Blockseminar

Randomisierte Algorithmen in der algorithmischen Geometrie

Sommersemester 2005
Baerenthal, 27. Juli

Ignaz Rutter

Herausgegeben von
Alexander Wolff

Institut für Theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Inhaltsverzeichnis

1 Wie man eine Wächter findet, der am meisten sieht, und ein Geschäft, das am meisten verkauft **2**

Ignaz Rutter

1.1 Einleitung 2

1.2 Wie man einen Wächter findet, der am meisten sieht 2

1.2.1 Formale Definition 3

1.2.2 ϵ-Approximation 3

1.2.3 Maximierung der Schätzfunktion e_S 5

1.3 Zwischenresultat 6

1.4 Wie man das Geschäft findet, das am meisten verkauft 6

1.4.1 Problem-Definition 7

1.4.2 Untere Schranke 7

1.4.3 Anwendung des Satzes 8

1.4.4 Konstruktion einer ϵ-Approximation 8

1.4.5 Optimierung der Schätzfunktion 9

1.4.6 Der Algorithmus 10

1.5 Fazit 10

Autorenverzeichnis **12**

Literaturverzeichnis **13**

Kapitel 1

Wie man eine Wächter findet, der am meisten sieht, und ein Geschäft, das am meisten verkauft

Ignaz Rutter

1.1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung möchte ich ein Verfahren vorstellen, mit dem es möglich ist, Approximationsalgorithmen für Probleme zu konstruieren, die nur sehr schwer analytisch lösbar sind. Wir wollen zwei Probleme betrachten, die sich im Grunde recht ähnlich sind: Bei beiden Problemen geht es darum einen Punkt x zu finden, sodass die Region $V(x)$, die von diesem Punkt x „kontrolliert wird" möglichst groß ist. Beim ersten Problem geht es darum in einem einfachen Polygon P einen Punkt zu finden, der möglichst viel sieht. Beim zweiten Problem soll ein Punkt gefunden werden, der, nachdem er zu einer Menge aus n Punkten hinzugefügt wird, dort ein möglichst großes Voronoi-Gebiet besitzt. Als Referenz dient hauptsächlich [CEH04].

1.2 Wie man einen Wächter findet, der am meisten sieht

Es geht darum in einem Polygon einen Punkt zu finden, der möglichst viel von diesem Polygon sieht. Motiviert ist die Aufgabenstellung durch das Problem der Sensorplatzierung: Wo muss man einen Sensor positionieren, damit er möglichst viel Information messen kann? Zunächst werde ich die Problemstellung etwas formalisieren, anschließend werde ich zeigen, wie man das Problem durch Sampling so diskretisieren kann, dass man eine gute approximative Lösung bestimmen kann.

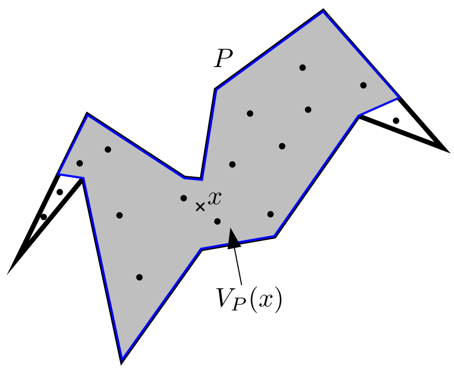

Abb. 1.1: Polygon P mit Sichtbarkeitsbereich $V_P(x)$ eines Punktes x.

1.2.1 Formale Definition

Sei ein einfaches Polygon P mit n Ecken gegeben. Gesucht ist dann ein Punkt x im Inneren von P, der am meisten sieht. Der Punkt x soll dabei einen Punkt y aus P sehen, wenn die Verbindungsstrecke xy beider Punkte ganz in P liegt. Die Menge aller Punkte in P, die vom Punkt x aus sichtbar ist, ist ein Polygon, das *Sichtbarkeitspolygon* $V_P(x)$ von x in P. Formal gilt:

$$V_P(x) = \{y \mid xy \subseteq \mathrm{int}(P)\}.$$

Sei $\mu(\cdot)$ das Flächenmaß. Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu(P) = 1$. Dies ist durch eine einfache Skalierung stets zu erreichen. Außerdem verwenden wir die Abkürzungen $\mu(x) := \mu(V_P(x))$ und $\mu_{\text{opt}} := \max_{x \in P} \mu(x)$ für das Maß des größten Sichtbarkeitspolygons.

