

BERECHNUNG KURZER GANZZAHLIGER
KREISBASEN IN GRAPHEN

Diplomarbeit
bei Prof. Dr. R. H. Möhring

vorgelegt von Torsten Ueckerdt
am Fachbereich Mathematik der
Technischen Universität Berlin

Berlin, 11. April 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Kreisbasen	9
1.1 Grundlagen	9
1.2 Die Determinante einer Basis	12
1.3 Gerichtete Kreisbasen	14
1.4 Ungerichtete Kreisbasen	16
1.5 Ganzzahlige Kreisbasen	17
2 Sehnen-Graphen	21
2.1 Zirkulanten	21
2.2 Minimale Tupel	24
2.3 Innen- und Außenbasis	25
2.4 Brücken	29
2.5 Sehnen	31
3 Die MCB-Probleme	35
3.1 Das MDCB-Problem	35
3.2 Das MUCB-Problem	36
3.3 Das MICB-Problem	40
4 Der Algorithmus von Horton	45
4.1 Unabhängigkeitssystem	45
4.2 Der <i>greedy</i> -Algorithmus	46
4.3 Die Horton-Familie	48
5 Der Algorithmus von De Pina	51
5.1 Zeugen	51
5.2 Der Algorithmus	52
5.3 Der Schichtgraph	53
5.4 Unterschiede zum Algorithmus von Horton	57
6 Die ganzzahligen Kreisbasen	59
6.1 Das Unabhängigkeitssystem	60
6.2 Die Horton-Familie	62
6.3 Zirkulationen und das MIZB-Problem	64

7	Unimodularität	69
7.1	Unimodularität und Gitter	69
7.2	Die HERMITE-Normalform	74
7.3	Ein Algorithmus zur Berechnung der HNF	77
7.4	Unimodularität und Determinanten	81
8	Eine Anpassung des Algorithmus von Horton	85
8.1	Die Grundidee	85
8.2	Erweiterbarkeit	87
8.3	Der Algorithmus	93
8.4	Suboptimalität	95
9	Eine Anpassung des Algorithmus von De Pina	101
9.1	Zeugen	101
9.2	Der Algorithmus	102
9.3	Der Schichtgraph	107
9.4	Das ganzzahlige Programm	111
9.5	Unterschiede zur Anpassung des Algorithmus von Horton	113
	Ausblick	115

Einleitung

Die Kreisbasen sind ein sehr altes Themengebiet das bereits im Jahre 1847 von Kirchhoff in [11] betrachtet wurde. Im Laufe der Zeit entstanden viele Algorithmen, die eine Kreisbasis eines gewichteten Graphen (G, w) benötigen und einige von ihnen können durch die Verwendung kurzer Kreisbasen beschleunigt werden. In der Arbeit [9] aus dem Jahr 1987 stellt J.D. Horton den ersten polynomiellen Algorithmus zur Berechnung einer minimalen Kreisbasis eines ungerichteten Graphen mit nicht-negativen Kantengewichten vor. Acht Jahre später, 1995, entwickelt J.C. De Pina in [4] einen weiteren Algorithmus für dieses Problem. Die Laufzeit sinkt dabei von $\mathcal{O}(m^3n)$ für den Algorithmus von Horton auf $\mathcal{O}(m^3 + mn^2 \log n)$ für den Algorithmus von De Pina.

Heute werden Kreisbasen unter anderem für die Taktfahrplanoptimierung öffentlicher Verkehrsnetze verwendet [13]. Die dort verwendeten Kreisbasen müssen jedoch zusätzlichen Anforderungen genügen, die beispielsweise von Fundamentalkreisbasen erfüllt werden. Eine kürzeste strikt fundamentale Kreisbasis zu finden, ist jedoch MAX-SNP schwer [5]. In [12] stellt C. Liebchen die für die Taktfahrplanoptimierung benötigten Kreisbasen, die *ganzzahligen Kreisbasen*, vor und charakterisiert diese als eine Unterklasse der gewöhnlichen Kreisbasen und zugleich als eine Oberklasse der Fundamentalkreisbasen. Ein vollständiges Bild von diesen und weiteren Kreisbasenklassen wird von C. Liebchen und R. Rizzi in [15] gegeben.

Der Komplexitätsstatus des Optimierungsproblems über ganzzahlige Kreisbasen bezüglich nicht-negativer Bogengewichtung ist bisher ungeklärt. Außerdem gibt es eine Reihe von Aussagen über gewöhnliche, das heißt gerichtete und ungerichtete, Kreisbasen, deren Wahrheitsgehalt bei der Übertragung auf ganzzahlige Kreisbasen ungeklärt ist. Dazu zählen die folgenden Punkte, die sich größtenteils speziell auf *minimale* ganzzahlige Kreisbasen, kurz MICB, beziehen. Im Rahmen gerichteter und ungerichteter Kreisbasen können die Entsprechungen der unter aufgeführten Fragen 1-4 mit Ja beantwortet werden, während die Frage 5 verneint werden muss. Innerhalb dieser Diplomarbeit werden Beweise dieser Aussagen aufgegriffen und ihre Übertragung auf ganzzahlige Kreisbasen näher erläutert.

1. Induzieren die ganzzahligen Kreisbasen ein Matroid?
2. Berechnet der *greedy*-Algorithmus eine MICB?
3. Weist jede MICB die gleiche Gewichtsfolge auf?
4. Birgt die Horton-Familie jede/eine MICB?

5. Kann der Einsatz nicht-elementarer Zirkulationen eine MICB verbessern?

Die Frage 1 wurde bereits in [14] verneint und die dortige Argumentation wird im Abschnitt 6.1 noch einmal wiedergegeben. Da die ganzzahligen Kreisbasen dennoch ein Unabhängigkeitssystem definieren und allein aus dem Fehlen der zusätzlichen Matroid-Eigenschaft der *greedy*-Ansatz nicht fehlschlagen muss, wird dieses Verfahren im Kapitel 8 untersucht. Im Abschnitt 8.4 wird ein Beispiel für einen Graphen angegeben, bei dem der *greedy*-Algorithmus jedoch tatsächlich ein suboptimales Ergebnis liefert. Damit kann auch Frage 2 mit Nein beantwortet werden. Der Graph dieses Gegenbeispiels erlaubt sogar eine weitere Gewichtung, unter der es zwei MICB gibt, deren Gewichtsfolgen sich unterscheiden. Damit lautet auch die Antwort auf Frage 3 Nein.

Die Frage 4, ob die in [9] eingeführte Horton-Familie des gewichteten Graphen (D, w) stets jede oder zumindest eine MICB beinhaltet, konnte nicht beantwortet werden. Der Abschnitt 6.2 zeigt jedoch anhand eines Beispiels, warum die Argumentation für ungerichtete Kreisbasen nicht auf ganzzahlige Kreisbasen übernommen werden kann. Es konnte sogar bisher nicht bewiesen werden, dass es genügt, sich auf elementare Kreise zu beschränken, wenn man eine minimale ganzzahlige Basis des Zykelraumes sucht. Im Abschnitt 6.3 wird bewiesen, dass diese Einschränkung für *ungerichtete* Kreisbasen vorgenommen werden kann und dass der dort angegebene Beweis nicht auf ganzzahlige Kreisbasen übertragen werden kann.

Aufbau dieser Arbeit

Das Kapitel 1 führt zunächst in Abschnitt 1.1 die wichtigen Begriffe dieses Themengebietes ein. Im Abschnitt 1.2 wird die *Determinante einer Kreisbasis* definiert, anhand derer man zu einer Kreisbasis entscheiden kann, ob sie gerichtet, ungerichtet oder ganzzahlig ist. Die darauffolgenden Abschnitte 1.3, 1.4 und 1.5 benennen und beweisen eine jeweilige Charakterisierung der drei Klassen von Kreisbasen mit Hilfe ihrer Determinante.

Im Kapitel 2 wird schrittweise eine Klasse von Graphen entwickelt, die trotz ihrer geringen Knotenzahl Kreisbasen mit hoher Determinante ausweisen. Die Grundlage bilden die *Zirkulanten* (Abschnitt 2.1), die auch in [6] betrachtet werden. Im Abschnitt 2.3 werden zwei Mengen von Kreisbasen der Zirkulanten, die *Innenbasen* und die *Außenbasen*, definiert, deren Determinanten in Korollar 2.3.6 angegeben werden. Die Zirkulanten können dann in zwei Konstruktionsschritten so erweitert werden, dass die Möglichkeit einer Bogengewichtung w entsteht, unter der eine gewählte Innen- oder Außenbasis die eindeutige minimale Kreisbasis darstellt.

Im Abschnitt 2.4 werden zunächst sogenannte *Brücken* eingesetzt und man erhält somit die *verallgemeinerten PETERSEN-Graphen*. Auch Innen- und Außenbasen erhalten eine Entsprechung in dieser Graphenklasse. In einem zweiten Schritt wird in Abschnitt 2.5 eine Menge zusätzlicher Kanten, die *Sehnen*, in die verallgemeinerten PETERSEN-Graphen eingefügt. Die entstehenden *Sehnen-Graphen* beinhalten wiederum Innen- und Außenbasen und bieten nun zusätzlich die nötige Struktur, um zu einer solchen Basis eine Gewichtungsfunktion zu definieren, unter der diese Basis eine minimale Kreisbasis darstellt.

Das Kapitel 3 benutzt die Innen- und Außenbasen der Sehnen-Graphen, um Instanzen (D, w) anzugeben, in denen die eindeutige minimale gerichtete Kreisbasis nicht ungerichtet ist (Abschnitt 3.2) beziehungsweise, in denen die eindeutige minimale ungerichtete Kreisbasis nicht ganzzahlig ist (Abschnitt 3.3). Solche Beispiele belegen die Eigenständigkeit der zugehörigen Optimierungsprobleme und wurden bereits in [15] aufgeführt. Allerdings konnte mit den hier entwickelten Methoden die Knoten- und Kantenanzahl dieser Beispiele gesenkt werden.

Das Kapitel 7 entwickelt die algebraische Theorie, die in den Kapiteln 8 und 9 benötigt wird. Der Abschnitt 7.1 definiert die *Unimodularität* einer Kreismenge und führt eine zunächst eine Interpretation im Rahmen der Untergitter des \mathbb{Z}^d an.

Die unimodularen Kreismengen erweisen sich als genau diejenigen, die zu einer ganzzahligen Zirkulationsbasis erweiterbar sind (Korollar 8.2.3) und sind somit beim iterativen Aufbauen einer ganzzahligen Kreisbasis von besonderem Interesse. Die Frage, ob es sogar einen elementaren Kreis gibt, der eine unimodulare Kreismenge so ergänzt, dass eine wiederum unimodulare Menge entsteht, kann auf eine Charakterisierung der Kreismatrix zurückgeführt werden (Lemma 8.2.6). Ob dieses Kriterium stets erfüllt und somit jede unimodulare Menge sogar in einer ganzzahligen Kreisbasis enthalten ist, konnte nicht geklärt werden. Das Beispiel 8.2.7 liefert jedoch eine unimodulare Kreismenge, bei der sich die Suche nach einem geeigneten elementaren Kreis unter Umständen schwierig gestaltet.

Ein Test auf Unimodularität kann auf das Bestimmen einer HERMITE-Normalform zurückgeführt werden. Dieser Zusammenhang wird im Abschnitt 7.2 aufgezeigt, während im Abschnitt 7.3 ein effizientes Verfahren zur Berechnung der HERMITE-Normalform angibt.

Im Kapitel 4 wird mit dem Algorithmus von Horton ein polynomielles Verfahren zum Bestimmen einer minimalen ungerichteten Kreisbasis (MUCB-Problem) angegeben. Dies beinhaltet unter anderem die Definition des Matroids im Abschnitt 4.1 und der Horton-Familie eines gewichteten Graphen im Abschnitt 4.3. Der Algorithmus von Horton wird im Kapitel 8 so geändert, dass eine Heuristik für das MICB-Problem entsteht. Die dabei auftretenden Probleme der Zulässigkeit, werden anhand der Unimodularität im Abschnitt 8.2 behandelt. Im Abschnitt 8.4 werden die Sehnen-Graphen des Kapitels 2 herangezogen, um ein Beispiel zu konstruieren, in dem die vorgestellte Heuristik ein suboptimales Ergebnis liefert. Aus diesem Beispiel ergibt sich auch eine Instanz des MICB-Problems mit zwei minimalen ganzzahligen Kreisbasen mit unterschiedlichen Gewichtsfolgen.

Mit dem Algorithmus von De Pina wird im Kapitel 5 ein weiteres polynomielles Lösungsverfahren für das MUCB-Problem erläutert. Die darin enthaltenen Schlüsselideen sind die *Zeugen* in Abschnitt 5.1 und der *Schichtgraph* in Abschnitt 5.3. Das Kapitel 9 passt den Algorithmus von De Pina an ganzzahlige Kreisbasen an und so wird eine zweite Heuristik erhalten. Der Abschnitt 9.1 befasst sich mit der Anpassung der Zeugen, während der Abschnitt 9.3 die Idee des Schichtgraphen erweitert. Zusätzlich wird durch ein ganzzahliges Programm in Abschnitt 9.4 eine Alternative zum Schichtgraphen gegeben.

Bevor diese beiden Heuristiken vorgestellt werden, geht das Kapitel 6 auf einige der weiter oben bereits erwähnten Fragen ein, die aufgeworfen werden, wenn man von ungerichteten Kreisbasen auf ganzzahlige Kreisbasen übergeht.

Am Schluss der Arbeit steht ein Ausblick, in dem offen gebliebene Fragen zusammengefasst und weitere Ansatzmöglichkeiten angedeutet werden.

Kapitel 1

Kreisbasen

Der Abschnitt 1.1 dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Festlegung der wichtigsten Begriffe dieses Themengebietes. Ausgehend von einem gerichteten Graphen werden *gerichtete Kreise*, der *Zykelraum* und der Begriff der *Kreisbasis* definiert. In 1.2 wird die *Determinante*, eine wichtige Kenngröße einer Kreisbasis, hergeleitet und in den Abschnitten 1.3, 1.4 und 1.5 werden die Kreisbasen anhand ihrer Determinante in *gerichtete*, *ungerichtete* und *ganzzahlige* Kreisbasen unterteilt.

1.1 Grundlagen

Die Grundlage bildet ein einfacher 2-fach knotenzusammenhängender gerichteter Graph $D = (V, A)$ mit Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und Bogenmenge $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Der dem Graphen D zugrundeliegende ungerichtete Graph wird mit $G(D) = (V, E)$ bezeichnet und hat die gleiche Knotenmenge wie D . Die Kantenmenge von $G(D)$ entsteht, indem man die Orientierungen der Bögen in A „vergisst“. In $G(D)$ ist also $e = \{v_i, v_j\}$ genau dann eine Kante, wenn entweder $a_{ij} = (v_i, v_j)$ oder $a_{ji} = (v_j, v_i)$ ein Bogen in D ist. Analog projizieren sich Teilgraphen in D auf Teilgraphen in $G(D)$.

Definition 1.1.1. Ein *gerichteter Kreis* ist ein Paar aus einem Teilgraphen C in D , dessen Projektion auf den zugrundeliegenden Graphen $G(D)$ einen knotendisjunkten Kreis ergibt, und einer *Orientierung*.

Eine Orientierung entspricht einem Durchlaufsinne des Kreises, also der zyklischen Reihenfolge in der die Knoten von C durchlaufen werden. Ist solch eine Orientierung gewählt, so partitioniert man die Bogenmenge von C in zwei disjunkte Teilmengen C^+ und C^- . Dabei sind die C^+ -Bögen die Bögen, deren Richtung dem Durchlaufsinne des Kreises entsprechen und die C^- -Bögen die Bögen, die entgegengesetzt zum Durchlaufsinne verlaufen. Kehrt man also die Richtung aller C^- -Bögen um, so erhält man einen gerichteten Zykel, der entlang der Orientierung des Kreises verläuft. Der Einfachheit halber wird mit C sowohl der Teilgraph, als auch dessen Bogenmenge $C^+ \dot{\cup} C^-$ bezeichnet.

Ist \mathbb{K} ein Körper, so wird zu einer partitionierten Bogenmenge $B = B^+ \dot{\cup} B^-$ ein Inzidenzvektor über \mathbb{K} definiert. Da diese Zuordnung bijektiv erfolgt, bezeichnet man den Inzidenzvektor wiederum mit B .

Definition 1.1.2. Der *Inzidenzvektor* $B \in \mathbb{K}^m$ einer partitionierten Bogenmenge $B = B^+ \dot{\cup} B^- \subseteq A$ ist gegeben durch:

$$B(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in B^+ \\ -1 & \text{falls } a \in B^- \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus gerichteten Kreisen entstehen so Vektoren des \mathbb{K}^m , wobei $m = |A|$ die Anzahl der Bögen des Graphen angibt. Kehrt man die Orientierung eines gerichteten Kreises um, so entspricht das einer Multiplikation seines Inzidenzvektors mit $-1 \in \mathbb{K}$. Zur Verkürzung werden die Begriffe *gerichteter Kreis* und *Inzidenzvektor eines gerichteten Kreises* einfach mit *Kreis* bezeichnet.

Bemerkung 1.1.3. In dieser Arbeit wird für \mathbb{K} stets der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen oder der GALOIS-Körper $GF(2) = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen gewählt.

Eine Menge von Kreisen $\{C_1, \dots, C_k\}$ fasst man zu einer Matrix Γ zusammen, indem man ihre Inzidenzvektoren als Spalten nebeneinander schreibt. Γ ist also eine Bogen-Kreis-Inzidenzmatrix und heißt *Kreismatrix* von $\{C_1, \dots, C_k\}$.

$$\Gamma = [C_1 \cdots C_k] = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Die Inzidenzvektoren aller gerichteten Kreise eines Graphen spannen einen Untervektorraum des \mathbb{K}^m auf. Dieser Vektorraum heißt der *Zykelraum* oder *Kreisraum* von D und wird mit $Z_{\mathbb{K}}(D)$ bezeichnet. Wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, welcher Körper gewählt wurde oder die Wahl des Körpers keinen Unterschied ergibt, wird auch kurz $Z(D)$ geschrieben.

Definition 1.1.4. Eine *Kreisbasis* von D ist eine Menge von Kreisen in D , deren Inzidenzvektoren eine Basis des Zykelraumes bilden.

Eine Kreisbasis ist eine kardinalitätsmaximale linear unabhängige Menge von Kreisen und jeder Kreis in D kann als eine eindeutige Linearkombination der Basiskreise geschrieben werden. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.2 dargestellt. Zum Bestimmen der Dimension der Zykelraumes wird nun eine einfach strukturierte Kreisbasis angegeben. Die folgende Argumentation gilt unabhängig vom gewählten Körper.

Definition 1.1.5. Sei $T \subseteq A$ ein spannender Baum in D und $b \in A \setminus T$ ein Bogen außerhalb von T . Dann schließt b einen eindeutigen Kreis in T . Der *Fundamentalkreis* von b bezüglich T ist der zugehörige gerichtete Kreis $F(b)$, der b als Vorwärtsbogen enthält.

