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $D \subset V$ eine dominierende Menge.

(a) Es gibt nicht unbedingt eine zusammenhängende dominierende Menge, die höchstens zwei mal so groß wie D ist.

Hinweis. *Betrachte MDS auf Pfad* P_n. $|MCDS|/|MDS| \to 3 \quad (n \to \infty)$

(b) Es gibt es eine zusammenhängende dominierende Menge, die höchstens drei mal so groß wie D ist.

Hinweis. *Betrachte Graph* $G' = (D, E_D)$. $\{v, w\} \in E_D :\Longleftrightarrow$ *Ex. Pfad der Länge 2 in* G *zwischen* v *und* w. G' *ist zusammenhängend (!) und ein aufspannender Baum* T *von* G' *induziert ein CDS der Größe* $|D| + 2(|D| - 1)$ *in* G.

Problem 2: Dualität **

Zeigen Sie den schwachen Dualitätssatz: Seien x^* und y^* zulässige Lösungen zu dualen Problemen. Dann gilt

$$c^T x^* \geq b^T y^*. \qquad \text{Korrektur!}$$

Zu einem linearen Problem (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$) sei dabei das duale Problem (mit $y \in R^m$) wie folgt gegeben:

Primal:

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiere} & c^T x, & \\ \text{so dass} & & \\ Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0. \end{array} \qquad \text{(LP)}$$

Dual:

$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiere} & b^T y, & \\ \text{so dass} & & \\ A^T y & \leq & c \\ y & \geq & 0. \end{array} \qquad \text{(DLP)}$$

Hinweis. *Es gilt* $Ax^* \geq b$ *und* $y^* \geq 0$, *also* $y^{*T} A x^* \geq y^{*T} b$. *Analog folgt* $x^{*T} A^T y^* \leq x^{*T} c$, *also* $y^{*T} A x^* \leq c^T x^*$. *Zusammen ergibt sich* $c^T x^* \geq y^{*T} b = b^T y^*$.

Problem 3: Lineare Programme ***

Sei $E \in \{0, 1\}^{m \times n}$ die Inzidenzmatrix eines Graphen (d.h. $E_{ij} = 1$ gdw. $v_j \in e_i$).

(a) Wie lässt sich eine beliebige Instanz von MINIMUM VERTEX COVER als äquivalente Instanz von INTEGER LINEAR PROGRAMMING formulieren?

Hinweis.

$$\begin{array}{rcl} \textit{Minimiere} & \mathbb{1}x, & \\ \textit{so dass} & & \\ Ex & \geq & \mathbb{1} \\ x & \in & \mathbb{N}_0 \end{array} \tag{ILPVC}$$

(b) Wie sieht das dazu duale Problem aus (bezogen auf die Relaxierung des ILP, d.h. mit $0 \leq x \in \mathbb{R}$)?

Hinweis.

$$\begin{array}{rcl} \textit{Maximiere} & \mathbb{1}y, & \\ \textit{so dass} & & \\ E^T y & \leq & \mathbb{1} \\ y & \in & \mathbb{N}_0 \end{array} \tag{DILPVC}$$

(c) Was ist die „umgangssprachliche“ Formulierung des dualen Problems?

Hinweis. *MAXIMUM MATCHING*
MAXIMUM MATCHING ist in $\mathcal{P}$, whrend MINIMUM VERTEX COVER $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Problem 4: Topologiekontrolle **

Sei $V \subset \mathbb{R}^2$, $|v, w|$ der euklidische Abstand zweier Punkte $v, w \in V$, $H = (V, E_H)$ ein vollständiger geometrischer Graph. Die Kantenlängen von H sind also die euklidischen Abstände der Punktepaare von V. Sei T ein minimaler aufspannender Baum von H.

Sei $GG = (V, E_G)$ der Gabrielgraph, d.h.

$$\{v, w\} \in E_G \text{ gdw. } |v, w|^2 < |v, x|^2 + |x, w|^2 \text{ für alle } x \in V, v \neq x \neq w.$$

Sei $RNG = (V, E_R)$ der „Relative Neighbourhood Graph“, d.h.

$$\{v, w\} \in E_R \text{ gdw. } |v, w| \leq \max\{|v, x|, |x, w|\} \text{ für alle } x \in V, v \neq x \neq w.$$

(a) GG und RNG sind planar.

Hinweis. *Gen.z.z.: GG ist planar. Wir zeigen sogar: Die vorhandene Einbettung von GG ist eine planare (mit gradlinigen Kanten). Sonst seien $(v, w), (x, y) \in E_G$ zwei Kanten die sich schneiden. Dann ist (v, x, w, y, v) eine einfache, geschlossene Kurve, ein Viereck. Die Innenwinkel $\angle vxw, \angle xwy, \angle wyv$ und $\angle yvx$ sind nach Definition von GG alle kleiner 90 Grad, ein Widerspruch.*

(b) $T \subseteq RNG \subseteq GG$

(c) GG und RNG enthalten zu jedem Knoten die kürzeste ausgehende Kante von H.