Aroras PTAS für das euklidische TSP

Wir präsentieren zwei polynomiale Approximationsschemata (PTAS) für das E-TSP Problem: Finde die *kürzeste Tour* der Länge Π_{opt} zwischen n Punkten im euklidischen Raum.

Viele negative Komplexitätsresultate haben Aroras PTAS zu einer Sensation gemacht. Er setzte Techniken ein, die einerseits polynomialen Aufwand ermöglichen und anderseits eine $(1+\epsilon)$-Approximation garantieren. Seine Vorgehensweise ist eine „teile-und-herrsche"-Strategie mit dynamischem Programmieren, die auf lokaler Optimierung basiert. Eine geringfügige Verschiebung der Punkte liefert zunächst eine äquivalente gerundete Instanz, die sich für Aufzählungen und Durchläufe besser eignet. Diese wird dann in kleinere Instanzen mit Hilfe einer randomisierten Form der Baumstruktur *Quadtree* zerlegt. Die Randomisierung kommt bei der Garantie der Approximation zum Einsatz und wird so realisiert: um das kleinste Quadrat $\mathcal{B}$, das die gegebene Punktemenge umfasst, legt man ein Quadrat $\mathcal{Q}$ mit doppelter Seitenlänge. Die zufällig in $[0, \text{Länge}(\mathcal{B})]$ gewählten Shifts a und b bestimmen die relative Position von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{Q}$. Der Baum entsteht dann durch iterative Spaltung von $\mathcal{Q}$ in vier Quadrate, bis die Blätter höchstens einen Punkt enthalten.

Ein wichtiges Werkzeug ist die Diskretisierung des Problems. Erzielt wird die Reduzierung der kombinatorischen Aufzählungen, die den exponentiellen Zeitaufwand verursachen. Hierfür werden *Portale* (Steiner-Knoten) äquidistant an den Seiten der Quadrate eingefügt. Jede Kreuzung einer Tour mit den Quadraten wird dann durch *Biegen* (Zerlegung des Pfads) zum nächsten Portal verschoben. Somit bilden die Portale Schnittstellen zwischen den einzelnen Instanzen, die *dynamisches Programmieren* erlauben: weiß man, durch welche Portale und in welcher Reihenfolge Kreuzungen mit einer Schnittstelle stattfinden, so kann man die angrenzenden Instanzen separat lösen. Der Parameter $m = O(|\text{Portale/Quadrat}|)$ ist der Schlüssel zur Einhaltung der naturgemäß entgegengesetzten Optimierungsziele für Zeitaufwand und Approximation.

In einem *Bottom-up*-Verfahren wird für alle Tripel {Quadrat, Portalmenge, Reihenfolge} die beste Tour berechnet. Für die Blätter (oder hinreichend kleine Instanzen) wird brute-force eingesetzt. Für größere Instanzen verfahren wir induktiv: wir berechnen alle Kombinationen {Schnittstelle, Lösungen}, wobei Schnittstellen zwischen einem Quadrat und seinen Kindern betrachtet werden, kombiniert mit den – bereits berechneten – Lösungen dieser Kinder. Der Wert der besten Tour wird jeweils gespeichert. Unter allen Touren, die Quadrate nur an Portalen kreuzen, erhalten wir eine optimale Tour der Länge Π_{port}. Der Aufwand für diese Berechnung ist $O(n \log n) \cdot O(m^m\, m!)$. Da eine optimale Tour kreuzungsfrei ist, entspricht die Auswahl einer Schnittstelle einer validen Klammerung. Diese Beobachtung senkt den Aufwand auf $O(n \log n \cdot 2^{O(m)})$. Für die Approximation müssen wir die Erwartung E_Π (über alle Wahlen von a und b) von $\Pi_{\text{port}} - \Pi_{\text{opt}}$ abschätzen. Ein *Zuschlagsargument* liefert: $E_\Pi \leq \Pi_{\text{opt}} \cdot (\log L)/m$. Die Wahl von $m = O(\log n/\epsilon)$ führt zum ersten PTAS mit Laufzeit $n^{O(1/\epsilon)}$. Aus Markovs Ungleichung erhalten wir: $\Pi_{\text{port}} \leq (1+\epsilon) \cdot \Pi_{\text{opt}}$ mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1/2$. Für das zweite PTAS führen wir (m, k)-leichte Touren ein: die zulässige Anzahl der Kreuzungen pro Quadrat ist $k = O(1/\epsilon)$. Der Aufwand ist dann $O(n \log n) \cdot O(m^k\, k!) = n \cdot (\log n)^{O(1/\epsilon)}$. Das *Patching-Lemma* überführt mit geringen Kosten $(\Pi_{\text{opt}}/\epsilon)$ eine optimale Tour in eine (m, k)-leichte Tour. Das Zuschlagsargument gibt dann analog zum ersten PTAS eine $(1+\epsilon)$-Approximation.

Aroras Ansätze sind unmittelbar auf den $\mathbb{R}^d$ erweiterbar und lösen analog eine Fülle geometrischer Probleme wie Minimaler Spannbaum und Steiner Baum. Eine praktikable Umsetzung ist jedoch – nach Aroras Angaben – noch nicht ausgearbeitet worden.