Proposition 1.1.6. Die Menge der $m - n + 1$ Fundamentalkreise eines spannenden Baumes ist linear unabhängig. Es gilt daher

$$\dim Z(D) \geq m - n + 1.$$

Beweis. Jeder Fundamentalkreis $F(b)$ besteht aus dem Nichtbaumbogen b und einer Menge von Baumbögen. Ist $b \notin T$ ein Nichtbaumbogen, so ist $F(b)$ der einzige dieser Fundamentalkreise, der b enthält. Demnach ist jeder Einheitsvektor des \mathbb{K}^{m-n+1} unter den Zeilen der Kreismatrix $\Gamma = [F(b_1) \cdots F(b_{m-n+1})]$. Γ hat somit vollen Spaltenrang und die Fundamentalkreise sind linear unabhängig. \square

Nach Proposition 1.1.6 ist die Dimension des Zykelraumes mindestens $m - n + 1$. Tatsächlich ist dies die genaue Dimension und die angegebene Menge der $m - n + 1$ Fundamentalkreise eines spannenden Baumes bildet eine Kreisbasis. Um dies zu zeigen, kann man eine $n - 1$ elementige Menge linear unabhängiger Vektoren des \mathbb{K}^m angeben, die *orthogonal* auf jedem Kreis stehen. Damit stammen diese Vektoren aus dem *orthogonalen Komplement* $Z(D)^\perp$ des Zykelraumes. Es gilt dann

$$\dim Z(D)^\perp \geq n - 1$$

und äquivalent dazu

$$\dim Z(D) = \dim \mathbb{K}^m - \dim Z(D)^\perp \leq m - (n - 1). \quad (1.1.1)$$

Ein *gerichteter Schnitt* ist eine Menge $S \subseteq A$ von Bögen deren Projektion auf $G(D)$ einem *induzierten Schnitt* entspricht. Zu jedem induzierten Schnitt gibt es genau zwei Knotenmengen, die diesen induzieren. Analog zur Orientierung eines gerichteten Kreises kann man jedem gerichteten Schnitt zwei Orientierungen geben, indem man eine der beiden induzierenden Mengen als „Ursprung“ auswählt. Sei $U \subseteq V$ diese ausgewählte Knotenmenge. Man schreibt dann $S = S^+ \dot{\cup} S^-$ wobei S^+ genau die Bögen des Schnittes mit Anfangspunkt in U und S^- genau die Bögen mit Endpunkt in U enthält.

Sei $T \subseteq A$ ein spannender Baum in D und $t = (u, v) \in T$ ein Bogen in T . Dann teilt t den Baum in genau zwei Teilbäume. Sei U die Knotenmenge des Teilbaumes der u enthält. Der *Fundamentalschnitt von t bezüglich T* ist der durch U induzierte gerichtete Schnitt $S(t)$, dessen Orientierung U als „Ursprung“ wählt.

Proposition 1.1.7. *Die Menge der $n - 1$ Fundamentalschnitte eines spannenden Baumes ist linear unabhängig.*

Beweis. Jeder Fundamentalschnitt $S(t)$ enthält genau einen Bogen des Baumes T , nämlich t . Umgekehrt ist jeder Baumbogen t in genau einem Fundamentalschnitt enthalten. Die Matrix $[S(t_1) \cdots S(t_{n-1})]$ enthält somit eine Permutation der $(n - 1) \times (n - 1)$ -Einheitsmatrix, welche die lineare Unabhängigkeit der Fundamentalschnitte bezeugt. \square

Proposition 1.1.8. *Jeder gerichtete Kreis C steht orthogonal auf jedem gerichteten Schnitt S .*

Beweis. Seien C ein gerichteter Kreis und S ein gerichteter Schnitt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} C^T S &= \sum_A C(a) \cdot S(a) \\ &= \sum_{C \cap S} C(a) \cdot S(a) && (1.1.2) \\ &= \sum_{C^+ \cap S^+} (1 \cdot 1) + \sum_{C^- \cap S^-} ((-1) \cdot (-1)) \\ &\quad + \sum_{C^+ \cap S^-} (1 \cdot (-1)) + \sum_{C^- \cap S^+} ((-1) \cdot 1) \\ &= |C^+ \cap S^+| + |C^- \cap S^-| - (|C^+ \cap S^-| + |C^- \cap S^+|) && (1.1.3) \end{aligned}$$

Ändert man nun die Orientierung eines Bogens $a \in C \cap S$, so resultiert das in einer Multiplikation von $C(a)$ und $S(a)$ mit -1 . Das Produkt $C(a) \cdot S(a)$ in (1.1.2) ergibt daher nach der Umorientierung denselben Wert und die Richtung aller Rückwärtsbögen des Kreises C kann umgekehrt werden, ohne den Wert des Skalarproduktes zu ändern. Gleichung (1.1.3) vereinfacht sich zu

$$C^T S = \left| \tilde{C}^+ \cap \tilde{S}^+ \right| - \left| \tilde{C}^+ \cap \tilde{S}^- \right|. \quad (1.1.4)$$

Die Mengen \tilde{S}^+ , \tilde{S}^- und \tilde{C}^+ auf der rechten Seite von (1.1.4) entsprechen den Partitionen eines gerichteten Schnittes \tilde{S} und eines gerichteten Kreises \tilde{C} in einem Graphen \tilde{D} nach der Umorientierung einiger Bögen. Die linke Seite $C^T S$ bezeichnet hingegen noch immer den Wert des Skalarproduktes der ursprünglichen C und S im ursprünglichen Graphen. Sei $\tilde{U} \subset V(\tilde{D})$ die \tilde{S} -induzierende Knotenmenge. Da \tilde{C} nun ein gerichteter Zykel ist, verlaufen bei einer Traversierung die Bögen abwechselnd von \tilde{U} nach \tilde{U}^C und von \tilde{U}^C nach \tilde{U} . Insbesondere ist die Anzahl der Übergänge $\tilde{U} \rightarrow \tilde{U}^C$ und $\tilde{U}^C \rightarrow \tilde{U}$ gleich und die rechte Seite in (1.1.4) gleich 0. \square

Mit Proposition 1.1.6 und (1.1.1) folgt

$$\dim Z(D) = m - n + 1.$$

Jede Kreisbasis besteht aus genau $\nu = m - n + 1$ Kreisen. Die Kenngröße ν ist unabhängig vom gewählten Körper \mathbb{K} und wird die *zyklomatische Zahl* des Graphen genannt.

1.2 Die Determinante einer Basis

Für eine Kreisbasis B sei die *Basismatrix* Γ die $(m \times \nu)$ -Kreismatrix, deren Spalten die Inzidenzvektoren der Basiskreise sind. Da die Basiskreise linear unabhängig sind ist der Rang von Γ gerade ν und somit gibt es auch mindestens eine Menge von ν linear unabhängigen *Zeilen* in Γ . Die Basismatrix ist eine Bogen-Kreis-Inzidenzmatrix – eine Auswahl von Zeilen korrespondiert also zu einer Menge von Bögen von D . Ist $M \subseteq A$ eine Teilmenge der Bögen von D , so wird die Untermatrix von Γ , die durch das Wählen der zu M gehörenden Zeilen entsteht, mit Γ_M bezeichnet. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen einer ν -elementigen Menge M und der Determinante der entstehenden quadratischen Untermatrix Γ_M .

Lemma 1.2.1. *Eine Auswahl Γ_M von Zeilen ist genau dann maximal linear unabhängig, wenn es einen Spannbaum T von D gibt, für den $M = A \setminus T$ gilt.*

Beweis. Der Beweis zeigt zunächst, dass die Auswahl M der Nichtbaum-Bögen eines Spannbaumes T zu linear unabhängigen Zeilen in Γ_M führt.

Sei T ein beliebiger Spannbaum und Φ die Basismatrix der Fundamentalbasis zu T . Da B (die Kreisbasis mit Γ als Basismatrix) eine Basis ist, können die Spalten in Φ als Linearkombination der Spalten in Γ dargestellt werden. Es gibt also eine Matrix $\Lambda \in \mathbb{K}^{(\nu, \nu)}$ so dass $\Gamma \Lambda = \Phi$. Eingeschränkt auf die Zeilen zu den Nichtbaum-Bögen ergibt sich $\Gamma_M \Lambda = \Phi_M$. Aus dem Beweis der Proposition 1.1.6 geht hervor, dass Φ_M gerade eine Permutation der Einheitsmatrix ist. Demnach

können die Spalten von Λ so permutiert werden, dass sich die Inverse zu Γ_M ergibt. Insbesondere ist Γ_M regulär.

Sei umgekehrt M eine Bogenmenge, die zu einer Auswahl linear unabhängiger Zeilen von Γ korrespondiert. Angenommen die Bögen in $A \setminus M$ enthielten einen Kreis C . Da B eine Basis ist, kann dieser Kreis durch die Basis dargestellt werden. Es gibt also einen eindeutig bestimmten Vektor $\lambda \in \mathbb{K}^\nu \setminus \{0\}$, so dass $C = \Gamma\lambda$. Die Einschränkung dieses Gleichungssystems auf die Zeilen zu M liefert $0 = \Gamma_M\lambda$ und somit eine nicht-triviale Linearkombination der Null im \mathbb{K}^ν . Damit sind die Zeilen von Γ_M linear abhängig. \square

Nach Lemma 1.2.1 ist $\det \Gamma_M$ genau dann ungleich 0, wenn M einen *Cobaum* darstellt. Außerdem liefert das Lemma Erkenntnisse über die Darstellung eines Kreises C durch eine Kreisbasis B . Die *Darstellung von C* ist die eindeutige Linearkombination der Basiskreise $\{B_i\}_{i \in [\nu]}$ zu C :

$$C = \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_\nu B_\nu.$$

Der Koeffizientenvektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ ist die eindeutige Lösung des überbestimmten Gleichungssystems $\Gamma x = C$. Der Beweis des Lemmas 1.2.1 zeigt nun, dass, falls M ein Cobaum ist, λ bereits die Lösung des Untersystems $\Gamma_M x = C_M$ ist. Die restlichen Gleichungen $\Gamma_{A \setminus M} x = C_{A \setminus M}$ werden dann ebenfalls durch λ erfüllt. Dies bedeutet unter anderem, dass ein gerichteter Kreis bereits durch seinen Anteil auf einem Cobaum eindeutig bestimmt ist. Dabei ist sowohl für das Lösen von $\Gamma x = C$ als auch für das eindeutige Bestimmen eines gerichteten Kreises die Wahl des Cobaaumes unerheblich.

Lemma 1.2.2. *Sei Γ die Basismatrix einer Kreisbasis B . Für je zwei Cobäume M, M' gilt $\det \Gamma_M = \pm \det \Gamma_{M'}$.*

Beweis. Sei $M = \{a_1, \dots, a_\nu\}$ die Menge der Nichtbaum-Bögen zum Spannbaum T und Φ die Kreismatrix mit Fundamentalkreis $F(a_i)$ in Spalte i . Φ ist also eine Basismatrix der Fundamentalbasis zu T und die Einschränkung von Φ auf die Zeilen zu M ergibt die $(\nu \times \nu)$ -Einheitsmatrix. Demnach gilt $\Phi_M \Gamma_M = \Gamma_M$. Die Matrix Γ_M ist also die eindeutige Lösung des regulären Gleichungssystems $\Phi_M X = \Gamma_M$. Nach den obigen Betrachtungen erfüllt Γ_M dann auch das überbestimmte Gleichungssystem $\Phi X = \Gamma$.

Die Einschränkung von $\Phi \Gamma_M = \Gamma$ auf die Zeilen die zu M' gehören ergibt dann $\Phi_{M'} \Gamma_M = \Gamma_{M'}$. Nun ist Φ total unimodular (Vergleiche [18]) und $\Phi_{M'}$ eine reguläre Untermatrix von Φ . Daher gilt $\det \Phi_{M'} = \pm 1$ und mit der Multiplikativität der Determinante folgt $\det \Gamma_M = \pm \det \Gamma_{M'}$. \square

Der Beweis von Lemma 1.2.2 benutzt die einfache Struktur einer Fundamentalbasis. Da jeder Fundamentalkreis $F(a)$ einen privaten Bogen, nämlich a , bezüglich der Fundamentalbasis hat, muss $F(a)$ genau mit dem Faktor in der Linearkombination eines Kreises auftreten, mit dem der darzustellende Kreis diesen Bogen a benutzt. Ist Φ eine Basismatrix der Fundamentalbasis, so gilt für einen gerichteten Kreis C :

$$C = \sum_{a \in A \setminus T} C_a \cdot F(a) = \Phi C_{A \setminus T} \quad (1.2.1)$$

Bemerkung 1.2.3. Des Weiteren macht der Beweis essentiellen Gebrauch von der totalen Unimodularität der Kreismatrix Φ . Es ist jedoch zu bemerken, dass nicht jede Kreisbasis eine total unimodulare Basismatrix aufweist. Kreisbasen mit total unimodularen Basismatrizen gibt es jedoch auch außerhalb der Fundamentalbasen.

Da nach den Lemmata 1.2.1 und 1.2.2 der Absolutbetrag der Determinante einer jeden regulären $(\nu \times \nu)$ -Untermatrix von Γ invariant ist, ist die *Determinante einer Kreisbasis* im folgenden Sinne wohldefiniert.

Definition 1.2.4. Sei B eine Kreisbasis von D mit Kreismatrix Γ und T ein beliebiger spannender Baum von D . Sei Γ_M die Untermatrix, die durch das Streichen der Zeilen die zu T gehören aus Γ entsteht. Dann ist die *Determinante von B* definiert als

$$\det(B) := |\det \Gamma_M|.$$

Diese Definition ist, im Gegensatz zu Lemma 1.2.1 und 1.2.2, *abhängig* von der Wahl des Körpers \mathbb{K} , da die Determinante über diesem Körper berechnet wird (siehe Abbildung 1.3). Wenn der Körper hervorgehoben werden soll, wird deshalb auch $\det_{\mathbb{K}}(B)$ geschrieben. Der Wert der Determinante ist ein Element des Körpers. Wurde beispielsweise der Körper $GF(2) = \{0, 1\}$ gewählt, so ist die Determinante einer Matrix entweder 0 oder 1. Kreisbasen über \mathbb{R} haben, da die Einträge ihrer Basismatrizen ganzzahlig sind, auch ganze Zahlen als Determinanten. Dabei können jedoch durchaus auch höhere Werte als 1 auftreten.

1.3 Gerichtete Kreisbasen

Kreisbasen über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen werden *gerichtete Kreisbasen* genannt. Dieser Abschnitt wird die Begriffe gerichteter Kreis, Inzidenzvektor, Zykelraum und Kreisbasis in diesem Spezialfall mit kleinen Beispielen illustrieren. Außerdem wird der Einfluß der Orientierung des Graphen und der Basiskreise auf die Determinante erörtert.

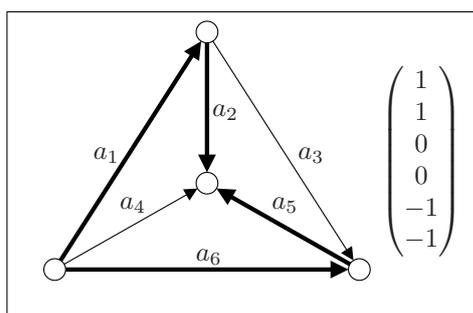


Abbildung 1.1: Eine Orientierung des \mathcal{K}_4 , ein gerichteter Kreis und dessen Inzidenzvektor.

Definition 1.3.1. Sei G ein ungerichteter Graph. Eine *Orientierung* von G ist ein gerichteter Graph D , dessen zugrundeliegender ungerichteter Graph gerade G ist: $G(D) = G$ (siehe Abbildung 1.1).

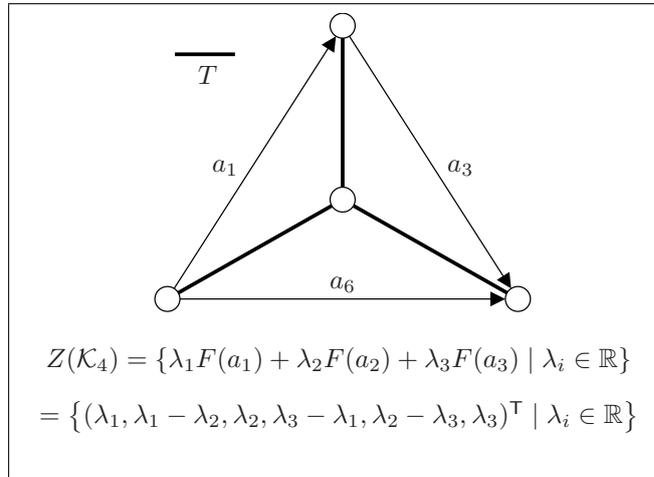


Abbildung 1.2: Der Zykelraum des \mathcal{K}_4 mit der gewählten Orientierung und die Fundamentalbasis $\{F(a_1), F(a_2), F(a_3)\}$ bezüglich eines Spannbaumes T .

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det \Gamma_{\{a_1, a_3, a_6\}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Abbildung 1.3: Die Basismatrix einer weiteren Kreisbasis und deren Determinante.

Die Begriffe des zugrundeliegenden ungerichteten Graphen und der Orientierung sind im Falle von einfache Graphen ohne parallele oder antiparallele Bögen oder Schleifen konsistent, das heißt, dass jeder gerichtete Graph D eine Orientierung seines zugrundeliegenden ungerichteten Graphen $G(D)$ ist. Sind zwei gerichtete Graphen D, D' Orientierungen desselben ungerichteten Graphen, so heißt D' eine *Umorientierung* von D . D' kann durch schrittweise Richtungswechsel einzelner Bögen aus D erhalten werden. Jedes Zwischenergebnis ist wiederum eine Orientierung von $G(D)$. Mit dem Graphen D können auch alle Kreise angepasst und somit wieder gerichteten Kreisen im entstandenen Graphen D' zugeordnet werden. Ist C ein beliebiger Kreis und $a \in C$ ein Bogen, die in der Umorientierung die Richtung gewechselt hat, so entspricht das einem Wechsel des Bogens a von C^+ nach C^- oder umgekehrt und im Inzidenzvektor einer Multiplikation der Komponente $C(a)$ mit -1 . Der Durchlaufsinne des Kreises bleibt dabei stets erhalten und so kann man von *dem gleichen Kreis* vor und nach der Umorientierung sprechen.

Lemma 1.3.2. *Die Determinante einer Kreisbasis ist invariant unter Umorientierung des Graphen.*

Beweis. Ein Richtungswechsel des Bogens a entspricht der Multiplikation der

Zeile Γ_a mit -1 und beeinflusst somit nur das Vorzeichen und nicht den Absolutbetrag einer jeden Unterdeterminante. \square

Ob eine Menge von gerichteten Kreisen eine Kreisbasis einer Orientierung von $G(D)$ bildet, ist also unabhängig von der Wahl dieser Orientierung.

Ein Wechsel der Orientierung eines Basiskreises entspricht der Multiplikation der zugehörigen Spalte der Basismatrix mit -1 und ändert somit nicht den Absolutbetrag der Unterdeterminanten. Für die lineare Unabhängigkeit von Kreismengen und die Determinanten gerichteter Kreisbasen ist die Orientierung des Graphen und der Kreise also irrelevant und so werden die Graphen, Kreise und Kreisbasen in den Beispielen oft als ungerichtete Versionen angegeben. Die Inzidenzvektoren, der Zykelraum und die Darstellung eines Kreises durch eine Basis sind allerdings abhängig von den gewählten Orientierungen. Auch die Berechnung der Determinante bedarf dieser Festlegungen, obwohl jede einzelne Wahl auf dasselbe Ergebnis führt.

Bemerkung 1.3.3. Wie der gerichtete Graph orientiert ist, hat keinen Einfluß auf die lineare Unabhängigkeit von Kreisen. Es ist aber wichtig, *dass* der Graph orientiert und somit *kein ungerichteter Graph* ist.

Abschliessend soll noch einmal festgehalten werden:

$$B \text{ gerichtete Kreisbasis} \iff \det_{\mathbb{R}}(B) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (1.3.1)$$

1.4 Ungerichtete Kreisbasen

Ungerichtete Kreisbasen sind Kreisbasen über dem Körper $\mathbb{K} = GF(2)$. Werden die Inzidenzvektoren gerichteter Kreise über $GF(2) = \{0, 1\}$ betrachtet, so kann wegen $1 = -1$ nicht mehr unterschieden werden in welche Richtung ein Bogen zeigt oder welcher Durchlaufsinns für einen Kreis gewählt wurde. Im Grunde kann daher von dem *ungerichteten* Graphen $G(D) = (V, E)$ und elementaren Kreisen $C \subseteq E$ ohne Zugabe eines Durchlaufsinns ausgegangen werden. Es ist allerdings wichtig, diese beiden Vorstellungen sorgfältig voneinander zu trennen. Kreisbasen über $GF(2)$ sind – wie Kreisbasen über \mathbb{R} auch – Mengen gerichteter Kreise, die wiederum partitionierte Bogenmengen eines gerichteten Graphen D sind. Aus beiden Typen, gerichteten und ungerichteten Kreisbasen, erhält man durch Weglassen der Richtungen der Bögen und Orientierungen der Basiskreise eine Menge elementarer Kreise in zugrundeliegenden ungerichteten Graphen $G(D)$. Die jeweiligen Gründe für das Weglassen der Richtungen und Orientierung unterscheiden sich jedoch. Im Falle der gerichteten Kreisbasen über \mathbb{R} ist die Wahl dieser Orientierungen für die lineare Unabhängigkeit und die Determinante zwar unerheblich, Umorientierungen ergeben aber andere Inzidenzvektoren und Linearkombinationen. Unterdessen führt im Fall $\mathbb{K} = GF(2)$ jede Umorientierung des Graphen und der Basiskreise bereits auf *dieselben Inzidenzvektoren*.