1.2.2 ϵ-Approximation

Wir definieren uns einen Schätzer für die Flächenmaßfunktion, indem wir eine endliche Menge S von Punkten aus P nehmen und als Schätzung für $\mu(x)$ das Verhältnis der Punkte aus S, die von x aus sichtbar sind, zur Gesamtzahl an Punkten in S betrachten. Das funktioniert, da $\mu(P) = 1$ angenommen wurde.

Definition 1.1 *Für eine Menge S von Punkten in P und einen Punkt $x \in P$ sei*

$$e_S(x) = \frac{|V_P(x) \cap S|}{|S|},$$

die Schätzung der Fläche*, die von x aus sichtbar ist.*

Abbildung 1.1 zeigt ein Beispielpolygon, das mit 16 Punkten abgetastet wurde. Im Inneren des Polygons befindet sich ein Punkt x, dessen Sichtbarkeitsbereich $V_P(x)$ 13 Sample-Punkte enthält. Im Beispiel ist also $e_S(x) = 13/16$.

Wir wollen nun zeigen, dass es möglich ist, das Problem mit einer ausreichen großen Sample-Menge zu diskretisieren, und dann durch Lösung des diskretisierten Problems eine gute Approximation an die größte Fläche zu erhalten. Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Menge aller Sichtbarkeitspolygone in P ein System von Teilmengen von P ist. Eine solche Struktur ist ein Bereichsraum. Anschließend benötigen wir einen Dimensionsbegriff für diese Räume. Der ϵ-Approximationssatz gibt dann Auskunft darüber, mit wievielen Punkten ein Bereichsraum mit Dimension d abgetastet werden muss, um eine vorgegebene Genauigkeit zu erreichen.

Ein *Bereichsraum* ist ein Tupel $(X, \mathcal{R})$, wobei X eine Menge ist und $\mathcal{R} \neq \emptyset$ eine Menge von Teilmengen von X, den sogenannten Bereichen. Die Komplexität eines solchen Bereichsraums lässt sich mit dem Konzept der *VC-Dimension* beschreiben. Die VC-Dimension misst, wie gut man mit den Bereichen eine Punktmenge zerlegen kann. Dazu definiert man für $A \subseteq X$:

$$\Pi_{\mathcal{R}}(A) := \{A \cap r \mid r \in \mathcal{R}\}.$$

$\Pi_{\mathcal{R}}(A)$ ist dann gerade die Menge aller Teilmengen von A, die man durch Schnitt mit Bereichen erhalten kann. Kann man von einer Menge A sogar jede Teilmenge durch Schnitt mit Bereichen erhalten, gilt also: $\Pi_{\mathcal{R}}(A) = 2^A$, so sagt man $\mathcal{R}$ *zerlegt* A. Die maximale Größe der Mengen in einem Bereichsraum, die durch dessen Bereiche zerlegt wird, ist die VC-Dimension. Als Formel:

$$VC\text{-}dim(X, \mathcal{R}) := \sup\{|A| : A \subseteq X \text{ endlich und } \mathcal{R} \text{ zerlegt } A\}.$$

Betrachten wir nun den Bereichsraum $(P, \mathcal{V})$ mit $\mathcal{V} = \{V_P(x) \mid x \in P\}$. Eine Menge S heißt *ϵ-Approximation* für diesen Bereichsraum, wenn für jedes $x \in P$ gilt:

$$|e_S(x) - \mu(x)| \leq \epsilon.$$

In [Val98] wird gezeigt, dass die VC-Dimension des Bereichsraums $(P, \mathcal{V})$ durch 23 beschränkt ist.

Gemäß dem ϵ-Approximationssatz [AS00] ist ein zufälliges, gleichverteiltes Sample S von $O((d/\epsilon^2) \log d/(\epsilon\delta)))$ Punkten aus einem Bereichsraum der VC-Dimension d mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \delta$ eine ϵ-Approximation für diesen Bereichsraum.

Es gilt $\mu_{\text{opt}} \geq 1/(n-2)$, da sich ein Polygon mit n Ecken in $n-2$ Dreiecke zerlegen lässt, und die größte Dreiecksfläche eine untere Schranke für den größten Sichtbarkeitsbereich ist. Die untere Schranke geht als Faktor in die Wahl des Parameters ϵ im nachfolgenden Approximationssatz ein. Das folgende Lemma klärt nun, warum es wünschenswert ist, eine ϵ-Approximation zu besitzen:

Lemma 1.1 *Ist S eine ϵ-Approximation für $\epsilon = \delta/(2n)$ und x_{app} ein Punkt, der $e_S(x_{\text{app}})$ maximiert. Dann gilt:*

$$\mu(x_{\text{app}}) \geq (1 - \delta)\mu_{\text{opt}}.$$

Der Sichtbarkeitsbereich des Punktes x_{app} ist also eine $(1 - \delta)$-Approximation des größten Sichtbarkeitsbereichs eines Punktes in P.

