Maximale unabhängige Mengen in planaren Graphen

Im folgenden wird ein Approximationsalgorithmus für das $\mathcal{NP}$-vollständige Problem *Independent Set (IS)* in planaren Graphen beschrieben. Bei *IS* geht es darum, für einen Graphen $G = (V, E)$ die Größe einer maximalen Menge $V' \subseteq V$ von Knoten zu bestimmen, so dass V' keine Kante aus E bildet. Die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit kann durch Reduktion von *Vertex Cover* bewiesen werden.[1]

Der hier beschriebene Algorithmus von Brenda Baker (1994) läuft in $\mathcal{O}(8^k kn)$ und ist $(k/(k+1))$-optimal. Für ein festes k bekommen wir damit linearen Zeitaufwand und eine feste (relative) Gütegarantie. Für ein von $n := |E|$ abhängendes k kann zwischen Genauigkeit und Laufzeit abgewogen werden. Liegt k in $\mathcal{O}(\log n)$, so ist die Zeit polynomiell. Durch kleineres k wird das Ergebnis ungenauer, jedoch nähert sich die Gütegarantie asymptotisch 1 für große Probleminstanzen.

Grundlage des Algorithmus und seiner Eigenschaften für oben genanntes k ist die Zerlegung in sogenannte k-außenplanare Graphen. (1-)außenplanar sind Graphen, deren Knoten alle an der „Außenfacette“ liegen. Eine Teilgraph aus Knoten der i-ten Ebene umschliesst eine „Innenfacette“ i-ter Ebene. Knoten, die von einer Facette i-ter Ebene umschlossen werden, liegen in der $(i+1)$-ten Ebene. Liegen die Knoten nicht tiefer als in der k-ten Ebene im inneren, so heisst der Graph k-außenplanar.

Für unsere Zwecke lässt sich ein außenplanarer Graph zu einem Baum abstrahieren, in dem Innenknoten Facetten und Blätter Kanten repräsentieren. In diesem Baum lässt sich rekursiv durch Hinzunahme einzelner Kanten eine optimale Lösung für *IS* berechnen. Für k-außenplanare Graphen erhalten wir Bäume für alle außenplanaren Teilgraphen.

Um das Verfahren für k-außenplanare Graphen anzuwenden wird ein allgemeiner Graph in passende Stücke „geschnitten“ (sog. Scheiben). Dabei ist genau festgelegt, mit welchen anderen Scheiben sich eine Scheibe Schnittkanten teilt. Jedem Knoten in jedem Baum ist dabei eine Scheibe zugeordnet, die die Scheibe der Kinder beinhaltet. Für jede solcher Scheiben wird eine Tabelle erstellt, die die Größe möglicher unabhängiger Mengen angibt, abhängig davon, ob Knoten an der Grenze der Scheiben in der Menge liegen oder nicht. Diese Tabellen lassen sich durch dynamisches Programmieren zu einer Tabelle für den gesamten Graphen zusammensetzen. Die dort enthaltenen Werte sind dann mindestens $k/(k+1)$ so groß wie die Optimallösung. Ein Schritt des Zusammensetzens braucht $\mathcal{O}(8^k)$ Zeit und wird insgesamt (kn)-mal aufgerufen.

[1] vgl. Garey & Johnson