Dieser Unterschied ist so erheblich, dass es gerichtete Kreisbasen gibt, die über $GF(2)$ *linear abhängig* sind.

Beispiel 1.4.1 (Eine gerichtete Kreisbasis, die keine ungerichtete Kreisbasis ist). Betrachte \mathcal{K}_4 , den vollständigen Graphen auf vier Knoten, mit einer beliebigen Orientierung. Ohne die Unterscheidung in der Orientierung der Kreise weist dieser Graph genau drei Hamiltonkreise auf. Die Abbildungen 1.1 und 1.3

bezeugen, dass diese eine Kreisbasis über \mathbb{R} bilden. Über $GF(2)$ sind diese Kreise allerdings linear abhängig:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ob eine gerichtete Kreisbasis auch ungerichtet, also eine Kreisbasis über $GF(2)$ ist, kann mit Hilfe der Determinante der Kreisbasis, wie sie im Abschnitt 1.2 definiert wurde, bestimmt werden.

Lemma 1.4.2. *Eine gerichtete Kreisbasis B ist genau dann ungerichtet, wenn $\det_{\mathbb{R}}(B) \bmod 2 = 1$.*

Beweis. Inzidenzvektoren gerichteter Kreise über \mathbb{R} sind stets ganzzahlige Vektoren und diese gehen durch die Abbildung $\text{mod } 2 : \mathbb{Z} \rightarrow GF(2)$ auf die entsprechenden Inzidenzvektoren im $GF(2)^m$ über. Die Addition $+_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ und die Multiplikation $\cdot_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ganzer Zahlen ist distributiv über der Abbildung $\text{mod } 2$:

$$\begin{aligned} (a +_{\mathbb{Z}} b) \bmod 2 &= (a \bmod 2) +_{GF(2)} (b \bmod 2) && \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z} \\ (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) \bmod 2 &= (a \bmod 2) \cdot_{GF(2)} (b \bmod 2) && \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Da das Berechnen der Determinante der Basismatrix mittels der LAPLACE-Entwicklung über \mathbb{R} aus einer Folge von Additionen und Multiplikationen ganzer Zahlen besteht, lässt sich die Projektion $\text{mod } 2$ in die Zwischenschritte und schließlich auf die Einträge der Basismatrix verschieben. Dadurch erhält man die LAPLACE-Entwicklung der $\{0, 1\}$ -Matrix über $GF(2)$, also die Determinante über $GF(2)$.

$$\det_{\mathbb{R}}(B) \bmod 2 = \det_{GF(2)}(\tilde{B})$$

Nun ist B genau dann eine *ungerichtete* Kreisbasis, wenn $\det_{GF(2)}(\tilde{B}) \neq 0$ und somit folgt die Behauptung. \square

Also sind genau die gerichteten Kreisbasen mit ungerader Determinante auch ungerichtete Kreisbasen. Die Kreisbasis aus Beispiel 1.4.1 hat die Determinante 2 und ist somit *keine* ungerichtete Kreisbasis. Im Gegenzug ist mit Lemma 1.4.2 jede ungerichtete Kreisbasis auch eine gerichtete Kreisbasis.

Abschliessend wird zusammengefasst:

$$B \text{ ungerichtete Kreisbasis} \iff \det_{\mathbb{R}}(B) \equiv 1 \pmod{2} \quad (1.4.1)$$

1.5 Ganzzahlige Kreisbasen

Eine gerichtete Kreisbasis ist eine Menge von Inzidenzvektoren, die eine Basis des $Z(D)$ bilden. Jeder weitere Punkt $x \in Z(D)$ kann als eindeutige Linearkombination dieser Basisvektoren geschrieben werden. Insbesondere wird jeder gerichtete Kreis in D so dargestellt. *Ganzzahlige Kreisbasen* sollen nun zusätzliche Anforderungen an die Darstellung der gerichteten Kreise erfüllen.

Definition 1.5.1. Ein gerichteter Kreis C wird durch eine gerichtete Kreisbasis B ganzzahlig dargestellt, wenn

$$C = \lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_\nu B_\nu \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Die Kreisbasis B heißt *ganzzahlig*, wenn sie jeden Kreis ganzzahlig darstellt.

Beispiel 1.5.2 (Eine ungerichtete Kreisbasis, die nicht ganzzahlig ist). *Abbildung 1.4 zeigt einen Graphen und eine Kreisbasis bestehend aus dem Innenkreis B_1 und den fünf Kreisen $\{B_i\}_{i=2,\dots,6}$ mit je einer Innen- und drei Außenkanten.*

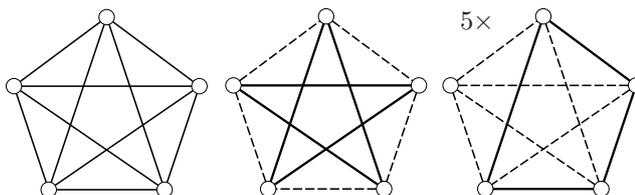


Abbildung 1.4: Ein Graph mit einer ungerichteten, aber nicht-ganzzahligen Kreisbasis.

Als Spannbaum seien vier der fünf inneren Kanten gewählt. Die auf den Cobaum eingeschränkte Basismatrix hat die Determinante 3 und die sechs gewählten Kreise bilden demnach eine ungerichtete Kreisbasis.

$$\det \Gamma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Die eindeutige Darstellung des Außenkreises durch B_1, \dots, B_6 enthält aber nicht-ganzzahlige Koeffizienten.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ganzzahlige Kreisbasen bilden erneut eine echte Teilmenge der gerichteten Kreisbasen und sie lassen sich wieder mit Hilfe der Determinante charakterisieren. Ein hinreichendes Kriterium folgt aus der nächsten Proposition.

Proposition 1.5.3. Sei A eine reguläre $(n \times n)$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen und b ein ganzzahliger Vektor der Dimension n . Sei λ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Dann ist

$$\det A \cdot \lambda \in \mathbb{Z}^n. \quad (1.5.1)$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der CRAMERSchen Regel (Siehe [1]). \square

Wird ein Kreis C durch eine Kreisbasis B mit Basismatrix Γ dargestellt, so ist der Koeffizientenvektor λ die eindeutige Lösung des quadratischen Gleichungssystems $\Gamma_M x = C_M$. Ist $\det(B) = 1$, so ist λ nach (1.5.1) bereits ein ganzzahliger Vektor und die Kreisbasis B ganzzahlig. Es gilt auch die Umkehrung.

Lemma 1.5.4. *Für eine gerichtete Kreisbasis B gilt:*

$$B \text{ ganzzahlige Kreisbasis} \iff \det_{\mathbb{R}}(B) = 1 \quad (1.5.2)$$

Beweis. Es bleibt noch für eine beliebige ganzzahlige Kreisbasis zu zeigen, dass ihre Determinante genau 1 ist.

Sei $F = \{F_1, \dots, F_\nu\}$ die Fundamentalebasis zu einem beliebigen spannenden Baum T und Φ deren Basismatrix. Nach Proposition 1.1.6 enthält Φ eine Permutation der Einheitsmatrix $I_{\nu \times \nu}$. Insbesondere ist $\det_{\mathbb{R}}(\Phi) = |\det I_{\nu \times \nu}| = 1$.

Sei Γ die Basismatrix der ganzzahligen Kreisbasis B und $\lambda^{(i)} \in \mathbb{Z}^\nu$ der Koeffizientenvektor der ganzzahligen Darstellung des Kreises F_i durch B . Es gilt also für einen beliebigen Cobaum M des Graphen $\Gamma_M \Lambda = \Phi_M$ mit $\Lambda = [\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(\nu)}]$. Da die Determinante multiplikativ ist, folgt

$$\det \Gamma_M \cdot \det \Lambda = \det \Phi = \pm 1. \quad (1.5.3)$$

Die Matrizen Γ_M und Λ haben ganzzahlige Einträge, so dass ihre Determinanten auch ganze Zahlen sind. Deshalb folgt aus (1.5.3) unmittelbar

$$|\det \Gamma_M| = |\det \Lambda| = 1.$$

□

Aus Lemma 1.4.2 und Lemma 1.5.4 folgt als Korollar:

Korollar 1.5.5. *Jede ganzzahlige Kreisbasis ist ungerichtet.*

Zu Beginn dieses Kapitels im Abschnitt 1.1 wurden Kreisbasen über einem Körper \mathbb{K} definiert. Abhängig vom gewählten Körper wurde im Abschnitt 1.2 jeder Kreisbasis eine Determinante zugeordnet. Innerhalb dieser Diplomarbeit sind Kreisbasen über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen von Interesse und diese *gerichteten Kreisbasen* wurden im Abschnitt 1.3 auf ihre Sensitivität gegenüber Umorientierungen des Graphen und der Kreise hin untersucht. Der Abschnitt 1.4 legte dann die *ungerichteten Kreisbasen*, die Kreisbasen über $GF(2)$, als Teilmenge der gerichteten Kreisbasen dar und das Beispiel 1.4.1 belegte, dass diese Inklusion strikt ist. Abschließend wurden im Abschnitt 1.5 *ganzzahlige Kreisbasen* als spezielle gerichtete Kreisbasen definiert und mit Hilfe der Determinante gezeigt, dass diese sogar eine Teilmenge der ungerichteten Kreisbasen bilden. Das Beispiel 1.5.2 zeigte, dass auch diese Inklusion strikt ist. Die wichtigen Erkenntnisse dieses Kapitels werden in der folgenden Abbildung zusammengefasst.

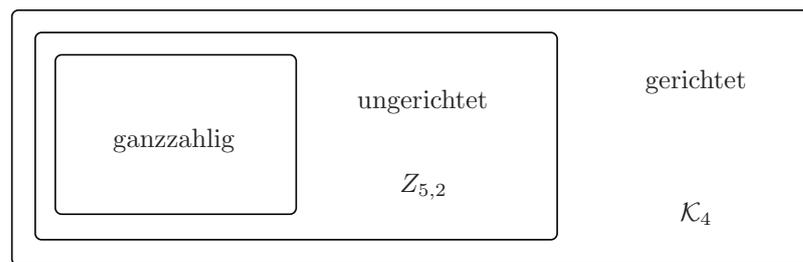


Abbildung 1.5: Ein vollständiges Bild über die Beziehungen der gerichteten, ungerichteten und ganzzahligen Kreisbasen.

Kapitel 2

Sehnen-Graphen

2.1 Zirkulanten

Dieser Abschnitt stellt die *Zirkulanten* als eine Klasse von einfach strukturierten Graphen vor, die trotz ihrer geringen Knotenzahl gerichtete Kreisbasen mit hoher Determinante beinhalten. Die Zirkulanten sind als ungerichtete Graphen definiert und werden daher für das Bestimmen einer gerichteten Kreisbasis und das Berechnen ihrer Determinante mit einer beliebigen Orientierung versehen.

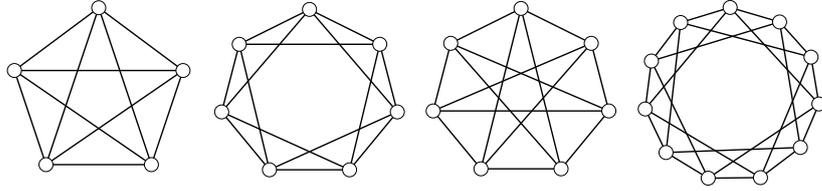
Definition 2.1.1. Sind $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teilerfremde Zahlen mit $1 < k < n/2$, so ist der n, k -Zirkulant $Z_{n,k}$ wie folgt definiert:

- Die Knotenmenge ist $V = \{0, \dots, n-1\}$.
- Die Kantenmenge ist $E = E_I \cup E_A$, wobei
 - $E_I = \{\{i, (i+k) \bmod n\} \mid i \in V\}$
 - $E_A = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid i \in V\}$.

Ein n, k -Zirkulant besteht aus einem inneren n -Kreis mit Kantenmenge E_I und einem äußeren n -Kreis mit Kantenmenge E_A . Dass die Kanten in E_I tatsächlich genau einen und nicht mehrere Kreise bilden, liegt an der Teilerfremdheit der Parameter n und k . Dazu kann man die Knoten als die Elemente der zyklischen Gruppe \mathbb{Z}_n ansehen und 1 und k als zwei Erzeuger¹ dieser Gruppe. Die einmalige Anwendung eines Erzeugers e auf ein Element z entspricht der Addition modulo n , das heißt $z \circ e = (z + e) \bmod n$. Eine Anwendung überführt ein Element auf ein anderes und für jeden solchen Übergang gibt es eine Kante im Zirkulanten. Die Außenkanten E_A entsprechen n Anwendungen des Erzeugers 1 und die Innenkanten E_I denen des Erzeugers k .

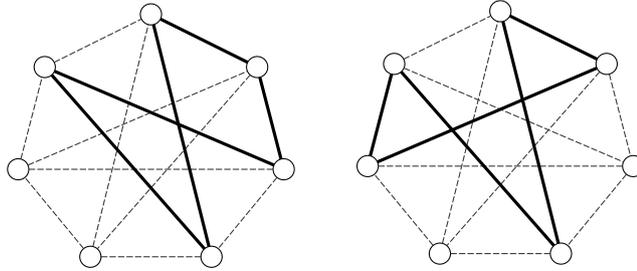
Die Abbildung 2.1 zeigt vier, für die späteren Beispiele wichtige, Zirkulanten. Die mittleren Zirkulanten $Z_{7,2}$ und $Z_{7,3}$ sind *isomorph*, also bis auf Umbenennung der Knoten derselbe Graph. Ist n hingegen festgehalten, so können unter allen n, k -Zirkulanten höchstens je zwei zueinander isomorph sein. Es gibt also durchaus mehr als einen Zirkulanten auf n Knoten.

¹Eine Zahl k ist genau dann ein Erzeuger von \mathbb{Z}_n , wenn n und k teilerfremd sind.

Abbildung 2.1: Die Zirkulanten $Z_{5,2}$, $Z_{7,2}$, $Z_{7,3}$ und $Z_{11,3}$.

Lässt man Knotenwiederholungen nicht aber Kantenwiederholungen in Kreisen zu, so bestehen die Kreise des $Z_{n,k}$ aus einer Anzahl $0 \leq i \leq n$ von Innenkanten und einer Anzahl $0 \leq a \leq n$ von Außenkanten. Ein Kreis, dessen Innenkanten und Außenkanten jeweils einen zusammenhängenden Pfad ergeben, wird *geschlossen* genannt. Jeder Kreis definiert ein Tupel (i, a) aus den Anzahlen der benutzten Innen- und Außenkanten. Die Tupel, zu denen ein geschlossener Kreis existiert, werden *geschlossene Tupel* genannt und die Menge der geschlossenen Tupel ist im Allgemeinen eine kleine Teilmenge der Menge der Tupel aller Kreise. Die Tabelle 2.1 listet alle geschlossenen Tupel des 7, 3-Zirkulanten auf und die Abbildung 2.2 zeigt, dass es auch nicht-geschlossene Kreise mit geschlossenen Tupeln geben kann.

i	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
a	7	3	4	6	1	2	5	5	2	1	6	4	3	0

Tabelle 2.1: Die möglichen geschlossenen (i, a) -Tupel des $Z_{7,3}$.Abbildung 2.2: Ein geschlossener Kreis und ein nicht-geschlossener Kreis des $Z_{7,3}$ mit dem gleichen Tupel $(3, 2)$.

Durch die spezielle Charakteristik der geschlossenen Kreise, lassen sich die geschlossenen Tupel kompakt auflisten. Zunächst sind der Innen- und der Außenkreis geschlossen. Sie sind die einzigen Kreise, die das Tupel $(n, 0)$ beziehungsweise $(0, n)$ ergeben. Für alle weiteren geschlossenen Kreise gilt also $0 < i < n$ und die Endpunkte des zusammenhängenden Weges der inneren Kanten sind verschieden. Nun gibt es genau zwei Möglichkeiten diese Endpunkte mittels Außenkanten zu verbinden, je nachdem in welcher Richtung man entlang des Außenkreises läuft, um vom einen Endpunkt zum anderen zu gelangen. Die Entfernung der beiden Endpunkte auf dem Außenkreis kann in Abhängig-

keit von n, k und der Anzahl i der benutzten Innenkanten bestimmt werden. Aus dieser Entfernung können die zugehörigen Anzahlen an Außenkanten der beiden geschlossenen Kreise mit i Innenkanten leicht gefolgert werden.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Knoten 0 der Endpunkt des inneren Weges und dessen inzidente innere Kante gerade $\{0, k\}$. Ist 0 nicht der Anfangspunkt des Innenpfades, so kann dies durch wiederholte zyklische Umbenennung der Knoten $i \rightarrow (i + 1) \bmod n$ gewährleistet werden. Ist die zu 0 inzidente innere Kante $\{n - k, 0\}$ statt $\{0, k\}$, so kann eine Umbenennung der Knoten $i \rightarrow -i$ dies korrigieren. Dabei ist wichtig, dass $i \rightarrow (i + 1) \bmod n$ und $i \rightarrow -i$ die Inzidenzvorschriften der Definition 2.1.1 erhält, das heißt beide Abbildungen aus der Automorphismengruppe des n, k -Zirkulanten stammen (Siehe dazu etwa [6]). Beginnt der Innenweg mit der Kante $\{0, k\}$ und enthält insgesamt i Innenkanten, so entspricht das der i -fachen Anwendung des Erzeugers k auf das Element 0 und der zweite Endpunkt des Weges ist der Knoten

$$(\cdots \underbrace{((0+k) \bmod n+k)}_{i \text{ mal}}) \bmod n \cdots + k) \bmod n = (i \cdot k) \bmod n.$$

Es sind also entweder genau $(i \cdot k) \bmod n$ Außenkanten oder $n - (i \cdot k) \bmod n$ Außenkanten nötig, um wieder zurück zum Knoten 0 zu gelangen. Somit sind die geschlossenen Tupel allgemein beschrieben und werden in vier Typen unterschieden.

Typ I Das Tupel $(0, n)$, welches nur dem Außenkreis entspricht.

Typ II Das Tupel $(i, (i \cdot k) \bmod n)$, welches genau n Kreisen entspricht.

Typ III Das Tupel $(i, n - (i \cdot k) \bmod n)$, welches genau n Kreisen entspricht.

Typ IV Das Tupel $(n, 0)$, welches nur dem Innenkreis entspricht.

Bemerkung 2.1.2. Es gibt Konstellationen der Werte n, k, i , so dass die geschlossenen Tupel des zweiten und dritten Typs zusammenfallen und somit nicht genau n , sondern sogar $2n$ geschlossene Kreise mit diesem Tupel existieren. Eine solche Konstellation, wie etwa $(n = 8, k = 3, i = 4)$, tritt auf, wenn n gerade ist und die Endpunkte des Innenpfades sich genau gegenüberliegen. Im späteren Verlauf werden jedoch weitere Einschränkungen vorgenommen, unter denen solche Beispiele nicht länger auftreten.

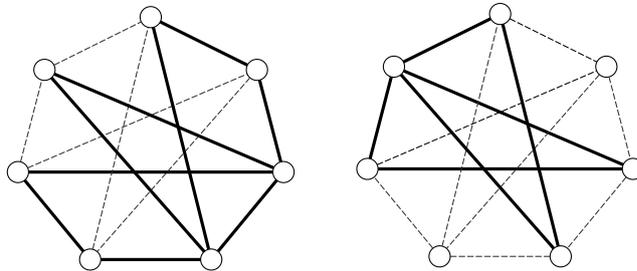


Abbildung 2.3: Je ein geschlossener Kreis mit 4 Innenkanten des Typs II und des Typs III des $Z_{7,3}$.