Beweis. Sei x_{opt} ein Punkt, der $\mu(x_{\text{opt}}) = \mu_{\text{opt}}$ maximiert. Wir wollen die Eigenschaft, dass S ϵ-Approximation ist, folgendermaßen ausnutzen. Es gilt $|e_S(x) - \mu(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in P$. Wenn wir also von einem der beiden Werte $\epsilon = \delta/(2n)$ abziehen, so ist das Resultat auf jeden Fall höchstens so groß wie der andere Wert. Also:

$$\mu(x_{\text{app}}) \geq e_S(x_{\text{app}}) - \frac{\delta}{2n} \geq e_S(x_{\text{opt}}) - \frac{\delta}{2n} \geq \mu(x_{\text{opt}}) - \delta/n \geq (1 - \delta)\mu_{\text{opt}}.$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass $1/n \leq \mu_{\text{opt}}$ wegen der unteren Schranke für μ_{opt} gilt. □

Es genügt also, einen Punkt $x_{\text{app}} \in P$ zu finden, der die Schätzfunktion e_S maximiert, um eine gute Approximation für das Sichtbarkeitsproblem zu bekommen.

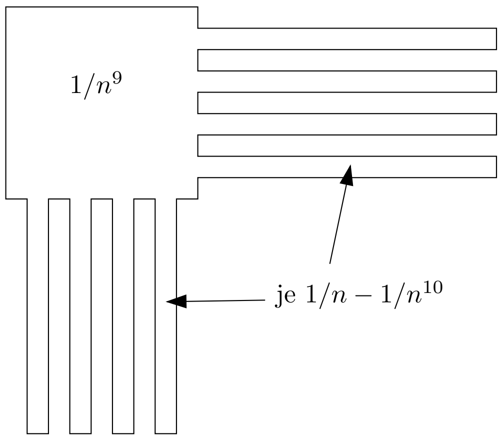

Abb. 1.2: Gegenbeispiel zur naiven Optimierung von e_S.

1.2.3 Maximierung der Schätzfunktion e_S

Es ist zunächst nahe liegend einfach den besten Punkt aus der Sample-Menge S zu nehmen und zu hoffen, dass dieser Punkt bereits ein Optimum der Schätzfunktion e_S ist. Dann wäre er nach obigem Lemma auch eine $(1 - \delta)$-Approximation des optimalen Punktes.

Das funktioniert aber leider nicht. Man betrachte das Gegenbeispiel 1.2. Wir stellen uns vor, die n Korridore wären so weit in die Länge gezogen, dass jeder von ihnen die Fläche $1/n - 1/n^{10}$ hat. Das Quadrat im Zentrum hätte dann Fläche $1/n^9$. Ein Sample der Größe $O(n)$ hätte mit hoher Wahrscheinlichkeit nur Punkte in den Korridoren. Diese würden zudem auch noch „tief“ in den Korridoren liegen. Jeder der zufällig gesampleten Punkte sähe also höchstens eine Fläche von $1/n$. Ein Punkt im Quadrat in der Mitte sähe aber mindestens eine Fläche von $2/n$.

Es ist also nötig ein globales Optimum von e_S zu finden! Die zweite Idee basiert darauf, dass ein Punkt x einen Punkt s genau dann sieht, wenn umgekehrt der Punkt s den Punkt x sieht. In Formeln:

$$s \in V_P(x) \iff x \in V_P(s).$$

Setzen wir nun $\mathcal{W}_S = \{V_P(s) \mid s \in S\}$ und betrachten das Arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{W}_S)$. Wir müssen nun einen Punkt in P finden, der in der größten Anzahl von Polygonen in $\mathcal{W}_S$ enthalten ist. Dieser Punkt maximiert die Schätzfunktion e_S und ist damit nach Lemma 1.1 eine $(1 - \delta)$-Approximation an die optimale Lösung.

