Geometrische Spannbäume minimalen Durchmessers

Der *Durchmesser* eines gewichteten, ungerichteten Graphen ist definiert als der längste unter den kürzesten Pfaden zwischen allen Paaren von Knoten des Graphen. Unter einem Spannbaum minimalen Durchmessers versteht man den Spannbaum, der unter allen Spannbäumen des Graphen minimalen Durchmesser hat. Handelt es sich dabei speziell um einen *euklidischen Graphen*, der durch eine Punktmenge P aus n Punkte in der euklidischen Ebene induziert wird, so spricht man vom Problem des *geometrischen Spannbaums minimalen Durchmessers (GMDST)*, um das es im Folgenden geht.

Lange Zeit war zur Bestimmung des GMDST nur ein Algorithmus mit Laufzeit $\Theta(n^3)$ bekannt. Um diese Laufzeit zu erzielen wurde ausgenutzt, dass zu jeder Punktmenge ein monopolarer oder ein dipolarer GMDST existiert. Monopolar bedeutet hierbei, dass der Spannbaum genau einen, dipolar, dass er genau zwei innere Knoten besitzt. Mit dieser Erkenntnis lässt sich ein GMDST konstruieren, indem zu jedem Knoten aus P der zugehörige monopolare Spannbaum und zu jedem Knotenpaar aus P dipolare Spannbäume erzeugt werden und unter diesen ein minimaler Spannbaum ermittelt wird.

Für Anwendungen, in denen ein annähernd minimaler Spannbaum genügt, kann man stattdessen auf Approximationsschemata zurückgreifen. Spriggs et al. beschreiben beispielsweise einen Algorithmus, mit dem man einen Spannbaum bestimmen kann, der für beliebiges $\varepsilon > 0$ einen maximal um den Faktor $(1+\varepsilon)$ größeren Durchmesser besitzt als ein GMDST und der mit Laufzeit $O(n+\varepsilon^{-3})$ und Speicherbedarf $O(n)$ berechnet werden kann. Hierzu wird das Problem auf mehrere Instanzen eines einfacheren Problems reduziert, bei dem die Punkte auf einem $m \times m$ Gitter angeordnet sind und für jede Zeile des Gitters zwei Punkte als Kandidaten für die inneren Knoten eines monopolaren oder dipolaren Spannbaums vorgegeben sind.

Dieses vereinfachte Problem lässt sich effizient exakt lösen. Der optimale innere Knoten für einen monopolaren Spannbaum minimiert die Summe der Distanzen zu seinem entferntesten und zweitentferntesten Nachbarn. Mittels eines second-order furthest-neighbour Voronoi-Diagramms lässt sich ein kleinster monopolarer Spannbaum in Zeit $O(m \log m + n)$ bestimmen. Der optimale dipolare Spannbaum lässt sich in $O(m^2 + n)$ ermitteln. Hierzu wird ausgenutzt, dass im dipolaren Fall mit inneren Knoten p_1 und p_2, sofern diese auf einer horizontalen Linie liegen, eine vertikale Linie zwischen p_1 und p_2 derart existiert, dass im GMDST genau die Punkte auf der Seite von p_1 mit p_1 und die anderen Punkte mit p_2 verbunden sind. Diese Linie wird für das vorgegebene Punktepaar jeder Zeile mittels einer Sweepline ermittelt.

Zu den beiden Kandidaten einer Zeile kommt man durch Bestimmung eines Steinermonopols. Dies ist ein Gitterpunkt s der Zeile (nicht notwendig aus P), der als innerer Knoten den Durchmesser eines monopolaren Spannbaums von $P \cup \{s\}$ minimiert. Die beiden zu betrachtenden Kandidaten sind gerade die Punkte links und rechts des Steinermonopols.

Der Algorithmus geht nun zur Bestimmung des GMDST so vor, dass er, abhängig von ε, für verschiedene Orientierungen der Ebene, deren Anzahl durch $O(\varepsilon^{-1})$ beschränkt ist, eine Gitter-Transformation durchführt und somit das Problem auf mehrere Instanzen des beschriebenen vereinfachten Problems zurückführt. Die Orientierungen sind so gewählt, dass eines der entstehenden Gitter den inneren Knoten eines monopolaren oder die inneren Knoten eines dipolaren Spannbaums in einer Zeile hat, der maximal den $(1+\varepsilon)$-fachen Durchmesser eines GMDST besitzt.

Der durch das Approximationsschema gewonnene Laufzeitvorteil gegenüber den kubischen exakten Algorithmen stellt für Probleme, bei denen der Durchmesser nicht zwingend minimal sein muss, eine signifikante Verbesserung dar.