In der Definition der geschlossenen Kreise sind Knotenwiederholungen explizit erlaubt worden und Abbildung 2.3 zeigt, dass zu einer vorgegebenen Anzahl $0 < i < n$ an Innenkanten unter Umständen die geschlossenen Kreise des zweiten und dritten Typs nicht elementar sind. Um eine möglichst große Auswahl *elementarer* geschlossener Kreise zu erhalten, werden die *minimalen Kreise* eines Zirkulanten definiert.

2.2 Minimale Tupel

Definition 2.2.1. • Ein Tupel (i, a) *dominiert* ein Tupel (i', a') , wenn $i \geq i'$ und $a \geq a'$ gilt.

- Ein *minimales Tupel* ist ein geschlossenes Tupel, das kein weiteres geschlossenes Tupel dominiert.

Die Begriffe des Dominierens und der Minimalität werden dann auch für die geschlossenen Kreise zu diesen Tupeln übernommen. So sind beispielsweise der Innenkreis und der Außenkreis die einzigen Kreise ohne Außen- beziehungsweise Innenkanten und können daher keine anderen Kreise dominieren. Deshalb sind der Innen- und der Außenkreis eines jeden Zirkulanten stets minimale Kreise. Tabelle 2.2 zeigt noch einmal alle geschlossenen Tupel des 7, 3-Zirkulanten, hebt jedoch nun die minimalen Tupel hervor.

i	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
a	7	3	4	6	1	2	5	5	2	1	6	4	3	0

Tabelle 2.2: Die möglichen geschlossenen (i, a) -Tupel des $Z_{7,3}$. Die minimalen Tupel sind hervorgehoben.

Proposition 2.2.2. *Die minimalen Kreise eines Zirkulanten sind elementar.*

Beweis. Die Pfade der Innenkanten und der Außenkanten sind einzeln genommen elementar, da $0 < i, a < n$ und k und n teilerfremd sind. Eine Knotenwiederholung kann also nur stattfinden, wenn der Außenweg einen Knoten benutzt, der bereits auf dem Innenweg liegt. Seien v und w die Endpunkte des Innenweges und u der Knoten, der wiederholt auftritt. Dann ist der betrachtete geschlossene Kreis von der Form

$$v \underbrace{\cdots - u \cdots - w}_{\text{Innenweg}} \underbrace{\cdots - u \cdots - v}_{\text{Außenweg}}. \quad (2.2.1)$$

Das Teilstück in (2.2.1) vom Knoten u über Innenkanten zum Knoten w und über Außenkanten wieder zum Knoten u ist dann ein dominierter geschlossener Kreis und somit ist ein Kreis mit Knotenwiederholungen nicht minimal. \square

Es gibt auch elementare geschlossene Kreise, die nicht minimal sind (wie etwa ein Kreis mit Tupel $(1, 4)$ im $Z_{7,3}$) und somit gilt die Umkehrung der Proposition 2.2.2 nicht.

Bemerkung 2.2.3. Für die spätere Konstruktion minimaler Kreisbasen werden alle Innenkanten und alle Außenkanten mit jeweils dem gleichen Gewicht belegt

und somit erhält ein Kreis, der einen weiteren dominiert durch seine höhere Anzahl an Kanten des gleichen Typs auch ein höheres Gewicht. Dadurch werden nur die minimalen Kreise eines Zirkulanten später von Interesse sein.

Proposition 2.2.4. *Ist (i, a) ein minimales Tupel, so kann es eindeutig einem Typ zugeordnet werden.*

Beweis. Als einzige Möglichkeit einer Typdopplung besteht, für ein Tupel sowohl vom Typ **II** als auch vom Typ **III** zu sein. Nach der Definition des Typs heißt das

$$i \cdot k \equiv n - i \cdot k \pmod{n} \quad \text{und} \quad (i \cdot k) \bmod n + (n - i \cdot k) \bmod n = n.$$

Daraus folgt

$$(i \cdot k) \bmod n = (n - i \cdot k) \bmod n = \frac{n}{2}$$

und wie oben bereits erwähnt wurde, liegen sich die beiden Endpunkte des Innenweges in diesem Fall gegenüber. Da k kein Teiler von n ist, muss $i > 1$ sein und somit ist entweder der Typ-**II**-Kreis oder der Typ-**III**-Kreis dieses Tupels nicht elementar und daher kann das Tupel nach Proposition 2.2.2 nicht minimal sein. \square

2.3 Innen- und Außenbasis

Nun werden mit den minimalen Kreisen eines Zirkulanten Kreisbasen aufgestellt, deren Determinanten im Anschluss analysiert werden. Dazu sei für ein minimales Tupel (i, a) die Menge der *minimalen Kreise* dieses Tupels mit $\mathcal{C}(i, a)$ bezeichnet. Diese Menge $\mathcal{C}(i, a)$ enthält für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ nach Proposition 2.2.4 genau n Kreise, während $\mathcal{C}(0, n)$ und $\mathcal{C}(n, 0)$ aus jeweils genau einem Kreis bestehen.

Definition 2.3.1. Sei $Z_{n,k}$ ein Zirkulant und (i, a) ein minimales Tupel.

- Die *a-te Außenbasis* des $Z_{n,k}$ ist die Menge der minimalen Kreise mit a Außenkanten zusammen mit dem Außenkreis:

$$B^{(a)} = \mathcal{C}(i, a) \cup \mathcal{C}(0, n)$$

- Die *i-te Innenbasis* des $Z_{n,k}$ ist die Menge der minimalen Kreise mit i Innenkanten zusammen mit dem Innenkreis:

$$B_{(i)} = \mathcal{C}(i, a) \cup \mathcal{C}(n, 0)$$

Da der n, k -Zirkulant aus n Knoten und $2n$ Kanten besteht und somit eine zyklomatische Zahl von $\nu(Z_{n,k}) = |E| - |V| + 1 = n + 1$ aufweist, enthält jede Kreisbasis genau $n + 1$ gerichtete Kreise. Die a -te Außen- und Innenbasen weisen demnach bereits die korrekte Anzahl an Kreisen auf und es sei noch einmal bemerkt, dass sowohl der Graph $Z_{n,k}$ als auch die Kreise mit einer beliebigen Orientierung versehen werden müssen damit diese Mengen Kreisbasen eines gerichteten Graphen darstellen. Die Kanten seien dazu so orientiert, dass Innen- und Außenkreis jeweils einen gerichteten Zykel ergeben, während die Orientierungen der Kreise für $B_{(i)}$ und $B^{(a)}$ unterschiedlich gewählt werden.

Beweis. Siehe [2]. □

Die zirkulanten Matrizen, die aus den Innen- und Außenbasen entstehen erhalten das Polynom

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{l-1} = \frac{x^l - 1}{x - 1}.$$

Dabei gibt l gerade die Anzahl der Einsen jeder Zeile an. Diese Ergebnisse können nun verwendet werden, um die Determinante einer solchen zirkulanten Matrix genau zu bestimmen.

Lemma 2.3.5 ([8]). *Sei $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ein n -dimensionaler Vektor mit l Einsen und $n - l$ Nullen. Dann gilt*

$$|\det C(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)| = \begin{cases} l & \text{falls } \gcd(n, l) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei ζ_n eine primitive n -te Einheitswurzel und ζ_l eine primitive l -te Einheitswurzel. Sei $f = (x^l - 1)/(x - 1)$. Es gilt

$$x^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (x - \zeta_n^i) \quad \text{und} \quad f = \prod_{j=1}^{l-1} (x - \zeta_l^j).$$

Sei M die durch f gegebene zirkulante Matrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det M &= \prod_{i=0}^{n-1} f(\zeta_n^i) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=1}^{l-1} (\zeta_n^i - \zeta_l^j) \\ &= \prod_{j=1}^{l-1} \prod_{i=0}^{n-1} (\zeta_n^i - \zeta_l^j) \\ &= \prod_{j=1}^{l-1} (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} (\zeta_l^j - \zeta_n^i) \\ &= \prod_{j=1}^{l-1} (-1)^n (\zeta_l^{jn} - 1) \\ &= (-1)^{n(l-1)} \prod_{j=1}^{l-1} (\zeta_l^{jn} - 1) \\ &= (-1)^{n(l-1)+l-1} \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \zeta_l^{jn}). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

1.Fall $\gcd(n, l) = t > 1$: Es gibt also ganze Zahlen $a = l/t \in \{1, \dots, l-1\}$ und $b = n/t \in \{1, \dots, n-1\}$ für die gilt

$$a \cdot n \equiv a \cdot bt \equiv at \cdot b \equiv l \cdot b \equiv 0 \pmod{l}.$$

Daraus folgt $\zeta_l^{an} = \zeta_l^0 = 1$. Somit verschwindet der a -te Faktor von (2.3.1) und es gilt

$$\det M = (-1)^{n(l-1)+l-1} \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \zeta_l^{jn}) = 0.$$

2.Fall $\gcd(n, l) = 1$: Da mit ζ_l^j auch ζ_l^{jn} für $1 \leq j \leq l-1$ aufgrund der Teilerfremdheit von n und l nun über alle l -ten Einheitswurzeln ungleich 1 läuft, gilt

$$\det M = (-1)^{n(l-1)+l-1} \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \zeta_l^{jn}) = (-1)^{(n+1)(l-1)} f(1).$$

Nun ist $(n+1)(l-1)$ immer gerade (wegen $\gcd(n, l) = 1$ sind nicht n und l gleichzeitig gerade). Also folgt $\det(M) = f(1) = l$.

□

Korollar 2.3.6. Sei $Z_{n,k}$ ein Zirkulant und (i, a) ein minimales Tupel mit $0 < i < n$. Dann gilt für die Determinanten der a -ten Außenbasis $B^{(a)}$ und der i -ten Innenbasis $B_{(i)}$:

$$\det(B^{(a)}) = \begin{cases} i & \text{falls } \gcd(n, i) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\det(B_{(i)}) = \begin{cases} a & \text{falls } \gcd(n, a) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Determinanten der Innen- und Außenbasen können also bereits bei niedrigen Knotenzahlen bereits hohe Determinanten aufweisen. Zum Abschluss gibt die Tabelle 2.3 noch eine Übersicht über die minimalen Tupel des 9, 2-Zirkulanten. Unter diesen, gibt es das Tupel (3, 3) dessen beide Einträge *nicht teilerfremd* zu $n = 9$ sind und somit ist sowohl die zugehörige Innenbasis als auch die zugehörige Außenbasis *keine Kreisbasis* des Graphen.

i	0	1	3	4	9
a	9	2	3	1	0

Tabelle 2.3: Alle minimalen (i, a) -Tupel des $Z_{9,2}$ und darunter eines, dessen Einträge nicht teilerfremd zu $n = 9$ sind.

2.4 Brücken

Um eine Instanz (D, w) eines MICB-Problems zu erhalten, erhält jede Kante des Zirkulanten ein nicht-negatives Gewicht. Dabei werden alle Innenkanten mit einem einheitlichen Gewicht w_I und alle Außenkanten mit einem einheitlichen Gewicht w_A belegt. Dies gewährleistet, dass alle Kreise desselben Tupels auch dasselbe Gewicht aufweisen. Wie die Abbildung 2.2 belegt, gibt es jedoch auch nicht-geschlossene Kreise zu geschlossenen Tupeln. Ein solcher nicht-geschlossener Kreis soll allerdings ein höheres Gewicht als ein jeder geschlossene

Kreis des gleichen Tupels aufweisen. Dies kann durch den Einsatz sogenannter *Brücken* erreicht werden. Dazu wird jeder Knoten i des Zirkulanten in zwei Knoten i und i' geteilt, die mit einer Kante $\{i, i'\}$, der *Brücke*, verbunden werden. Die Kanten des Außenkreises bleiben zu den ungestrichenen Knoten inzident, während die Kanten des Innenkreises in ihre Entsprechung mit den gestrichenen Knoten überführt werden. Das Einsetzen einer Brücke an einem Knoten i kann daher beispielsweise durch die *Kontraktion* der entstandenen Brücke $\{i, i'\}$ revidiert werden.

Definition 2.4.1. Der *verallgemeinerte PETERSEN-Graph* $P_{n,k}$ entsteht aus dem n, k -Zirkulanten, indem der Innenkreis durch den Einsatz von n Brücken vom Außenkreis getrennt wird (siehe Abbildung 2.5). Es gilt

$$\nu(P_{n,k}) = |E(P_{n,k})| - |V(P_{n,k})| + 1 = 3n - 2n + 1 = n + 1 = \nu(Z_{n,k}).$$

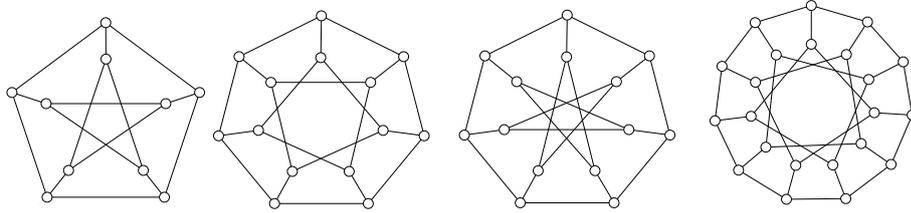


Abbildung 2.5: Die verallgemeinerten PETERSEN-Graphen $P_{5,2}$, $P_{7,2}$, $P_{7,3}$ und $P_{11,3}$.

Jeder Kreis des $Z_{n,k}$ hat nun eine Entsprechung im $P_{n,k}$, indem bei jedem Übergang zwischen einer inneren und einer äußeren Kante die entsprechende Brücke eingefügt wird. Wird für jede Brücke ein einheitliches Gewicht w_B eingeführt, so erhöht sich das Gewicht jedes geschlossenen Kreises mit $0 < i < n$ damit um genau $2w_B$. Das Gewicht des Innen- und Außenkreises bleibt erhalten und nicht geschlossene Kreise werden durch ihre hohe Anzahl an Brücken relativ teuer. Insbesondere kann man w_B stets so groß wählen, dass jeder nicht geschlossene Kreis teurer als jeder geschlossene Kreis ist, während jede Wahl von w_B die Größenverhältnisse unter den geschlossenen Kreisen mit $0 < i < n$ unverändert lässt.

Variiert man die Gewichte w_A und w_I der Außen- beziehungsweise Innenkanten, so werden dadurch die Gewichtsverhältnisse innerhalb der geschlossenen Kreise, das heißt die Reihenfolge der geschlossenen Kreise in einer nicht-absteigenden Sortierung, beeinflusst. Jedoch kann nicht jede beliebige Reihenfolge erreicht werden, da es Paare von geschlossenen Kreisen gibt, die unter jeder Belegung von w_A und w_I das gleiche Größenverhältnis aufweisen. Wird beispielsweise ein Kreis von einem anderen Kreis dominiert, so weist er in jeder Kantenkategorie eine höchstens so hohe Anzahl an Kanten auf und erhält demnach unter jeder Gewichtsbelegung der Kategorien ein höchstens so hohes Gewicht. Dominiert ein Kreis hingegen keinen anderen Kreis, so kann stets eine Gewichtsbelegung gefunden werden unter der dieser Kreis das eindeutige Minimum annimmt und daher wurden die *minimalen Kreise* gesondert hervorgehoben (Vergleiche Bemerkung 2.2.3).

Mit den minimalen Kreisen wurden im Abschnitt 2.3 die Innen- und Außenbasen eines n, k -Zirkulanten definiert. Mit der Überführung der einzelnen

Kreise in den verallgemeinerten PETERSEN-Graphen $P_{n,k}$ erhält man auch Entsprechungen der Innen- und Außenbasen. Diese seien wiederum mit $B_{(i)}$ und $B^{(a)}$ bezeichnet.

Definition 2.4.2. Ein *Außenbaum* T_A eines verallgemeinerten PETERSEN-Graphen ist eine Auswahl von $n - 1$ Außenkanten und allen Brücken, während ein *Innenbaum* T_I einer Auswahl von $n - 1$ Innenkanten mit allen Brücken entspricht (siehe Abbildung 2.6).

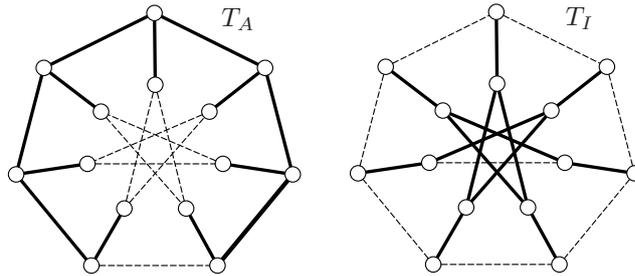


Abbildung 2.6: Ein Außenbaum T_A und ein Innenbaum T_I des verallgemeinerten PETERSEN-Graphen $P_{7,3}$.

Da die Menge der Brücken sowohl in T_A als auch in T_I enthalten ist, erscheinen die neu eingeführten Zeilen nicht in den gekürzten Kreismatrizen $\Gamma(B^{(a)})$ und $\Gamma(B_{(i)})$ bezüglich dieser Bäume. Damit besitzen die Innen- und Außenbasen des $P_{n,k}$ dieselben Determinanten, wie die entsprechenden Innen- und Außenbasen des $Z_{n,k}$.

2.5 Sehnen

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie mit Hilfe der Brücken die Gewichte der nicht-geschlossenen Kreise erhöht werden konnten, ohne die Größenverhältnisse der geschlossenen Kreise oder die Determinanten der Innen- und Außenbasen zu stark zu verändern. Mittels dieser Überlegungen können in relativ kleinen Graphen kurze Kreisbasen einer zuvor ausgewählten Determinante konstruiert werden. Damit die gewählte Innen- oder Außenbasis tatsächlich die *eindeutige minimale Kreisbasis* des Graphen darstellt bedarf es unter Umständen jedoch einer zusätzlichen Erweiterung, der *Sehnen*.

Definition 2.5.1. Sei $P_{n,k}$ ein verallgemeinerter PETERSEN-Graph und C ein minimaler Kreis des Tupels (i, a) dieses Graphen. Eine *Sehne von C* ist ein Knotenpaar $\{u, v\} \subset V(C)$ mit $\{u, v\} \notin E(P_{n,k})$.

Eine Sehne von C ist eine Kante s , die im $P_{n,k}$ nicht existiert und deren Einfügen den Kreis C in zwei Teile aufteilt, das heißt, dass es neben C noch genau zwei elementare Kreise in $C \cup e$ gibt. Diese werden mit $C_1(s)$ und $C_2(s)$ bezeichnet. Die Abbildung 2.7 zeigt drei mögliche Sehnen eines $(2, 2)$ -Kreises im $8, 3$ -Zirkulanten, während die Abbildung 2.8 die Kreise $C_1(s)$ und $C_2(s)$ hervorhebt, die bei der Wahl einer dieser Sehnen aus dem minimalen Kreis entstehen.

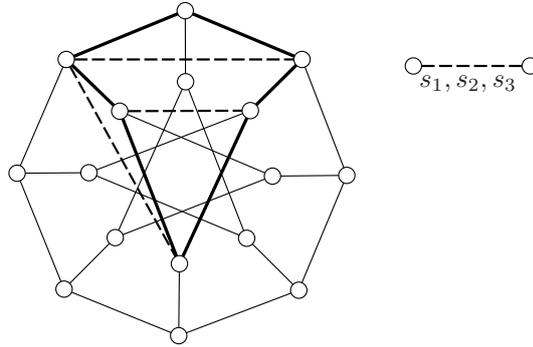


Abbildung 2.7: Der 8, 3-Zirkulant, ein minimaler Kreis des Tupels $(2, 2)$ und drei Sehnen s_1, s_2 und s_3 dieses Kreises.