Lemma 1.2 *Für ein einfaches Polygon P und einen Parameter $\delta > 0$ ist es möglich in $O((n^5/\delta^4)\log^3(n/\delta))$ Zeit einen Punkt $x \in P$ zu berechnen, sodass gilt: $\mu(x) \geq (1-\delta)\mu_{\text{opt}}$. Der Algorithmus funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $(1 - \delta)$.*

Beweis. Setze $\epsilon = \delta/(2n)$. Ein zufälliges und gleichverteiltes Sample aus

$$M = O(1/\epsilon^2 \log(1/\epsilon)) = O((n^2/\delta^2)\log(n/\delta))$$

Punkten ist nach [AS00] mit hoher Wahrscheinlichkeit eine ϵ-Approximation. Nun berechnen wir für jeden Punkt $s \in S$ das Sichtbarkeitspolygon $V_P(s)$ mit einem

Sweepline-Algorithmus in $O(n)$ Zeit. Sei $\mathcal{W}_\mathcal{S}$ die resultierende Menge von Polygonen. Berechnen wir nun die Komplexität des Arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{W}_\mathcal{S})$: Eine Strecke *innerhalb von* P kann den Rand eines Sichtbarkeitspolygons höchstens zweimal schneiden kann. Zudem ist die Anzahl der Kanten aller Sichtbarkeitspolygone in $\mathcal{W}_\mathcal{S}$ in $O(nM)$, da die einzelnen Sichtbarkeitspolygone jeweils höchstens n Seiten haben. Damit kann es höchstens $O(nM^2)$ Kreuzungen geben. Da es sich um einen planaren Graphen handelt, ist nach Euler die Anzahl der Facetten asymptotisch ebenfalls $O(nM^2)$. Die Komplexität des Arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{W}_\mathcal{S})$ ist daher $O(nM^2) = O((n^5/\delta^4)\log^2(n/\delta))$. Nach [GMMN88] lässt sich dieses Arrangement mit einem Aufwand von $O((n^5/\delta^4)\log^3(n/\delta))$ berechnen.

Nun durchlaufen wir das Arrangement mit einer Breitensuche und berechnen für jede Facette die Anzahl der Polygone in $\mathcal{W}_\mathcal{S}$, die sie enthalten. Anschließend wählen wir einen Punkt aus einer Facette, bei der diese Zahl am größten ist. $\square$

1.3 Zwischenresultat

Da es mir vornehmlich darum geht das Vorgehen zur Konstruktion der Algorithmen zu beschreiben, möchte ich zunächst kurz rekapitulieren, was wir bis jetzt getan haben und anschließend einen kleinen Satz beweisen, der etwas genauer formalisiert, wie das Konstruktionsverfahren anzuwenden ist.

Zunächst haben wir uns eine Schätzfunktion e_S gesucht, die in der Lage war die echte Flächenfunktion bis auf ein ϵ genau zu schätzen. Anschließend konnten wir zeigen, dass ein optimaler Punkt bezüglich der Schätzfunktion auch schon eine gute Approximation der optimalen Lösung ist. Wir haben das Problem also geschickt diskretisiert. Der letzte Teil des vorigen Abschnitts befasste sich hauptsächlich mit der Frage, wie man die Schätzfunktion optimiert. Das stellte sich jedoch auf Grund der diskreten Struktur des Problems als relativ einfach heraus.

Wie in der Einführung kurz beschrieben, möchte ich das Problem jetzt sehr allgemein betrachten: Finde einen Punkt x, so dass die Region $V(x)$, die von diesem Punkt x „kontrolliert wird“, möglichst groß ist.

Nehmen wir an, wir hätten eine Möglichkeit uns für vorgegebenes ϵ eine ϵ-Approximation für $\mu(x)$ zu konstruieren. Außerdem nehmen wir an, wir hätten eine untere Schranke $\mu_{\min}$ für μ_{opt}.

Satz 1.1 *Sei $\delta > 0$ beliebig, und $\epsilon = \delta\mu_{\min}/2$, dann gilt für einen Punkt x_{app}, der e_S maximiert, dass $\mu(x_{\text{app}})$ den Wert μ_{opt} approximiert, das heißt:*

$$\mu(x_{\text{app}}) \geq (1-\delta)\mu_{\text{opt}}.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog wie bei Lemma 1.1. $\square$

Damit klärt sich auch die Wahl des Parameters ϵ bei der Konstruktion des Algorithmus für das Wächter-Problem.

1.4 Wie man das Geschäft findet, das am meisten verkauft

Nachdem das allgemeine Vorgehen näher beleuchtet wurde, wollen wir uns nun eine weitere Anwendung davon anschauen. Dabei wollen wir uns an das durch das Konstruktionsverfahren definierte „Programm“ halten.