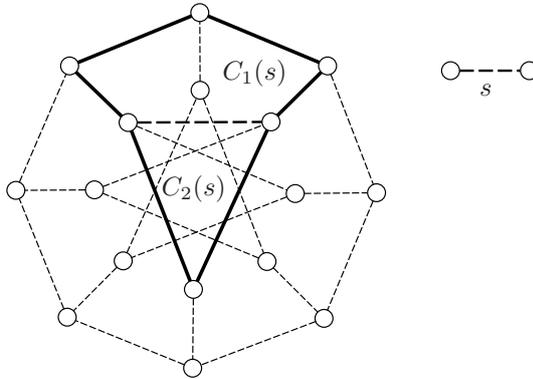


Abbildung 2.8: Die beiden Kreise $C_1(s)$ und $C_2(s)$, in die der eingezeichnete Kreis durch die Sehne s aufgeteilt wird.

Definition 2.5.2. Sei B eine Innen- oder Außenbasis des $P_{n,k}$ und C der Innen- beziehungsweise Außenkreis in B . Ein *Sehnen-Satz der Basis B* ist eine Menge S von n Sehnen, so dass jede Kante $s \in S$ eine Sehne *genau eines* Kreises in $B \setminus C$ ist.

Das Einfügen eines Sehnen-Satzes S einer Innen- oder Außenbasis B in einen verallgemeinerten PETERSEN-Graphen $P_{n,k}$ erhöht die Kantenzahl um n , lässt die Knotenzahl unverändert und erhöht somit die zyklomatische Zahl um genau n . Der entstehende Graph $P_{n,k}(B, S)$ wird ein *Sehnen-Graph* genannt und jede seiner Kreisbasen besteht aus $2n + 1$ Kreisen. Aus der Basis B kann eine Kreisbasis des $P_{n,k}(B, S)$ erhalten werden, indem jeder Kreis $C \in B$ mit Sehne $s \in S$, bis auf Innen- beziehungsweise Außenkreis, durch $C_1(s)$ und $C_2(s)$ ersetzt wird. Die so erhaltene Kreismenge \tilde{B} wird wiederum eine Innen- beziehungsweise Außenbasis genannt.

Die Innen- und Außenbäume des $P_{n,k}$ bilden auch Spannbäume des Sehnen-Graphen $P_{n,k}(B, S)$, da die Knoten, die durch eine Sehne verbunden wurden, durch T_A und T_I bereits aufgespannt wurden und keine weiteren Knoten entstehen. Orientiert man nun die Kreise in \tilde{B} so, dass je zwei Kreise zu einer

Sehne s auf dieser *entgegengesetzt* verlaufen und die Kanten des Graphen so, dass alle übrigen Einträge der Inzidenzvektoren auf $A \setminus T_A$ beziehungsweise $A \setminus T_I$ nicht-negativ sind, so erhält man die folgende allgemeine Matrix

$$\Gamma(\tilde{B}) = \left(\begin{array}{cc|c} M_1 & M_2 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & -1 & 1 & 0 \\ * & \cdots & * & \cdots & * & 1 \end{array} \right). \quad (2.5.1)$$

Die ersten n Spalten von (2.5.1) entsprechen den Kreisen $C_1(s)$ für $s \in S$, während die zweiten n Spalten die Kreise $C_2(s)$ für $s \in S$ und die letzte Spalte den Innen- beziehungsweise Außenkreis darstellen. Die erste n Zeilen von (2.5.1) zusammen mit der letzten Zeile bilden den ursprünglichen Cobaum vor dem Einsetzen der Sehnen, welche die übrigen n Zeilen bilden. Da die Addition einer Spalte auf eine andere Spalte und die LAPLACE-Entwicklung der letzten Spalte den Absolutbetrag der Determinante nicht ändert, hat die folgende Matrix die betraglich gleiche Determinante wie $\Gamma(\tilde{B})$

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 + M_2 & M_2 \\ \hline \mathbf{0}_{n,n} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array} \right). \quad (2.5.2)$$

Die ersten n Spalten von (2.5.2) entsprechen den Inzidenzvektoren der minimalen Kreise in B ohne Innen- beziehungsweise Außenkreis, da je zwei Kreise $C_1(s)$ und $C_2(s)$ der gleichen Sehne addiert wurden und dies genau den durch s geteilten Kreis C ergibt. Da (2.5.2) nun in vier gleichgroße quadratische Matrizen aufgeteilt ist und der untere linke Teil die Null-Matrix bildet, ergibt sich die Determinante von (2.5.2) als Produkt der Determinanten der Matrizen auf der Diagonalen. Oben links steht $M_1 + M_2$, die $(n \times n)$ -Zirkulanten-Matrix der gewählten Basis B und unten links die Einheitsmatrix. Damit gilt schließlich

$$\det(\tilde{B}) = \det(M_1 + M_2) = \det(B).$$

Das Einfügen eines passenden Sehnen-Satzes und Zerteilen der Kreise einer Innen- oder Außenbasis liefert also einen Sehnen-Graphen der gleichen Knotenzahl und eine Innen- beziehungsweise Außenbasis der gleichen Determinante. Ist (i, a) das Tupel der gewünschten Innen- oder Außenbasis, so erlauben die Sehnen es nun die Kreise in $\mathcal{C}(i, a)$ in kleinere Kreise aufzuteilen und somit die verwendeten Gewichte zu senken. Dazu wird ein weiteres Gewicht w_I einheitlich auf alle Sehnen gesetzt.

Die Sehnen-Graphen bieten nun genügend Flexibilität um *minimale* Kreisbasen einer gewünschten Determinante zu erzeugen und so können in den weiteren Kapiteln kleine Beispielgraphen mit speziellen Anforderungen konstruiert werden.

Kapitel 3

Die MCB-Probleme

In Kapitel 1 wurden drei Klassen von Kreisbasen eines Graphen vorgestellt: die gerichteten, die ungerichteten und die ganzzahligen Kreisbasen. Außerdem wurden die Teilmengenbeziehungen zwischen diesen drei Klassen dargestellt und in der Abbildung 1.5 schematisch wiedergegeben. In den Abschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 dieses Kapitels wird zu jeder Klasse das jeweilige *minimum cycle basis*-Problem (kurz: MCB-Problem) definiert. Die Teilmengenrelationen der Kreisbasen entsprechen den Zulässigkeitsbereichen der zugehörigen MCB-Probleme. In den Abschnitten 3.2 und 3.3 werden Beispielinstanzen angebracht, deren Optimallösungen bezüglich verschiedener MCB-Probleme sich unterscheiden. Damit ist die Eigenständigkeit der drei Probleme gezeigt und man erhält eine Entsprechung der Abbildung 1.5 für die Mengen der Optimallösungen.

3.1 Das MDCB-Problem

Sei (D, w) das Paar aus einem einfachen gerichteten Graphen $D = (V, A)$ und einer nicht-negativen Gewichtsfunktion $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ auf den Bögen von D . Sei w_{uv} das Gewicht des Bogens (u, v) . Dann ordnet man jedem gerichteten Kreis C ein Gewicht durch Summieren der Gewichte der Bögen von C zu:

$$w(C) = \sum_{(u,v) \in C} w_{uv}$$

Eine Menge M von gerichteten Kreisen erhält als Gewicht die Summe der Gewichte der einzelnen Kreise:

$$w(M) = \sum_{C \in M} w(C)$$

Definition 3.1.1 (MDCB-Problem). Das *minimum directed cycle basis*-Problem oder kurz *MDCB-Problem* fragt zu einer gegebenen Instanz $\mathcal{I} = (D, w)$ nach einer *gerichteten* Kreisbasis von D mit minimalem Gewicht.

In den folgenden Abschnitten werden auch das MUCB- und MICB-Problem als Pendant zum MDCB-Problem für die ungerichteten beziehungsweise ganzzahligen Kreisbasen definiert. Diese drei Probleme sind spezielle *MCB-Probleme*, da ihr Zulässigkeitsbereich auf die entsprechenden speziellen Kreisbasen eingeschränkt ist. Die Zulässigkeitsbereiche sind, wie in Abbildung 1.5 bebildert,

strikt ineinander enthalten und so gelten zumindest die schwachen Inklusionen auch für die Mengen ihrer Optimallösungen:

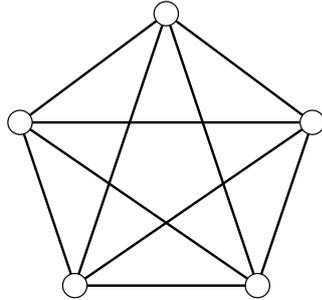
$$OPT_{\text{MICB}} \subseteq OPT_{\text{MUCB}} \subseteq OPT_{\text{MDCB}} \quad (3.1.1)$$

Ist eine MDCB eines gewichteten Graphen auch eine ungerichtete oder gar ganzzahlige Kreisbasis, so ist sie auch eine MUCB beziehungsweise MICB dieser Instanz. Der Abschnitt 3.2 enthält eine Beispielinstantz, bei der die linke Inklusion von (3.1.1) strikt ist und im Abschnitt 3.3 wird ein entsprechendes Beispiel für die rechte Inklusion in (3.1.1) gegeben. Die Konstruktion der Gegenbeispiele basiert auf den im Kapitel 2 eingeführten Sehnen-Graphen.

3.2 Das MUCB-Problem

Definition 3.2.1 (MUCB-Problem). Das *minimum undirected cycle basis-Problem* oder kurz *MUCB-Problem* fragt zu einer gegebenen Instanz $\mathcal{I} = (D, w)$ nach einer *ungerichteten* Kreisbasis von D mit minimalem Gewicht.

Dieser Abschnitt soll die Eigenständigkeit des MUCB-Problem gegenüber dem MDCB-Problem belegen, das heißt Instanzen (D, w) kleiner Graphen und niedriger Bogengewichtung konstruieren, in denen jede MDCB ein echt kleineres Gewicht als jede MUCB aufweist. Betrachte dazu den kleinsten Zirkulanten $Z_{5,2}$ in Abbildung 3.1 und die vollständige Liste seiner minimalen Tupel in Tabelle 3.2.



i	0	1	2	5
a	5	2	1	0

Tabelle 3.1: Die minimalen Tupel des 5, 2-Zirkulanten.

Abbildung 3.1: Der 5, 2-Zirkulant.

Nach Korollar 2.3.6 bildet die 1-te Außenbasis $B^{(1)}$ zum Tupel $(1, 2)$ eine gerichtete Kreisbasis der Determinante 2 und ist damit nicht ungerichtet. Diese Basis hat eine Entsprechung im PETERSEN-Graphen $P_{5,2}$ und damit $B^{(1)} = \mathcal{C}(2, 1) \cup \mathcal{C}(0, 5)$ (nun als Menge der erweiterten Kreise interpretiert) genau die sechs Kreise kleinsten Gewichts enthält, müssen die folgenden Bedingungen von den Gewichten w_A, w_B und w_I erfüllt werden. Dabei bezeichnet $w(\mathcal{C}(i, a))$ das Gewicht *eines* (i, a) -Kreises und *nicht* das Gesamtgewicht der

Menge $\mathcal{C}(i, a)$.

$$\begin{aligned} w(\mathcal{C}(0, 5)) < w(\mathcal{C}(1, 2)) &\Leftrightarrow 5 \cdot w_A < w_I + 2 \cdot w_A + 2 \cdot w_B \\ w(\mathcal{C}(0, 5)) < w(\mathcal{C}(5, 0)) &\Leftrightarrow 5 \cdot w_A < 5 \cdot w_I \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$w(\mathcal{C}(2, 1)) < w(\mathcal{C}(1, 2)) \Leftrightarrow 2 \cdot w_I + w_A < w_I + 2 \cdot w_A + 2 \cdot w_B \quad (3.2.2)$$

$$w(\mathcal{C}(2, 1)) < w(\mathcal{C}(5, 0)) \Leftrightarrow 2 \cdot w_I + w_A < 5 \cdot w_I$$

Aus (3.2.1) folgt $w_A < w_I$ während mit (3.2.2) die Bedingung $w_I < w_A + 2w_B$ erfüllt sein muss. Mit nicht-negativen Werten für w_A, w_I und w_B können beide Ungleichungen jedoch nicht gleichzeitig erfüllt sein. Das Einfügen eines Sehnensatzes ist notwendig, um letztlich eine eindeutige minimale gerichtete Kreisbasis mit Determinante 2 zu erhalten.

Beispiel 3.2.2 (Eine eindeutige MDCB, die nicht ungerichtet ist). *Betrachte den PETERSEN-Graphen $P_{5,2}$ und füge den Sehnensatz S der 1-ten Außenbasis, wie in Abbildung 3.2 illustriert, ein. Die Entsprechung $\tilde{B}^{(1)}$ dieser Basis im entstehenden Sehnens-Graphen $P_{5,2}(B^{(1)}, S)$ ist in Abbildung 3.3 eingezeichnet. Unter der Belegung*

$$w_A = 2 \quad w_B = 2 \quad w_S = 4 \quad w_I = 3$$

gibt es genau elf Kreise in $(P_{5,2}(B^{(1)}, S), w)$ mit einem Gewicht von höchstens 10.

- *Der Außenkreis erhält das Gewicht 10.*
- *Die fünf Kreise aus je einer Sehne, einer Außenkante und zwei Brücken erhalten das Gewicht 10.*
- *Die fünf Kreise aus je einer Sehne und zwei Innenkanten erhalten das Gewicht 10.*

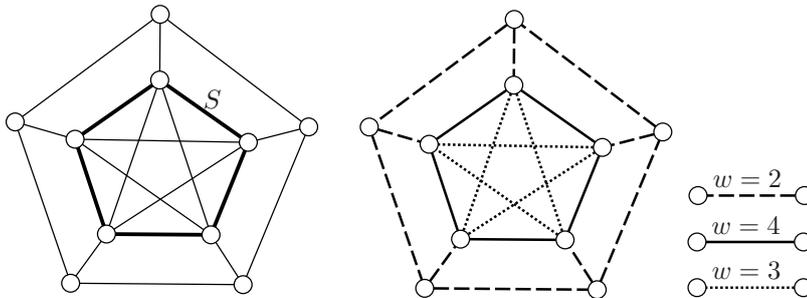


Abbildung 3.2: Der Sehnens-Graph $P_{5,2}(B^{(1)}, S)$ mit dem Sehnensatz S und der Gewichtung w .

Eine weitere Modifikation des Graphen erlaubt es sogar, die Gewichte noch weiter abzusenken. Die Abbildung 3.4 zeigt, wie der Graph F aus $P_{5,2}(B^{(1)}, S)$ in zwei Schritten erhalten werden kann. Zunächst werden die Sehnensatzkanten durch je einen weiteren Knoten unterteilt und der Innenkreis so gedreht, dass die gemeinsamen Knoten des Innen- und Sehnensatzes gerade die Knoten sind, die zuvor die Sehnensatzkanten unterteilten. Der entstandene Graph E kann nun mit 0 – 1-Gewichten belegt werden, so dass die eindeutige MDCB nicht ungerichtet ist.

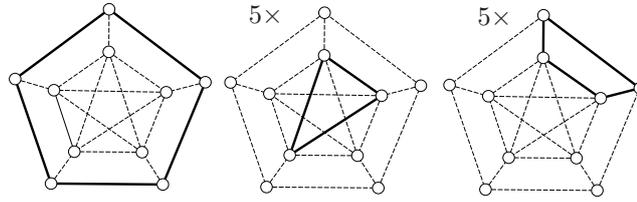


Abbildung 3.3: Die eindeutige MDCB $\tilde{B}^{(1)}$ der Instanz $(P_{5,2}(B^{(1)}), S, w)$.

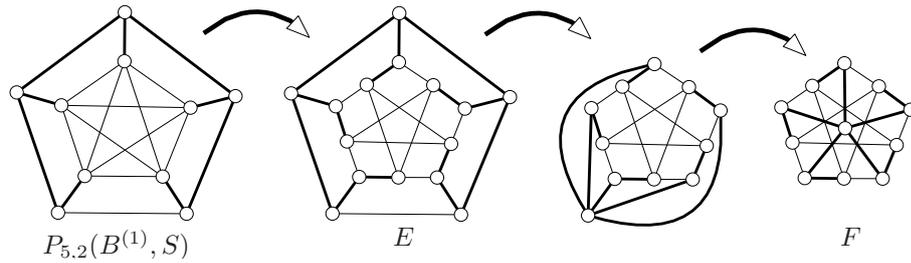


Abbildung 3.4: Die schrittweise Modifikation des Graphen $P_{5,2}(B^{(1)}, S)$ in den Graphen F mit Graph E als Zwischenergebnis.

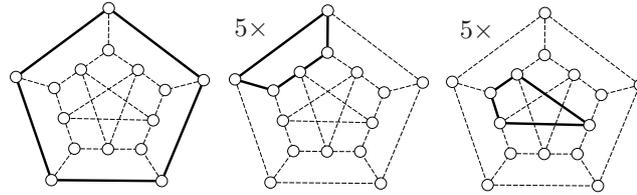


Abbildung 3.5: Die Entsprechung B_E der Basis $\tilde{B}^{(1)}$ im Graphen E .

Beispiel 3.2.3 (Eine 0 – 1-Gewichtung, so dass jede MDCB nicht ungerichtet ist). Der Übergang vom Graphen $P_{5,2}(B^{(1)}, S)$ zum Graphen E besteht aus der Unterteilung von fünf Kanten und der Drehung des Innenkreises. Die Unterteilung einer Kante erhöht die Kanten- und Knotenzahl um 1, während die Drehung des Innenkreises diese Zahlen konstant lässt. Damit gilt $\nu(E) = \nu(P_{5,2}(B^{(1)}), S) = 11$. Außerdem lassen sich die elf Basiskreise der Basis $\tilde{B}^{(1)}$ entsprechend in elf Kreise des Graphen E überführen (siehe Abbildung 3.5).

Ergänzt man einen Außenbaum von $P_{5,2}(B^{(1)}, S)$ mit je einer der durch die Unterteilung entstandenen Kanten, so erhält man den Spannbaum T_E von E wie er in der Abbildung 3.4 dick markiert ist. Bezüglich dieses Baumes T_E sind der Außenkreis und vier der fünf Kreise von B_E , die je eine Außenkante enthalten, Fundamentalkreise. Ihre Spalten in der Basismatrix zu diesem Baum bilden demnach Einheitsvektoren und so können sie und die zugehörigen Zeilen gestrichen werden, ohne den Absolutbetrag der Determinante zu ändern. Dies entspricht der LAPLACE-Entwicklung und somit erhält man eine Matrix in der nun auch die Spalte des fünften Kreises mit genau einer Außenkante einen Einheitsvektor darstellt. Wird auch diese Spalte nun nach LAPLACE entwickelt erhält man eine

Untermatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit gleichem Absolutbetrag der Determinante. Die Basis B_E ist somit eine gerichtete, aber nicht ungerichtete Kreisbasis von E .

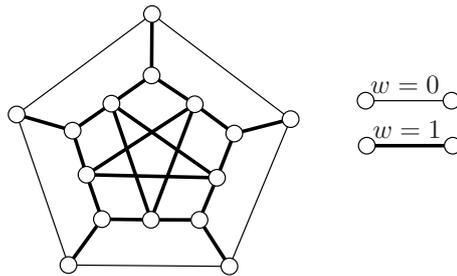


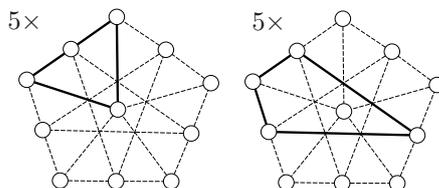
Abbildung 3.6: Der Graph E mit der 0 – 1-Gewichtung w .

Seien die Kanten des Außenkreises von E mit dem Gewicht 0 versehen und jede weitere Kante mit dem Gewicht 1 (siehe Abbildung 3.6). Dann hat der Außenkreis ein Gewicht von 0 und jeder weitere Kreis in B_E ein Gewicht von genau 4. Es gibt jedoch noch fünf weitere Kreise in (E, w) mit einem Gewicht von 4. Diese entstehen durch Addition über $GF(2)$ je eines Kreises mit genau einer Außenkante mit dem Außenkreis. Der Außenkreis ist aufgrund seines geringen Gewichtes in jeder MUCB enthalten, während ein Kreis mit einer Außenkante durch seine Summe mit dem Außenkreis ersetzt werden kann. Führt man bei der Berechnung der Determinante einer so erhaltenen Basis gleichen Gewichtes die LAPLACE-Entwicklung zuerst mit der Spalte des Außenkreises durch, so entspricht hinterher auch jeder der neuen Kreise einem Einheitsvektor und kann gestrichen werden. Damit bleibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

über und die minimale gerichtete Kreisbasis ist zwar nicht eindeutig, doch ist jede MDCB nicht ungerichtet.

Die Außenkanten des gewichteten Graphen (E, w) tragen das Gewicht 0 und so haben zwei Knoten des Außenkreises die Entfernung 0 voneinander. Daher kann der gesamte Außenkreis zu einem Knoten verschmolzen werden, ohne das Gewicht eines Kreises zu ändern. Diese Verschmelzung ist in Abbildung 3.4 dargestellt und führt auf den Graphen F , der nun vier Knoten und fünf Kanten weniger als E aufweist. Daher gilt $\nu(F) = \nu(E) - 1 = 10$. Jeder Basiskreis in B_E , ausgenommen der Außenkreis, hat zudem eine Entsprechung in F . Diese Kreismenge wird B_F genannt und ist in der Abbildung 3.7 dargestellt.

Abbildung 3.7: Die Entsprechung B_F der Basis B_E im Graphen F .

Beispiel 3.2.4 (Eine eindeutige MDCB eines ungewichteten Graphen, die nicht ungerichtet ist). Die Überführung des Graphen E in den Graphen F hat alle Kanten mit Gewicht 0 kontrahiert. Tragen alle übrigen Kanten weiterhin das Gewicht 1, so kann F als ungewichtet angesehen werden. Die Länge eines Kreises entspricht dann der Anzahl seiner Kanten und die Kreise in B_F sind die einzigen Kreise in F mit höchstens vier Kanten.

Überführt man auch den Spannbaum T_E in den Spannbaum T_F wie in Abbildung 3.4, so sind die fünf Kreise von B_F , die den mittleren Knoten enthalten, Fundamentalkreise von T_F . Erneut können die zugehörigen Zeilen und Spalten mittels der LAPLACE-Entwicklung aus der Basismatrix gestrichen werden und man erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Abschnitt wurden auf Grundlage der Sehnen-Graphen Instanzen des MDCB-Problems erzeugt, deren eindeutige Optimallösungen eine gerade Determinante aufweisen. Somit sind die minimalen ungerichteten Kreisbasen dieser gewichteten Graphen echt schwerer als deren minimale gerichtete Kreisbasen.

Das Beispiel 3.2.2 führt einen Graphen mit 10 Knoten, 20 Kanten und Gewichten aus $\{2, 3, 4\}$ an, dessen eindeutige MDCB das Gewicht 110, jede MUCB jedoch das Gewicht 111 aufweist. Dieser Graph wurde in zwei Schritten modifiziert, um das Beispiel 3.2.4 eines *ungewichteten* Graphen mit 11 Knoten und 20 Kanten zu erhalten, dessen eindeutige MDCB das Gewicht 80, jede MUCB jedoch das Gewicht 81 hat.

3.3 Das MICB-Problem

Definition 3.3.1 (MICB-Problem). Das *minimum integral cycle basis-Problem* oder kurz *MICB-Problem* fragt zu einer gegebenen Instanz $\mathcal{I} = (D, w)$ nach einer *ganzzahligen* Kreisbasis von D mit minimalem Gewicht.

Dieser Abschnitt wird wieder auf Grundlage der Sehnen-Graphen aus Kapitel 2 einen Graphen zusammen mit einer Gewichtung herleiten, dessen eindeutige minimale ungerichtete Kreisbasis nicht ganzzahlig ist. Da ungerichtete Kreisbasen sich durch ihre ungerade Determinante auszeichnen und ganzzahlige Kreisbasen genau die Kreisbasen mit Determinante 1 sind, wird zunächst nach einem möglichst kleinen Zirkulanten gesucht, der eine Innen- oder Außenbasis mit Determinante $3 + 2k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ aufweist. Die Tabelle 3.2 zeigt, dass der $Z_{5,2}$,

der einzige Zirkulant auf 5 Knoten, keine solche Basis birgt. Der nächstgrößere Zirkulant ist der $Z_{7,2}$ beziehungsweise isomorph dazu der $Z_{7,3}$, welcher hier bevorzugt werden soll, da seine kanonische Einbettung (Abbildung 2.1) übersichtlicher erscheint. Die Tabelle 2.2 zeigt bereits die minimalen Tupel des $Z_{7,3}$ und somit die möglichen Determinanten seiner Innen- und Außenbasen. Da das Tupel $(1, 3)$ minimal ist und $\gcd(n = 7, a = 3) = 1$ gilt, hat die 1-te Innenbasis $B_{(1)}$ die Determinante 3 und erfüllt somit die gewünschten Anforderungen. Der 7, 3-Zirkulant wird nun in Analogie zur Konstruktion zum letzten Abschnitt 3.2 in einen Sehnens-Graphen $P_{7,3}(B_{(1)}, S)$ überführt. Die Zwischenschritte sind in der Abbildung 3.8 bebildert.

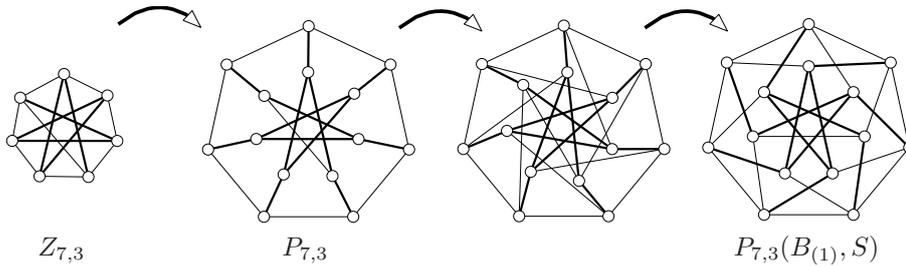


Abbildung 3.8: Die schrittweise Überführung des 7, 3-Zirkulanten in den Graphen $P_{7,3}(B_{(1)}, S)$.

Zunächst werden Brücken zwischen Innen- und Außenkreis gesetzt, deren hohes Gewicht später dafür sorgt, dass nicht-geschlossenen Kreise eine Größenordnung schwerer als geschlossene Kreise sind. Dadurch erhält man den verallgemeinerten PETERSEN-Graphen $P_{7,3}$ und die Entsprechung eines minimalen Kreises des Tupels $(1, 3)$ in diesem Graphen.

Da es keine Belegung der Gewichte $\{w_A, w_B, w_I\}$ gibt, unter welcher die 1-te Innenbasis von $P_{7,3}$ die eindeutige MDCB ist, müssen die $(1, 3)$ -Kreise wieder durch je eine Sehne in je zwei kürzere Kreise geteilt werden. Die Sehnen verlaufen diesmal jedoch zwischen einem inneren und einem äußeren Knoten und bilden somit eine zweite Brückenmenge. Die Abbildung 3.9 zeigt die Überführung eines $(1, 3)$ -Kreises und die Lage seiner Sehne. Dabei wurde im letzten Schritt lediglich die Einbettung geändert, indem der Innenkreis ein Stück entgegen des Uhrzeigersinns gedreht wurde.

Der so entstandene Graph $P_{7,3}(B_{(1)}, S)$ kann nun so mit Gewichten w_A, w_B, w_S und w_I für die Außenkanten, Brücken, Sehnen beziehungsweise Innenkanten belegt werden, dass die Entsprechung der 1-ten Innenbasis die eindeutige MDCB darstellt.

Beispiel 3.3.2 (Eine eindeutig MDCB, die ungerichtet aber nicht ganzzahlig ist). Seien die Kantengewichte des Graphen $P_{7,3}(B_{(1)}, S)$ wie folgt festgesetzt:

$$w_A = 4 \quad w_B = w_S = 7 \quad w_I = 3$$

Dann gibt es genau $15 = \nu(P_{7,3}(B_{(1)}, S))$ Kreise in $(P_{7,3}(B_{(1)}, S), w)$ mit einem Gewicht von höchstens 22:

- Der Innenkreis trägt das Gewicht $7 \cdot 3 = 21$.

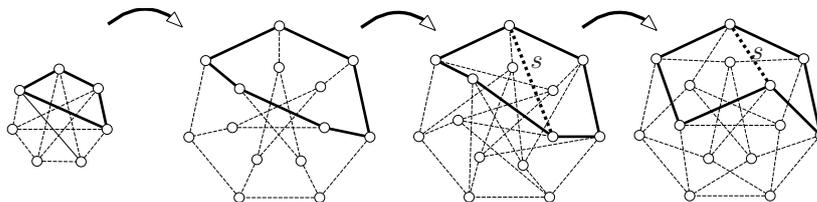


Abbildung 3.9: Ein minimaler Kreis mit Tupel $(1, 3)$ im $7, 3$ -Zirkulanten, seine Entsprechung im $P_{7,3}$ und die Sehne s dieses Kreises im Graphen $P_{7,3}(B_{(1)}, S)$.

- Die sieben Kreise aus einer Innenkante, einer Außenkante, einer Brücke und einer Sehne tragen das Gewicht 21.
- Die sieben Kreise aus zwei Außenkanten, einer Brücke und einer Sehne tragen das Gewicht 22.

Diese fünfzehn Kreise bilden die Kreismenge $\tilde{B}_{(1)}$, die Entsprechung der 1-ten Innenbasis des $7, 3$ -Zirkulanten und damit hat die eindeutige minimale Kreisbasis von $(P_{7,3}(B_{(1)}, S), w)$ die Determinante 3 und ist somit zwar ungerichtet, aber nicht ganzzahlig.

Im vorigen Abschnitt 3.2 wurde der Graph $P_{5,2}(B^{(1)}, S)$ durch weitere Modifikationen in einen Graphen F überführt, der zwar einen Knoten mehr aufweist, aber mit der konstanten Gewichtung 1 eine eindeutige MDCB birgt, die nicht ungerichtet ist. Vergleichbare Schritte lassen sich auch hier anwenden und man erhält schließlich den Graphen I wie er in der Abbildung 3.10 dargestellt ist. Im Vergleich zum Graphen $P_{7,3}(B_{(1)}, S)$ weist I die gleiche Kantenzahl und eine um Eins erhöhte Knotenzahl auf. Dementsprechend sinkt die Dimension des Zykelraumes von 15 auf 14 und es gibt für jeden der Kreise in $\tilde{B}_{(1)}$, ausgenommen dem Innenkreis, eine Entsprechung in I . Diese Kreismenge B_I ist in Abbildung 3.11 dargestellt und bildet tatsächlich eine Kreisbasis der Determinante 3.

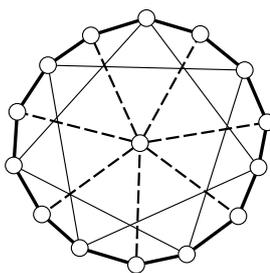


Abbildung 3.10: Ein vergleichbarer Graph I zum Graphen F des Abschnittes 3.2.

Die Gewichtung des Graphen $P_{7,3}(B_{(1)}, S)$ kann im Graphen I zwar abgesenkt werden, doch erreicht man nicht ein Gewicht von 1 auf jeder Kante. Die kleinsten Werte, unter denen B_I die eindeutige minimale Kreisbasis von (I, w) bildet, sind ein Gewicht von $w_I = 2$ auf den Kanten des Innenkreises, sowie auf den Außenkanten und den zum Mittelpunkt inzidenten Kanten ein Gewicht von $w_A = w_B = 3$.

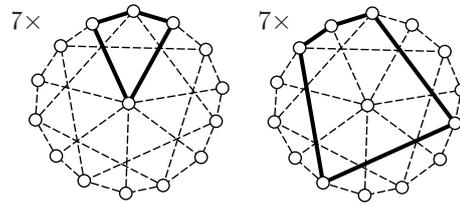


Abbildung 3.11: Die Kreismenge B_I in I als Entsprechung der Basis B_F von F .

Mit den Beispielen dieses und des letzten Abschnittes wurde belegt, dass das MDCB-, das MUCB- und das MICB-Problem jeweils eigenständige Optimierungsprobleme darstellen. Analog zur Abbildung 1.5 illustriert die folgende Abbildung 3.12 die Beziehungen zwischen den Mengen der Optimallösungen dieser drei Probleme.

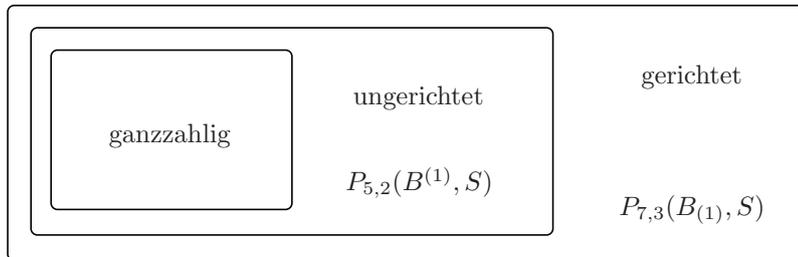


Abbildung 3.12: Ein vollständiges Bild über die Beziehungen der Optimallösungen des MDCB-, MUCB- und MICB-Problems.

Kapitel 4

Der Algorithmus von Horton

Der erste polynomielle Algorithmus zur Bestimmung einer minimalen ungerichteten Kreisbasis, der hier vorgestellt wird, ist der Algorithmus von Horton. Er konstruiert eine minimale Kreisbasis Kreis für Kreis, indem mit der leeren Menge I begonnen wird. In jeder Iteration wird ein kürzester Kreis, der zusammen mit den bereits gewählten Kreisen in I linear unabhängig ist, der Menge hinzugefügt. Die Optimalität dieser Vorgehensweise basiert auf der Tatsache, dass die Inzidenzvektoren der Kreise in G mit der linearen Unabhängigkeit im $GF(2)^m$ ein Matroid bilden.

4.1 Unabhängigkeitssystem

Definition 4.1.1. Ein *Unabhängigkeitssystem* ist ein Paar (E, \mathcal{I}) aus einer Grundmenge E und einer Menge \mathcal{I} von Teilmengen von E mit folgenden Eigenschaften:

- a) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- b) $A \subset B, B \in \mathcal{I} \implies A \in \mathcal{I}$.

Definition 4.1.2. Ein Unabhängigkeitssystem ist ein *Matroid*, falls es zusätzlich folgende Eigenschaft erfüllt:

- c) $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B| \implies \exists e \in B \setminus A : A \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Die Mengen in \mathcal{I} heißen *unabhängig* und die restlichen Teilmengen von E werden *abhängig* genannt. Eine *Basis* eines Unabhängigkeitssystems ist eine maximal unabhängige Menge $A \subseteq E$, das heißt $A \in \mathcal{I}$ und $A \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ für alle $e \in E \setminus A$. In einem Matroid haben alle Basen dieselbe Kardinalität, was im Allgemeinen für Unabhängigkeitssysteme nicht erfüllt ist. Diese Kardinalität wird der *Rang* des Matroids genannt und mit $r(E)$ bezeichnet.

Die Begriffe Basis und unabhängige Menge sind der linearen Algebra entlehnt. Sei zum Beispiel X eine Menge von Vektoren im \mathbb{K}^m und \mathcal{I} die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von X , so bildet (X, \mathcal{I}) ein Matroid. Auf diese Weise erhält man ein Matroid auf der Grundmenge aller elementaren Kreise in G , indem eine Menge von Kreisen genau dann *unabhängig im Matroid* ist, wenn die Menge ihrer Inzidenzvektoren linear unabhängig im $GF(2)^m$ ist. Dieses Matroid soll im weiteren Verlauf mit M_G bezeichnet werden.

Bemerkung 4.1.3. Diese Vorgehensweise läßt sich für einen gerichteten Graphen D zur Konstruktion eines Matroids M_D übernehmen. Die Grundmenge von M_D ist die Menge aller gerichteten Kreise in D und eine Menge von gerichteten Kreisen ist genau dann unabhängig in M_D , wenn die Menge ihrer Inzidenzvektoren linear unabhängig im \mathbb{R}^m ist.

4.2 Der *greedy*-Algorithmus

Ist zusätzlich eine Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Grundmenge des Matroids gegeben, so fragt das *minimum matroid basis*-Problem nach einer Basis des Matroids mit minimalem Gewicht. Dieses Problem ist mittels Algorithmus 1 mit polynomialer Laufzeit optimal lösbar, falls zwei Voraussetzungen erfüllt werden können:

- V1** Es kann zu einer Menge $I \subseteq E$ in polynomialer Zeit entschieden werden, ob sie abhängig oder unabhängig ist.
- V2** Die Grundmenge E ist genügend klein, so dass deren Elemente in polynomialer Zeit nach ihrem Gewicht sortiert werden können.

Algorithmus 1 best-in-greedy mit Minimierung

Input: Ein Paar (U, w) aus einem Unabhängigkeitssystem $U = (E, \mathcal{I})$ auf der Grundmenge E und einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Output: Eine Basis von U .

- 1: Sortiere die Elemente der Grundmenge nach nicht-absteigendem Gewicht (d.h. am Ende dieses Schrittes kann man $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_{|E|})$ annehmen).
 - 2: Setze $I = \emptyset$.
 - 3: **for** $i = 1$ bis $|E|$ **do**
 - 4: **if** $I \cup \{e_i\} \in \mathcal{I}$ **then**
 - 5: $I \leftarrow I \cup \{e_i\}$.
 - 6: **end if**
 - 7: **end for**
 - 8: **return** I .
-

Theorem 4.2.1. *Ist das übergebene Unabhängigkeitssystem ein Matroid, so berechnet Algorithmus 1 eine Basis minimalen Gewichts.*

Beweis. Angenommen die berechnete Basis $B = \{B_1, \dots, B_{r(E)}\}$ ist nicht optimal. Dann sei i die Iteration, in der Algorithmus 1 den ersten Fehler macht, das heißt, $\{B_1, \dots, B_{i-1}\}$ ist zu einer optimalen Basis $O = \{B_1, \dots, B_{i-1}, O_i, \dots, O_{r(E)}\}$ erweiterbar, aber $\{B_1, \dots, B_{i-1}, B_i\}$ ist in keiner optimalen Basis mehr enthalten.

Seien $B^{(k)}$ und $O^{(k)}$ für $k \leq r(E)$ die Menge der k kürzesten Elemente der Basis B beziehungsweise O . In den Iterationen $k < i$ gilt also $B^{(k)} = O^{(k)}$ und insbesondere

$$w(B^{(k)}) = w(O^{(k)}) \quad \text{für alle } k < i.$$

Da in der i -ten Iteration nun das Element B_i statt O_i gewählt wurde, gilt $w(B_i) \leq w(O_i)$ und somit

$$w(B^{(i)}) \leq w(O^{(i)}).$$

Da die Basis B nicht optimal ist, muss sie ein echt höheres Gewicht als O aufweisen, das heißt $w(B) > w(O)$. Es gibt also eine kleinste Zahl $j > i$ für die

$$w(B^{(j)}) > w(O^{(j)})$$

gilt. Die Abbildung 4.1 veranschaulicht die Gewichte der nun wichtigen Elemente auf dem Zahlenstrahl.

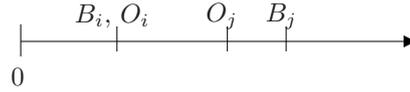


Abbildung 4.1: Die Gewichte der Elemente B_i , O_i , B_j und O_j auf dem Zahlenstrahl.