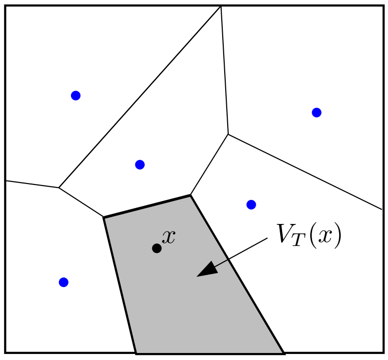

Abb. 1.3: Beispiel für einen Punkt mit großem Voronoi-Gebiet

Motiviert ist das Problem durch folgende Aufgabenstellung. In einer Stadt gibt es mehrere Supermärkte. Jeder Mensch kauft bei dem Supermarkt ein, der ihm am nächsten liegt, also bei dem Supermarkt, in dessen Voronoi-Gebiet er liegt. Nun wollen wir einen neuen Supermarkt eröffnen. Da dieser möglichst viele Kunden haben soll, muss er ein möglichst großes Voronoi-Gebiet haben. Gesucht ist also eine Stelle, an der wir einen Supermarkt positionieren (zum Voronoi-Diagramm hinzufügen) können, sodass sein Voronoi-Gebiet möglichst groß ist. Ein Beispiel für ein großes Gebiet ist in Abbildung 1.3 zu sehen. Im Folgenden werde ich das Problem zunächst wieder formalisieren und anschließend das zuvor diskutierte Verfahren anwenden.

1.4.1 Problem-Definition

Gegeben ist eine endliche Menge T von n Punkten. Gesucht ist ein Punkt x, der im Voronoi-Diagramm von $T \cup \{x\}$ ein möglichst großes Voronoi-Gebiet hat. Sei $V_T(x) = \{y : |y - x| < |t - x| \quad \forall t \in T\}$ das Voronoi-Gebiet von x im Voronoi-Diagramm von $T \cup \{x\}$, und μ bezeichne wieder das Flächenmaß.

Wir haben nun noch ein kleines Problem: Punkte, die außerhalb der konvexen Hülle von T liegen, haben ein unendlich großes Voronoi-Gebiet. Um das zu vermeiden gibt es mehrere Ansätze. Zum einen könnte man festlegen, dass alle Punkte innerhalb eines festen Bereichs liegen (z.B. Stadtgrenze bei Supermärkten), oder man kann eine Torus-Topologie zu Grunde legen.

Wir entscheiden uns hier für die letztere Variante, da sie formal etwas einfacher zu handhaben ist: Wollen wir einen Punkt betrachten, so können wir stets annehmen, dass er in der Mitte des Einheitsquadrats liegt. So können wir Randfälle vermeiden und einige Abschätzungen werden einfacher. Die Konstruktion funktioniert aber analog auch mit der anderen Variante.

1.4.2 Untere Schranke

Wir benötigen, um das Verfahren anwenden zu können, zunächst eine untere Schranke für $\mu(x_{\text{opt}})$.

Definition 1.2 *Die* Reichweite *eines Voronoi-Gebiets $V_T(x)$ ist der Abstand zwischen x und dem von x am weitesten entfernten Punkt in $V_T(x)$.*

Beobachtung 1.1 *Die Reichweite eines Voronoi-Gebiets $V_T(x)$ ist der Radius des kleinsten Kreises um x, der $V_T(x)$ enthält.*

Lemma 1.3 *Sei ℓ die größte Reichweite aller Voronoi-Gebiete $V_T(t)$ mit $t \in T$. Dann gilt:*

$$\pi\ell^2/4 \leq \mu_{\text{opt}} \leq \pi\ell^2.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die untere Schranke. Sei $p \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, der die Reichweite ℓ realisiert. Sein Abstand zum nächsten Punkt in T ist also ℓ. Also enthält $V_T(p)$ den Kreis mit Radius $\ell/2$ um p vollständig. Es gilt also: $\mu_{\text{opt}} \geq \mu(p) \geq \pi\ell^2/4$.

Nun beweisen wir die obere Schranke. Sei x ein Punkt, der eine Optimallösung realisiert, also $\mu(x) = \mu_{\text{opt}}$, sowie $y \in V_T(x)$ der von x am weitesten entfernte Punkt. Der Abstand von y zum nächsten Punkt in T ist höchstens ℓ, also ist der Abstand zwischen x und y höchstens ℓ. Daher ist $V_T(x)$ vollständig in dem Kreis mit Radius ℓ um x enthalten. Also gilt $\mu_{\text{opt}} \leq \pi\ell^2$. ◻

1.4.3 Anwendung des Satzes

Nehmen wir zunächst an, wir besäßen bereits die Möglichkeit uns für ein beliebiges $\epsilon > 0$ eine Schätzfunktion e_S zu wünschen, so dass gilt:

$$|e_S(x) - \mu(x)| \leq \epsilon.$$

Dann führt nach Satz 1.1 folgender Weg zu einer $(1-\delta)$-Approximation der Optimallösung: Wähle $\epsilon = \delta\pi\ell^2/8$ und suche einen Punkt, der die Schätzfunktion maximiert. Dieser Punkt ist dann die gesuchte Approximationslösung.

Wir benötigen jetzt also noch die Konstruktion einer geeigneten Approximation, sowie ein Verfahren um einen optimalen Punkt bezüglich der Schätzfunktion zu finden.

1.4.4 Konstruktion einer ϵ-Approximation

Diesmal wollen wir nicht wie in Abschnitt 1.2.2 randomisiert vorgehen, sondern ein Gitter verwenden. Dazu rastern wir die Ebene mit einem ϵ-Gitter S. Dadurch entstehen lauter kleine Quadrate mit Seitenlänge ϵ. Wollen wir nun die Fläche eines Gebiets V schätzen, so bestimmen wir einfach die Anzahl der Punkt aus S, die V enthält, und tun so, als enthielte V mit jedem Punkt auch ein ganzes Quadrat mit Seitenlänge ϵ.
In Formeln:

$$e_S(x) = \epsilon^2 \cdot |V_T(x) \cap S|.$$

. Natürlich ist diese Schätzung nicht für beliebige Gebiete eine gute Approximation. Voronoi-Gebiete sind aber konvex. Das nachfolgende Lemma sagt uns, dass in diesem Fall die Schätzung tatsächlich eine gute Approximation liefert.

Lemma 1.4 *Sei S quadratisches Gitter mit Dichte ϵ in der Ebene, sowie C eine konvexe Fläche mit Durchmesser höchstens D. Dann gilt:*

$$\left|\mu(C) - \epsilon^2 |C \cap S|\right| \leq 4D\epsilon.$$

Beweis. Durch das Gitter S wird die Ebene in lauter kleine Quadrate zerlegt, wobei man sich vorstellen kann, dass die Punkte aus S immer genau in der Mitte der kleinen Quadrate liegen. Ist ein Quadrat vollständig in C enthalten, so passiert uns kein Schätzfehler. Fehler passieren also immer nur am Rand von C. Da C konvex ist,

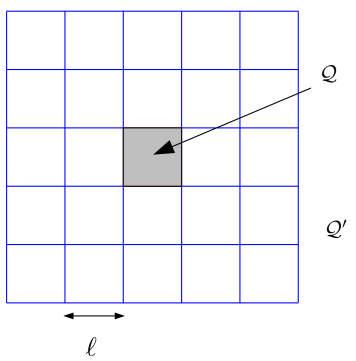

Abb. 1.4: Betrachteter Bereich $\mathcal{Q}'$ bei der Optimierung auf der Gitterzelle $\mathcal{Q}$

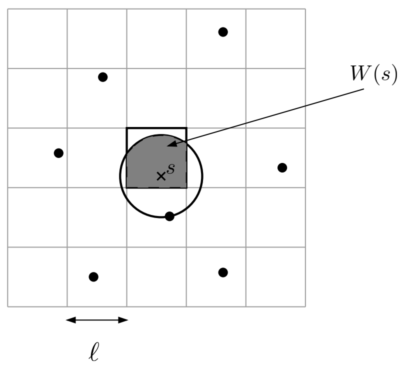

Abb. 1.5: Darstellung von $W(s)$ für einen Punkt s

schneidet der Rand von C höchstens $4D/\epsilon$ kleine Quadrate, siehe [CEH04]. Daraus folgt die Behauptung. □

In unserem Fall ist der Durchmesser D der Voronoi-Gebiete höchstens das Doppelte der Reichweite ℓ. Wählen wir nun $\epsilon = \delta\pi\ell/64$, so gilt wegen $D \leq 2\ell$:

$$|e_S(x) - \mu(x)| \leq 8\ell\epsilon \leq \delta\pi\ell^2/8.$$

Die so konstruierte Schätzfunktion erlaubt es uns also die Lösung zu approximieren. Wenn wir jetzt ein Optimum dieser Schätzfunktion kennen, so wissen wir, dass es sich dabei auch um eine $(1-\delta)$-Approximation der Fläche des größten Voronoi-Gebiets handelt.

1.4.5 Optimierung der Schätzfunktion

Beim vorigen Problem war die Optimierung der Schätzfunktion der Teil, der den größten Aufwand benötigte. Um diesmal einen effizienteren Algorithmus zu erhalten, wollen wir nicht ganz analog vorgehen, sondern unser Vorgehen etwas modifizieren. Diesmal haben wir nicht nur die für das Konstruktionsverfahren nötige untere Schranke, sondern auch eine gute obere Schranke für die Lösung, nämlich $\pi\ell^2$. Unsere neue Region hatte ja höchstens Reichweite ℓ.

Wir unterteilen nun das Einheitsquadrat (welches T enthält) in ein Gitter von Quadraten mit Seitenlänge ℓ. Nun benutzen wir in jeder Gitterzelle $\mathcal{Q}$ die oben beschriebene ϵ-Approximation. Anschließend bestimmen wir in jeder Zelle $\mathcal{Q}$ einen Punkt $x_\mathcal{Q}$, der $e_S(x_\mathcal{Q})$ maximiert. Wählen wir dann x_{app} als den Punkt $x_\mathcal{Q}$, der $e_S(x_\mathcal{Q})$ maximiert, so ist dieser ein Optimum von e_S und damit auch eine $(1-\delta)$-Approximation der Fläche des größten Voronoi-Gebiets.

Es genügt nun zu zeigen, wie man einen Punkt $x_\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}$ findet. Betrachten wir eine feste Gitterzelle $\mathcal{Q}$ und einen Punkt $x \in \mathcal{Q}$. Die Reichweite von $V_T(x)$ ist höchstens ℓ, also kann $V_T(x)$ nur $\mathcal{Q}$ und seine acht benachbarten Zellen schneiden. Damit ein Punkt aus T an der Definition von $V_T(x)$ beteiligt ist, müssen sich die Voronoi-Gebiete von x und dem Punkt aus T berühren. Da aber beide Gebiete maximal Reichweite ℓ haben, können nur Punkte von T beteiligt sein, die in $\mathcal{Q}$ oder den 24 Gitterzellen in Abstand höchstens 2ℓ liegen. Bezeichne $\mathcal{Q}'$ die Vereinigung dieser 25 Zellen und sei $T_\mathcal{Q} = T \cap \mathcal{Q}'$. In Abbildung 1.4 ist die Situation graphisch dargestellt.

Wie zuvor lohnt es sich die Situation aus der anderen Richtung zu betrachten und die Menge $W(s)$ aller Punkte $x \in \mathcal{Q}$ zu betrachten, deren Voronoi-Gebiet einen festen Punkt $s \in S$ enthälten, also die Menge

$$W(s) = \{x \in \mathcal{Q} \mid s \in V_T(x)\}.$$

Da s genau dann in $V_T(x)$ liegt, wenn kein Punkt aus T näher an s liegt als x, ist $W(s)$ gerade der Schnitt von $\mathcal{Q}$ mit der größten offenen Kreisscheibe um s, die keinen Punkt aus T enthält. Abbildung 1.5 stellt die Situation graphisch dar. Wir setzen $\mathcal{W}_S = \{W(s) \mid s \in S\}$ und betrachten das Arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{W}_S)$. Ähnlich wie zuvor haben wir unser Problem darauf reduziert einen Punkt in $\mathcal{Q}$ zu finden, der in der größten Anzahl von abgeschnittenen Kreisscheiben in $\mathcal{W}_S$ enthalten ist.

1.4.6 Der Algorithmus

Nun haben wir alles zusammen, was wir benötigen, um das endgültige Resultat zu formulieren. Es gilt folgender Satz:

Satz 1.2 *Gegeben sei eine Menge T von n Punkten in der Ebene sowie ein Parameter $\delta > 0$, so ist es möglich deterministisch in $O(n/\delta^4 + n \log n)$ Zeit einen Punkt x_{app} zu berechnen, so dass $\mu(x_{\text{app}}) \geq (1-\delta)\mu_{\text{opt}}$ gilt.*

Beweis. Zunächst berechnen wir das Voronoi-Diagramm von T und schauen uns dessen Eckpunkte an, um die größte Reichweite ℓ zu bestimmen. Dafür beträgt der Aufwand $O(n \log n)$ Zeit.

Dann definieren wir ein quadratisches Gitter, dessen Zellen Seitenlänge ℓ haben, und bestimmen in jeder Zelle $\mathcal{Q}$ die Menge $T_\mathcal{Q}$ der relevanten Punkte. Da ein Punkt aus T in höchstens 25 Gitterzellen relevant ist, ist die Anzahl der nichtleeren Mengen $T_\mathcal{Q}$ in $O(n)$.

Anschließend wählen wir in jeder Gitterzelle ein ϵ-Gitter S der Dichte $\epsilon = \delta\pi\ell/64$. Ein solches Gitter S besteht aus $M = 25\ell^2/\epsilon^2 = O(1/\delta^2)$ Punkten. Für ein $s \in S$ kann die abgeschnittene Kreisscheibe $W(s)$ deterministisch berechnet werden, indem man den nächsten Nachbarn von s in $T_\mathcal{Q}$ bestimmt. Dies entspricht genau einer Punktlokalisierung im Voronoi-Diagramm von T.

Das Arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{W}_S)$ lässt sich durch einen Sweepline-Algorithmus in $O(M^2)$ Zeit berechnen. Die Anzahl der Kreisscheiben, die eine Facette des Arrangements enthalten, kann wiederum mit einer Breitensuche bestimmt werden. Wir wählen einen Punkt $x_\mathcal{Q}$ aus der Facette, die die Schätzung $e_S(x_\mathcal{Q})$ maximiert. Die Korrektheit dieses Verfahrens haben wir bereits zuvor eingesehen.

Nach Wahl von ℓ hat jede Gitterzelle Abstand höchstens 2ℓ von einem Punkt in T. Daher ist die Anzahl der Gitterzellen in $O(n)$, außerdem taucht jeder Punkt von T höchstens $25M$ mal bei der Berechnung des nächsten Nachbarn auf. Die Gesamtlaufzeit ist also $O(n \log n + nM + nM^2) = O(n/\delta^4 + n \log n)$. □

Wir haben also einen recht effizienten Algorithmus zur Lösung des Problems einen Punkt mit möglichst großem Voronoi-Gebiet zu finden.

1.5 Fazit

Ich habe ein Verfahren vorgestellt, wie man Probleme mit einer gewissen Struktur so diskretisieren kann, dass sich die Diskretisierung leicht optimieren lässt und das Optimum des diskretisierten Problems auch eine gute Approximation an eine Lösung des ursprünglichen Problems ist.

Das Verfahren wurde anhand zweier Probleme vorgestellt. Im Falle des Wächterproblems lieferte das Verfahren einen randomisierten Algorithmus, der allerdings eine extrem hohe Laufzeit hat. In dem Artikel [CEH04], der dieser Arbeit zugrundeliegt, wird darauf näher eingegangen und es werden Verbesserungen vorgestellt. Schließlich wird eine nahezu quadratische Laufzeit erreicht.

Beim Supermarkt-Problem war der erhaltene Algorithmus sogar recht effizient, was vor allem daran lag, dass wir auch eine geeignete obere Schranke für die gesuchte maximale Fläche hatten und so die Optimierung der Schätzfunktion lokal durchführen konnten.

Die relative Allgemeinheit des Verfahrens hat zur Folge, dass es auch auf andere Probleme anwendbar ist. Im Originalartikel [CEH04] wird auf weitere Wächterprobleme und Shape-Matching eingegangen.

Autorenverzeichnis

Ignaz Rutter
Studienrichtung: Informatik Diplom
8. Semester
Universität Karlsruhe
Email: `Ignaz.Rutter@gmx.net`

Literaturverzeichnis

[AS00] ALON, NOGA und JOEL H. SPENCER: *The Probabilistic Method*. Wiley-Interscience, zweite Auflage, 2000.

[CEH04] CHEONG, OTFRIED, ALON EFRAT und SARIEL HAR–PELED: *On finding a guard that sees most and a shop that sells most.* In: *Proceedings of the 15th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'04)*, Seiten 1098–1107, Philadelphia, PA, USA, 2004. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[GMMN88] GEWALI, LAXMI P., ALEX MENG, JOSEPH S. B. MITCHELL und SIMEON C. NTAFOS: *Path planning in 0/1/∞ weighted regions with applications.* In: *Proceedings of the 4th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG'88)*, Seiten 266–278, New York, NY, USA, 1988. ACM Press.

[Val98] VALTR, PAVEL: *Guarding galleries where no point sees a small area.* Israel Journal of Mathematics, 104:1–16, 1998.