Die Mengen $B^{(j-1)}$ und $O^{(j)}$ sind unabhängig und erfüllen außerdem die Relation $|B^{(j-1)}| < |O^{(j)}|$. Nach der Eigenschaft 4.1.2 eines Matroids, muss es also ein Element $e \in O^{(j)} \setminus B^{(j-1)}$ geben, das $B^{(j-1)}$ zu einer unabhängigen Menge ergänzt. Alle Elemente in $O^{(j)}$ weisen jedoch ein echt kleineres Gewicht als B_j auf und würden somit aufgrund der Sortierung im Algorithmus 1 in Zeile 4 vor B_j auftauchen. Das widerspricht der Wahl von B_j . \square

Korollar 4.2.2. *Seien B und B' zwei minimale Basen eines Matroids und $w = (w_1, \dots, w_{r(E)})$ und $w' = (w'_1, \dots, w'_{r(E)})$ die nicht-absteigenden Folgen der Gewichte der Basiselemente von B beziehungsweise B' . Dann gilt $w = w'$.*

Beweis. Seien die Elemente der Basis $B = \{e_1, \dots, e_{r(E)}\}$ und der Basis $B' = \{e'_1, \dots, e'_{r(E)}\}$ anhand der Reihenfolge ihrer nicht-absteigenden Gewichte indiziert. Sei j der kleinste Index, an dem sich w und w' unterscheiden und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_j < w'_j$. Die unabhängigen Mengen

$$A_1 = \{e'_1, \dots, e'_{j-1}\} \quad \text{und} \quad A_2 = \{e_1, \dots, e_j\}$$

erfüllen $|A_1| < |A_2|$ und so muss es nach der zusätzlichen Eigenschaft der Matroide in Definition 4.1.2 ein Element in A_2 geben, das A_1 unabhängig ergänzt. Bezeichne A'_1 nun die durch dieses Element ergänzte Menge. Da alle Elemente in A_2 ein geringeres Gewicht als e'_j aufweisen, gilt

$$w(A'_1) < w(\{e'_1, \dots, e'_j\}).$$

Nun wiederholt sich die Situation mit dem Index $j + 1$, das heißt, ist $w_{j+1} \leq w'_{j+1}$, so setze $A'_2 = \{e_1, \dots, e_{j+1}\}$. Ist hingegen $w_{j+1} > w'_{j+1}$, so setze $A'_2 = \{e'_1, \dots, e'_{j+1}\}$. In beiden Fällen gilt $|A'_1| < |A'_2|$ und es gibt ein Element e in A'_2 , welches die unabhängige Menge A'_1 unabhängig ergänzt. Bezeichne A''_1 die so entstandene Menge. Da alle Elemente in A'_2 ein höchstens so großes Gewicht wie e'_{j+1} aufweisen, gilt

$$\begin{aligned} w(A''_1) &= w(A'_1) + w(e) \leq w(A'_1) + w(e'_{j+1}) \\ &< w(\{e'_1, \dots, e'_j\}) + w(e'_{j+1}) = w(\{e'_1, \dots, e'_{j+1}\}). \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhält man nach $r(E) - j + 1$ Schritten eine unabhängige Menge A mit $w(A) < w(B')$, was im Widerspruch zur Minimalität der Basis B' steht. \square

Algorithmus 1 ist ersichtlich polynomial in $|E|$, falls die IF-Abfrage in Zeile 4 auch in polynomialer Zeit in $|E|$ entschieden werden kann.

Wird der *greedy*-Algorithmus nun für das Matroid M_G mit der (auf die Kreise erweiterten) Gewichtsfunktion w angewendet, so ermittelt dieser eine minimale ungerichtete Kreisbasis von G .

Die IF-Abfrage in Zeile 4 muss zu einer Menge I von Kreisen und einem zusätzlichen Kreis e_i entscheiden, ob $I \cup \{e_i\}$ unabhängig, das heißt, die Menge ihrer Inzidenzvektoren linear unabhängig in $GF(2)^m$ ist. Dies kann mittels des GAUSSSchen Eliminationsverfahren polynomial in $m = |E(G)|$ entschieden werden und somit ist **V1** erfüllt.

Da die Grundmenge allerdings die Menge aller elementaren Kreise in G ist und diese exponentiell groß werden kann, ist **V2** *nicht erfüllt*. Die Laufzeit von Algorithmus 1 läßt sich somit nicht durch ein Polynom in der Größe des Graphen beschränken.

Horton ermittelte jedoch eine verhältnismäßig kleine Menge kurzer Kreise, die weiterhin jede minimale ungerichtete Kreisbasis enthält.

4.3 Die Horton-Familie

Definition 4.3.1. Die *Horton-Familie* \mathcal{H} eines ungerichteten, gewichteten Graphen besteht aus allen knotenelementaren Kreisen der Form $C = P_{i,j} \cup \{j, k\} \cup P_{k,i}$. Dabei bezeichnet $P_{u,v}$ einen kürzesten Weg von u nach v in (G, w) .

Prinzipiell kann \mathcal{H} noch immer exponentiell viele Kreise enthalten, da exponentiell viele kürzeste Wege zwischen zwei Knoten existieren können. Durch eine leichte Perturbation der Gewichte auf den Kanten kann man allerdings erreichen, dass alle kürzesten Wege eindeutig sind und jede MUCB bezüglich dieser neuen Gewichtung \tilde{w} auch eine MUCB bezüglich w ist. Mit den perturbierten Gewichten sind dann höchstens $m \cdot n$ Kreise in der Horton-Familie.

Um eindeutige kürzeste Wege zu erhalten, können die Kantengewichte beispielsweise wie folgt gestört werden: Unter der Annahme, dass die Gewichte auf den Kanten ganze Zahlen sind, erfüllt beispielweise $\tilde{w}(e_i) = w(e_i) + 2^{-i}$ für $i = 1, \dots, m$ die gewünschten Anforderungen.

Es bleibt zu zeigen, dass die Horton-Familie \mathcal{H} eines gewichteten Graphen jede MUCB enthält.

Proposition 4.3.2. *Für jeden elementaren Kreis $C \notin \mathcal{H}$ gibt es Knoten $u \neq v \in C$, so dass jeder kürzeste Weg $P_{u,v}$ von u nach v im Inneren disjunkt zu C ist, das heißt $P_{u,v} \cap C = \{u, v\}$.*

Beweis. Sei C ein elementarer Kreis in G , der sich nicht als $C = P_{i,j} \cup \{j, k\} \cup P_{k,i}$ darstellen läßt. Sei $\{u, v\}$ eine Kante in C und $w \in V(C) \setminus \{u, v\}$ ein weiterer Knoten des Kreises. Da C kein Horton-Kreis ist, ist entweder kein kürzester (w, u) -Weg oder kein kürzester (w, v) -Weg ganz in C enthalten.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit kein kürzester Weg $P_{w,u}$ ganz in C , das heißt, jeder solche Weg $P_{w,u}$ startet auf C , verläßt C bei einem Knoten w_1 und betritt C das erste Mal wieder bei w_2 . Da kürzeste Wege unter nicht-negativen Gewichten elementar sind, sind w_1 und w_2 verschieden und das Teilstück P_{w_1, w_2} von $P_{w,u}$ ein kürzester (w_1, w_2) -Weg. Des Weiteren ist P_{w_1, w_2} im Inneren zu C disjunkt.

Gibt es einen weiteren kürzesten (w_1, w_2) -Weg, der nicht im Inneren disjunkt zu C verläuft, so kann dieses Argument wiederholt werden, um zwei Knoten w'_1 und w'_2 mit den gleichen Eigenschaften wie w_1 und w_2 zu finden. Da die Entfernung zwischen diesen beiden Knoten mit jeder Iteration echt vermindert wird, endet dieses Verfahren mit zwei Knoten, die die Behauptung erfüllen. \square

Lemma 4.3.3. *Sei (G, w) eine Instanz des MUCB-Problems und \mathcal{H} die Hortonfamilie von (G, w) . Dann gilt für jede minimale ungerichtete Kreisbasis B_{OPT} von (G, w) :*

$$B_{OPT} \subseteq \mathcal{H}.$$

Beweis. Angenommen $B_{OPT} = \{C_1, \dots, C_\nu\}$ ist eine minimale Kreisbasis und C_i ein Kreis, der nicht in der Horton-Familie ist. Dann seien u, v zwei Knoten von C , deren Existenz Proposition 4.3.2 liefert und $P_{u,v}$ ein kürzester (u, v) -Weg. Der Teilgraph $P_{u,v} \cup C_i$ enthält neben C_i zwei weitere elementare Kreise $C_i^{(1)}$ und $C_i^{(2)}$ geringeren Gewichts:

$$w(C_i^{(1)}) < w(C_i), \quad w(C_i^{(2)}) < w(C_i).$$

Der Austausch von $C_i^{(1)}$ mit C_i würde das Gewicht der Basis senken und demnach kann $B_{OPT} \setminus C_i \cup C_i^{(1)}$ nicht linear unabhängig sein. Die Kreise in $B_{OPT} \setminus C_i$ können den Kreis $C_i^{(1)}$ und analog auch den Kreis $C_i^{(2)}$ also bereits linear kombinieren. Doch dann wird auch $C_i = C_i^{(1)} + C_i^{(2)}$ von $B_{OPT} \setminus C_i$ dargestellt. Dies steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von B_{OPT} . \square

Es gibt sogar eine kleinere Teilmenge der Horton-Familie, die noch immer jede MUCB enthält. Proposition 4.3.2 und Lemma 4.3.3 sind solange auf einen Kreis C anwendbar, wie dieser nicht für *jedes* Paar einer Kante $\{u, v\} \in C$ und eines Knotens $w \in V(C)$ die Form $C = P_{w,u} \cup \{u, v\} \cup P_{w,v}$ hat.

Kreise, die diese stärkere Bedingung erfüllen, werden *isometrisch* genannt, da für sie gilt, dass die Entfernung zweier Kreisknoten im Graphen gleich ihrer Entfernung im Kreis ist. Die Horton-Familie kann aber leichter bestimmt werden, da die Horton-Kreise genau die Fundamentalkreise der Kürzeste-Wege-Bäume sind.

Abschließend wird der Algorithmus von Horton im Pseudocode angegeben.

Algorithmus 2 Der Algorithmus von Horton

Input: Ein Paar (G, w) aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Output: Eine minimale ungerichtete Kreisbasis von (G, w) .

- 1: Bestimme die Menge \mathcal{H} der Horton-Kreise in (G, w) .
 - 2: Sortiere die Kreise in \mathcal{H} nach nicht-absteigendem Gewicht (d.h. am Ende dieses Schrittes kann man $w(C_1) \leq \dots \leq w(C_{|\mathcal{H}|})$ annehmen).
 - 3: Setze $I = \emptyset$.
 - 4: **for** $i = 1$ bis $|\mathcal{H}|$ **do**
 - 5: **if** $I \cup \{C_i\}$ linear unabhängig im $GF(2)^{|E|}$ **then**
 - 6: $I \leftarrow I \cup \{C_i\}$.
 - 7: **end if**
 - 8: **end for**
 - 9: **return** I .
-

Bemerkung 4.3.4. Mit Hortons Ansatz kann auch das MDCB-Problem in polynomialer Zeit gelöst werden. Die Horton-Familie eines gerichteten Graphen besteht aus allen gerichteten Kreisen, deren Projektion auf $G(D)$ einen Horton-Kreis ergibt. Die so definierte Horton-Familie birgt mit der gleichen Argumentation über dem Körper \mathbb{R} stets jede minimale *gerichtete* Kreisbasis. Zusammen mit der Bemerkung 4.1.3 folgt daraus ein polynomieller Algorithmus für das MDCB-Problem.

Kapitel 5

Der Algorithmus von De Pina

Ähnlich wie der Algorithmus von Horton konstruiert der Algorithmus von De Pina eine minimale ungerichtete Kreisbasis durch iteratives Aufnehmen von Kreisen in eine anfangs leere Menge I . In jeder Iteration wird ein kurzer Kreis gefunden, der zusammen mit den bereits gewählten Kreisen linear unabhängig ist und der Menge I hinzugefügt wird. Nach ν Iterationen stellt I eine minimale ungerichtete Kreisbasis von (G, w) dar.

5.1 Zeugen

Zur Verifikation der linearen Unabhängigkeit eines Kreises C mit einer Menge $I = \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ bereits linear unabhängiger Kreise wird ein Vektor $S_i \in GF(2)^m$, der *Zeuge*, benutzt.

Definition 5.1.1. Sei $i - 1 < m$ und bezeichne A eine Menge $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ linear unabhängiger Vektoren des \mathbb{K}^m sowie die Matrix, deren Spalten sie bilden. Dann ist ein *Zeuge von A* eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems:

$$x^T A = 0^T \in \mathbb{K}^{i-1}.$$

Proposition 5.1.2. Sei A wie oben gewählt und S ein Zeuge von A . Dann gilt für jeden Vektor $y \in \mathbb{K}^m$:

$$S^T y \neq 0 \implies A \cup \{y\} \text{ linear unabhängig.} \quad (5.1.1)$$

Beweis. Um die Kontraposition zu zeigen, sei A linear unabhängig, $A \cup \{y\}$ jedoch linear abhängig. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1} \in \mathbb{K}$, so dass $y = \sum \lambda_k \cdot a_k$ gilt. Daraus folgt

$$S^T y = S^T \left(\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k a_k \right) = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \underbrace{S^T a_k}_{=0} = 0.$$

□

Bemerkung 5.1.3. Die Rückrichtung von (5.1.1) gilt im Allgemeinen nicht. Ist jedoch die Menge $A \cup \{y\}$ linear unabhängig, so gibt es auch einen Vektor der dies bezeugt.

5.2 Der Algorithmus

Der Algorithmus von De Pina berechnet zu einer Menge $I = \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ bereits gewählter (linear unabhängiger) Kreise einen Zeugen S_i . Diese Berechnung kann mittels des GAUSSSchen Eliminationsverfahrens in polynomialer Zeit durchgeführt werden. Ist der Zeuge S_i gewählt, so sucht eine Unterroutine einen kürzesten elementaren Kreis C_i mit $S_i^T C_i \neq 0$ und fügt diesen der Menge I hinzu.

Algorithmus 3 Der Algorithmus von De Pina

Input: Ein Paar (G, w) aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Output: Eine ungerichtete Kreisbasis von G .

- 1: Setze $I = \emptyset$.
 - 2: Setze $S_1 \in GF(2)^{|E|} \setminus \{0\}$ beliebig.
 - 3: **for** $i = 1$ bis ν **do**
 - 4: Berechne einen kürzesten Kreis C_i mit $S_i^T C_i \neq 0$.
 - 5: Setze $I \leftarrow I \cup \{C_i\}$.
 - 6: Setze $S_{i+1} \in GF(2)^{|E|} \setminus \{0\}$ beliebig mit $S_{i+1}^T C_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, i$.
 - 7: **end for**
 - 8: **return** I .
-

Theorem 5.2.1. *Algorithmus 3 berechnet eine MUCB von (G, w) .*

Beweis. Angenommen die vom Algorithmus 3 berechnete Menge $I = \{C_1, \dots, C_\nu\}$ ist keine minimale Kreisbasis. Dann sei i der größte Index für den $\{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ noch zu einer optimalen Kreisbasis $O = \{C_1, \dots, C_{i-1}, O_i, \dots, O_\nu\}$ ergänzt werden kann. Da die Kreise in O eine Basis bilden, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu \in GF(2)$, so dass

$$C_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k C_k + \sum_{k=i}^{\nu} \lambda_k O_k \quad (5.2.1)$$

gilt. In Zeile 4 gilt $S_i^T C_i \neq 0$ und zusammen mit (5.2.1) ergibt das

$$0 \neq S_i^T C_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k S_i^T C_k + \sum_{k=i}^{\nu} \lambda_k S_i^T O_k. \quad (5.2.2)$$

Da S_i ein Zeuge von $[C_1, \dots, C_{i-1}]$ ist, ergibt die erste Summe von (5.2.2) gerade null. Demnach können nicht alle Summanden der zweiten Summe verschwinden und es gibt in $\{O_i, \dots, O_\nu\}$ einen Kreis O_k mit $\lambda_k \cdot S_i^T O_k \neq 0$. Insbesondere gilt $S_i^T O_k \neq 0$ und somit kam in der i -ten Iteration des Algorithmus 3 in Zeile 4 auch O_k in Betracht. Da dort C_i , statt O_k gewählt wurde, folgt

$$w(C_i) \leq w(O_k). \quad (5.2.3)$$

Der zu O_k gehörige Koeffizient λ_k ist nicht null und deshalb ist die Menge $O' = O \setminus O_k \cup C_i$ linear unabhängig im $GF(2)^m$. Mit (5.2.3) folgt $w(O') \leq w(O)$, O' ist also eine MUCB. Außerdem enthält O' nun die Kreise C_1, \dots, C_i und das steht im Widerspruch zur Wahl des Indexes i . \square

Bemerkung 5.2.2. Der Beweis von Algorithmus 3 benötigt nicht die spezielle Wahl des Körpers $\mathbb{K} = GF(2)$. Die unten vorgestellte Subroutine zur Ermittlung des Kreises C_i macht von dieser Voraussetzung jedoch entscheidenden Gebrauch. Kann man die Subroutine in Zeile 4 auch über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ in polynomialer Zeit realisieren, so ergibt sich ein exakter Algorithmus für das MDCB-Problem mit polynomialer Laufzeit. Eine solche Realisierung und somit eine „gerichtete Variante“ des Algorithmus von De Pina existiert tatsächlich und kann in [10] nachgelesen werden.

5.3 Der Schichtgraph

Nun wird die Aufgabe, zu einem gegebenen Zeugen $S_i \in GF(2)^m$ einen kürzesten Kreis C_i mit $S_i^T C_i \neq 0$ zu finden, untersucht. Da der Körper $GF(2)$ nur aus den Elementen 0 und 1 besteht, hat sowohl jeder Vektor nur Nullen und Einsen als Einträge als auch das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren entweder den Wert 0 oder den Wert 1. Jeder Vektor $S \in GF(2)^m$ kann somit als Inzidenzvektor einer Kantenmenge $S \subseteq E(G)$ angesehen werden, indem eine Kante e genau dann in S ist, wenn $S(e) = 1$ gilt. Das Skalarprodukt zweier Kantenmengen $A, B \subseteq E$ berechnet sich dann wie folgt:

$$A^T B = \sum_{e \in E} A(e) \cdot B(e) = \sum_{e \in A \cap B} 1 = |A \cap B| \pmod{2}.$$

Der von Algorithmus 3 in der i -ten Iteration benutzte Zeuge S_i kann also als eine Kantenmenge interpretiert werden, die sich mit jedem Kreis in $I = \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ in gerade vielen Kanten schneidet. In der Zeile 4 wird dagegen nach einem kürzesten Kreis gesucht, der *ungerade* viele Kanten mit S_i gemeinsam hat.

Definition 5.3.1. Der *Schichtgraph* $G(S)$ zu einem Graphen $G = (V, E)$ und einer Kantenmenge $S \subseteq E$ entsteht wie folgt (siehe Abbildung 5.1):

- Starte mit dem leeren Graphen.
- Füge für jeden Knoten $v \in V$ zwei Knoten v^+ und v^- ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \in S$ füge die Kanten $\{u^+, v^-\}$ und $\{u^-, v^+\}$ ein.
- Für jede Kante $\{u, v\} \notin S$ füge die Kanten $\{u^+, v^+\}$ und $\{u^-, v^-\}$ ein.

Ein Schichtgraph besteht also aus zwei Kopien der Knotenmenge V , einer (+)-Schicht und einer (-)-Schicht. Kanten aus $E \setminus S$ erzeugen Kanten, die innerhalb einer Schicht verlaufen, wogegen Kanten aus S Entsprechungen zwischen den Schichten erzeugen.

Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ ist genau eine der von e erzeugten Kanten mit v^+ und die andere Kante mit v^- in $G(S)$ inzident. Ein elementarer Kreis $C = v - e_1 - \dots - e_k - v$ in G entspricht somit einem elementaren Weg von v^+ nach v^+ oder nach v^- im Schichtgraphen $G(S)$ (vergleiche Abbildung 5.2). Endet dieser Weg $P(C)$ wieder bei v^+ (und ist somit ein elementarer Kreis), so wechselt er gerade oft die Schicht. Endet $P(C)$ bei v^- , so wechselt er ungerade oft die Schicht, der Kreis C benutzt dann also eine ungerade Anzahl an Kanten

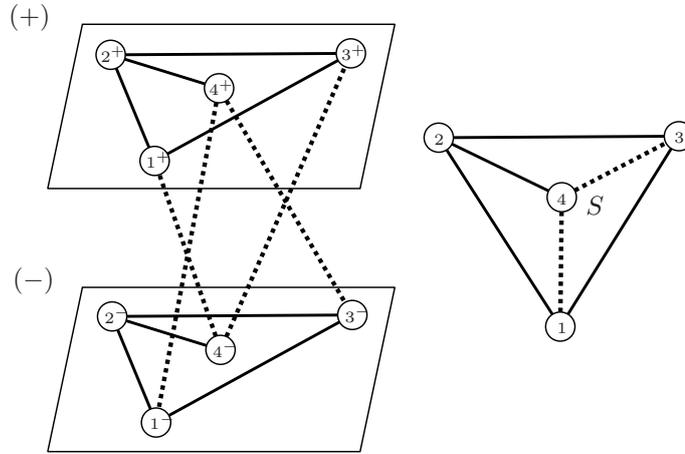


Abbildung 5.1: Der Schichtgraph $G(S)$ eines ungerichteten Graph G mit Kantenmenge S .

aus S . Es gilt für einen elementaren Kreis C in G und den entsprechenden Weg $P(C)$ in $G(S)$:

$$P(C) \text{ ist } (v^+, v^-)\text{-Weg} \iff S^T C \neq 0. \tag{5.3.1}$$

Jeder elementare Kreis C mit $S^T C \neq 0$ induziert zwar einen elementaren (v^+, v^-) -Weg, doch gibt Abbildung 5.3 ein Beispiel für einen elementaren (v^+, v^-) -Weg in $G(S)$, dessen Entsprechung in G ein geschlossener, aber nicht einmal kantenelementarer, (v, v) -Weg ist.

Trotzdem können *kürzeste* Kreise C in G mit $S^T C \neq 0$ mittels kürzester (v^+, v^-) -Wege in $G(S)$ gefunden werden.

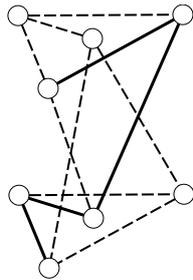


Abbildung 5.2: Ein elementarer Kreis in G und seine Entsprechung in $G(S)$.

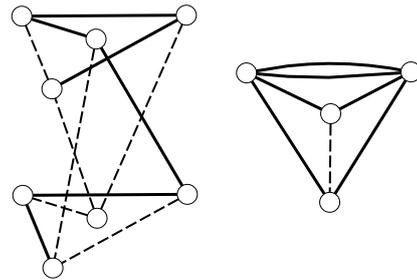


Abbildung 5.3: Ein elementarer $(1^+, 1^-)$ -Weg in $G(S)$ und seine Entsprechung in G .

Proposition 5.3.2. Sei zu $(G = (V, E), w)$ und einer Kantenmenge $S \subseteq E$ der Schichtgraph $G(S)$ zusammenhängend und die Gewichtsfunktion $w : E(G(S)) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ auf die Kanten des Schichtgraphen übertragen. Dann entspricht ein kantenminimaler kürzester (v^+, v^-) -Weg in $G(S)$ einem kürzesten elementaren Kreis C in G mit $S^T C \neq 0$.

Beweis. Da $G(S)$ als zusammenhängend angenommen wird, existiert zu jedem $v \in V$ ein (v^+, v^-) -Weg in $G(S)$. Sei P ein kantenminimaler kürzester (v^+, v^-) -Weg und C seine Entsprechung in G . Da die Kantengewichte nicht-negativ sind, ist P elementar in $G(S)$. Wäre C nun nicht elementar in G , so gäbe es eine Knotenwiederholung bei einem Knoten $w \neq v$. In P wiederholt sich weder w^+ noch w^- und so müssen beide Knoten w^+ und w^- auf P liegen. Das Stück von P zwischen diesen Knoten ist als Teilweg eines kürzesten Weges selbst ein kürzester (w^+, w^-) -Weg und enthält, da $w \neq v$ ist, weniger Kanten als P . Dies widerspricht der Wahl von P . \square

Mit Hilfe des Schichtgraphen kann nun eine Subroutine für Zeile 4 im Algorithmus 3 bereitgestellt werden.

Algorithmus 4 Subroutine für das Bestimmen eines kürzesten Kreises bezüglich eines gegebenen Zeugen

Input: Ein Tripel (G, w, S) aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und einer nichtleeren Teilmenge S der Kanten von G .

Output: Ein kürzester geschlossener Weg C in G mit ungeradem Schnitt mit S .

- 1: Konstruiere den Schichtgraphen $G(S)$.
 - 2: Setze dabei auf jede Kante das Gewicht der Originalkante.
 - 3: Setze $P_{min} \leftarrow E(G(S))$.
 - 4: **for** $v \in V$ **do**
 - 5: Berechne einen kürzesten (v^+, v^-) -Weg P in $G(S)$.
 - 6: **if** $w(P) \leq w(P_{min})$ **then**
 - 7: Setze $P_{min} \leftarrow P$.
 - 8: **end if**
 - 9: **end for**
 - 10: Rekonstruiere den geschlossenen Weg C aus P_{min} .
 - 11: **return** C .
-

Es bleibt allerdings noch zu zeigen, wie die Voraussetzung des Zusammenhangs von $G(S)$ aus Proposition 5.3.2 gewährleistet werden kann. Der Zusammenhang kann im Allgemeinen vor allem in der ersten Iteration des Algorithmus von De Pina nicht garantiert werden. Die Wahl des Zeugen S_i einer Iteration ist, wie sie in Zeile 6 beschrieben wird, bei Weitem nicht eindeutig. Ein Zeuge ist eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems

$$(x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_{i-1} \\ | & & | \end{pmatrix} = (0, \dots, 0). \quad (5.3.2)$$

Das System (5.3.2) hat $i - 1 < \nu$ Gleichungen aber $m = |E|$ Unbekannte. Im Abschnitt 1.2 des ersten Kapitels wurde gezeigt, dass es genügt, die auf einen Cobaum beschränkten Inzidenzvektoren zu betrachten, um eine Aussage über ihre lineare Unabhängigkeit treffen zu können. Ist $M = E \setminus T$ ein Cobaum, so birgt das Untergleichungssystem (5.3.3) mit den abgeschnittenen Vektoren

C_1^M, \dots, C_{i-1}^M noch immer nicht triviale Lösungen

$$(x_1, \dots, x_\nu) \begin{pmatrix} \left| \right. & & \left| \right. \\ C_1^M & \dots & C_{i-1}^M \\ \left| \right. & & \left| \right. \end{pmatrix} = (0, \dots, 0). \quad (5.3.3)$$

Ergänzt man eine nicht-triviale Lösung von (5.3.3) an den Stellen des Baumes T durch Nullen, so erhält man eine nicht-triviale Lösung von (5.3.2) und somit einen Zeugen S_i mit $S_i \cap T = \emptyset$. Beide Schichten des Graphen $G(S_i)$ enthalten somit den Spannbaum T , sind damit zusammenhängend und werden, da $S_i \neq 0$ ist, durch mindestens zwei Kanten miteinander verbunden.

Bemerkung 5.3.3. Tatsächlich muss bei der Wahl eines Zeugen S lediglich darauf geachtet werden, dass S nicht aus dem orthogonalen Komplement des Zykelraumes stammt, da in diesem Fall *alle* Kreise in D senkrecht auf S stehen. Das orthogonale Komplement des Zykelraumes *über* \mathbb{K} wird von den gerichteten Schnitten erzeugt (Vergleiche Abschnitt 1.1) und somit darf S im *gerichteten* Fall keinem Schnitt entsprechen. Im ungerichteten Fall gibt es sogenannte *Bicycles*, das heißt, Kreise, die gleichzeitig Schnitte sind. Doch die Abbildung 5.4 zeigt, dass Schnitte auch im MUCB-Problem Hindernisse darstellen können.

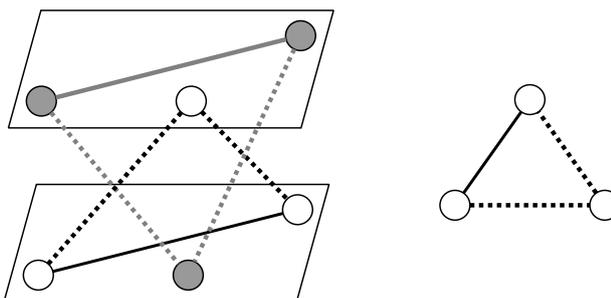


Abbildung 5.4: Ein unzusammenhängender Schichtgraph $G(S)$ zu einem zusammenhängenden Graphen G mit Kantenteilmenge S .

Zum Abschluss wird auch hier noch einmal die korrigierte Version des Algorithmus von De Pina im Pseudocode angegeben.

Algorithmus 5 Der Algorithmus von De Pina - korrigierte Version

Input: Ein Paar (G, w) aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Output: Eine minimale ungerichtete Kreisbasis von G .

```

1: Setze  $I = \emptyset$ .
2: Bestimme einen Spannbaum  $T$  von  $G$  mit Cobaumkantenmenge  $M$ .
3: Setze  $S_1 \in GF(2)^\nu \setminus \{0\}$  beliebig und ergänze  $S_1$  an den Stellen des Baumes  $T$  mit Nullen.
4: for  $i = 1$  bis  $\nu$  do
5:   Rufe Algorithmus 4 mit  $(G, w, S_i)$  auf und nenne das Ergebnis  $C_i$ .
6:   Setze  $I \leftarrow I \cup \{C_i\}$ .
7:   Setze  $S_{i+1} \in GF(2)^\nu \setminus \{0\}$  beliebig mit  $S_{i+1}^\top C_k^M = 0 \quad \forall k = 1, \dots, i$ .
8:   Ergänze  $S_{i+1}$  an den Stellen des Baumes  $T$  mit Nullen.
9: end for
10: return  $I$ .
```

Bemerkung 5.3.4. Auch im gerichteten Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann man durch Erweiterung der hier vorgestellten Vorgehensweise effizient einen kürzesten Kreis C mit $S_i^\top C \neq 0$ finden. Damit liefert De Pinas Ansatz ebenfalls einen polynomiellen Algorithmus für das MDCB-Problem.

5.4 Unterschiede zum Algorithmus von Horton

In diesem und dem vorigen Kapitel 4 und 5 wurden zwei Algorithmen für das MUCB-Problem vorgestellt. Dieser Abschnitt beschäftigt sich nun mit den Gemeinsamkeiten beider Algorithmen und den Aspekten, die den Algorithmus von Horton vom Algorithmus von De Pina unterscheiden.

Beide Algorithmen konstruieren eine minimale ungerichtete Kreisbasis durch iteratives Aufnehmen eines Kreises in die Basis. Der Algorithmus von Horton wählt stets einen kürzesten Kreis, der zusammen mit den bereits gewählten Kreisen linear unabhängig sind. Der Algorithmus von De Pina schränkt die Kandidatenmenge für den nächsten Kreis hingegen stark ein, indem er nur unter den Kreisen, die nicht senkrecht auf einem gegebenen Zeugen stehen, einen kürzesten auswählt. Anschaulich gibt die Wahl des Zeugen eine Richtung im $\mathbb{K}^{|A|}$ vor, in die der nächste Kreis zum Teil zeigen muss. Dieser Zeuge ist nur im letzten Iterationsschritt eindeutig (bis auf das Vorzeichen) bestimmt und so könnte beispielsweise schon in der ersten Iteration ein Zeuge gewählt werden, auf dem jeder kürzeste Kreis des Graphen senkrecht steht und somit keiner dieser Kreise bereits zu Beginn aufgenommen wird.

Bevor nun darauf eingegangen wird, warum trotz der Einschränkung auf eine Richtung im Endeffekt keiner der Kreise einer minimalen Kreisbasis verloren gehen kann, soll noch einmal die Bemerkung 5.1.3 heran gezogen werden. Die Proposition 5.1.2 besagt, dass ein Vektor x , der nicht senkrecht auf einem Zeugen S der Menge X steht, diese Menge linear unabhängig erweitert. Nach der Bemerkung 5.1.3 gilt die Umkehrung dieser Aussage jedoch nicht, da ein Vektor x , der die Menge X zwar linear unabhängig erweitert, unter Umständen senkrecht auf dem Zeugen S stehen kann. Allerdings gibt es in diesem Fall einen weiteren Zeugen S' der Menge X , der nicht senkrecht auf x steht.

Sind C_1, \dots, C_ν die Kreise einer minimalen Kreisbasis in der Reihenfolge, in der der Algorithmus von Horton sie gewählt hat (es gilt also $w(C_i) \leq w(C_{i+1})$), so gibt es auch eine Folge S_1, \dots, S_ν von Zeugen, die im Algorithmus von De Pina dazu führen, dieselbe Basis in derselben Reihenfolge zu konstruieren. Man sagt, dass der Algorithmus von De Pina den Algorithmus von Horton *imitieren* kann, während dies anders herum im Allgemeinen nicht möglich ist.

Legt der Algorithmus von De Pina nun aber eine andere Folge von Zeugen fest, unter denen die Kreise nicht ihres Gewichtes nach in die Basis kommen, so erscheint es fraglich, dass die Diskrepanz zwischen dem Gesamtgewicht der ersten i Kreise der Horton-Basis und dem Gesamtgewicht der ersten i Kreise der De Pina-Basis am Ende ausgeglichen wird. Eine Erklärung des Umstandes, dass der Algorithmus von De Pina trotzdem optimale Kreisbasen berechnet, gibt der Korrektheitsbeweis des Theorems 5.2.1. Dieser benutzt, dass zu jeder Basis $B = \{B_1, \dots, B_\nu\}$ jeder Kreis

$$C = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \cdot B_i \quad (5.4.1)$$

im Austausch mit einem $B_j \in B$ mit $\lambda_j \neq 0$ wiederum eine Basis liefert. Vorausgreifend sei erwähnt, dass es genau diese Eigenschaft ist, die bei *ganzzahligen Kreisbasen* nicht mehr gilt.

Der Algorithmus von De Pina macht also Gebrauch von einer Eigenschaft des Vektorraumes \mathbb{K}^d , um in jeder Iteration die Kandidatenmenge für den nächsten Kreis einzuschränken, ohne eine minimale Kreisbasis dabei außer Acht zu lassen. Außerdem weist diese, noch immer exponentiell große, Kandidatenmenge eine geeignete Struktur auf, die es ermöglicht einen kürzesten Kreis darin effizient zu berechnen. Der Algorithmus von De Pina macht insbesondere keinen Gebrauch von Lemma 4.3.3, das heißt von der Horton-Familie des Graphen. Natürlich sind die vom Algorithmus konstruierten Kreise stets Horton-Kreise, jedoch wird diese Information bei ihrer Bestimmung vorab nicht benötigt.

Kapitel 6

Die ganzzahligen Kreisbasen

Der Übergang von ungerichteten zu ganzzahligen Kreisbasen stellt ein größeres Problem dar als der Übergang von gerichteten zu ungerichteten Kreisbasen. Die gerichteten und ungerichteten Kreisbasen unterscheiden sich nur in der Wahl des Körpers \mathbb{K} und so gelten viele wesentliche Aussagen, die unabhängig vom Körper getroffen werden können, für beide, das MDCB- und das MUCB-Problem.

Ganzzahlige Kreisbasen sind eine Teilmenge der Kreisbasen über $GF(2)$, werden aber nicht durch einen weiteren Körper genau charakterisiert. Es gibt also keinen Körper \mathbb{K} , so dass die \mathbb{K} -Inzidenzvektoren von ν gerichteten Kreisen genau dann linear unabhängig im $\mathbb{K}^{|A|}$ sind, wenn diese Kreise eine ganzzahlige Basis bilden. Vielmehr ist der *kommutative Ring* \mathbb{Z} der ganzen Zahlen eine gute Verallgemeinerung zu den Körpern \mathbb{R} und $GF(2)$, um ganzzahlige Kreisbasen zu untersuchen. Der \mathbb{Z} -Inzidenzvektor C eines gerichteten Kreises $C^+ \cup C^- \subseteq A$ ist analog zu dem Inzidenzvektor über einem Körper \mathbb{K} definiert:

$$C(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in C^+ \\ -1 & \text{falls } a \in C^- \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch die Begriffe des Zykelraumes und der Kreisbasis lassen sich nun über dem Ring \mathbb{Z} statt dem Körper \mathbb{K} definieren.

Definition 6.0.1. Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ eine Menge von Vektoren des $\mathbb{Z}^{|A|}$.

- Eine \mathbb{Z} -Linearkombination von X ist ein Vektor $x = \sum \lambda_i x_i$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$.
- X heißt *\mathbb{Z} -linear unabhängig*, wenn die $0 \in \mathbb{Z}^{|A|}$ nur die triviale \mathbb{Z} -Linearkombination von X ist.
- Der *Zykelraum* $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ von D über \mathbb{Z} besteht aus allen \mathbb{Z} -Linearkombinationen der gerichteten Kreise von D .
- Eine *ganzzahlige Kreisbasis* von D ist eine Menge \mathbb{Z} -linear unabhängiger gerichteter Kreise, die jeden Punkt in $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ als eine \mathbb{Z} -Linearkombination darstellen.

Zumindest für ganzzahlige Vektormengen ist die lineare Unabhängigkeit über \mathbb{R} äquivalent zur linearen Unabhängigkeit über \mathbb{Z} . Allerdings bildet nicht jede inklusionsmaximale Menge \mathbb{Z} -linear unabhängiger Kreise auch ein Erzeugendensystem des $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ und damit eine ganzzahlige Basis. Stellt eine Menge \mathbb{Z} -linear unabhängige Kreise jedoch ein Erzeugendensystem des $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ dar, so ist diese Menge auch eine ganzzahlige Kreisbasis des Graphen.

In den folgenden Abschnitten sollen die Auswirkungen der Aufweichung des Körpers \mathbb{K} zum kommutativen Ring \mathbb{Z} erläutert werden.

6.1 Das Unabhängigkeitssystem

Der Algorithmus von Horton basiert auf zwei grundlegenden Eigenschaften der Kreisbasen über einem Körper \mathbb{K} . Wesentlich ist, dass die \mathbb{K} -Inzidenzvektoren zusammen mit der linearen Unabhängigkeit über \mathbb{K} ein *Matroid* bilden und die Basen dieses Matroids genau den Kreisbasen des Graphen entsprechen. Nun kann man versuchen, auf eine ähnliche Weise ein Unabhängigkeitssystem oder gar ein Matroid auf die ganzzahligen Kreisbasen zuzuschneiden. Soll $U = (E, \mathcal{I})$ dieses Unabhängigkeitssystem sein, so wünscht man sich die folgenden Eigenschaften.

1. Die Grundmenge E ist die Menge der \mathbb{Z} -Inzidenzvektoren der gerichteten Kreise in D .
2. Die maximal unabhängigen Mengen von U sind genau die ganzzahligen Kreisbasen von D .
3. Das Unabhängigkeitssystem erfüllt auch die zusätzliche Eigenschaft 4.1.2 und ist damit ein Matroid.

Möchte man 1. erfüllt haben, so steht die Grundmenge E des Unabhängigkeitssystem bereits fest und es stellt sich nur noch die Frage nach dem System \mathcal{I} der unabhängigen Mengen. Im Falle der Kreisbasen über einem Körper \mathbb{K} konnte für \mathcal{I} das Mengensystem der \mathbb{K} -linear unabhängigen Mengen gewählt werden. Wählt man jedoch nun die entsprechende \mathbb{Z} -lineare Unabhängigkeit, so kann 2. nicht mehr gewährleistet werden. Nimmt man beispielsweise eine nicht-ganzzahlige Basis, so ist diese \mathbb{R} -linear unabhängig und damit auch \mathbb{Z} -linear unabhängig. Nicht-Ganzzahligkeit heißt, dass man noch weitere Kreise hinzufügen muss, um alle Punkte des $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ ganzzahlig darzustellen, jedoch führt eine Hinzunahme weiterer Vektoren zur \mathbb{Z} -linearen Abhängigkeit. Das heißt, dass eine nicht-ganzzahlige Basis zwar in einer maximal unabhängigen Menge des Unabhängigkeitssystems, aber in keiner ganzzahligen Basis enthalten sein kann.

Trotzdem können 1. und 2. gleichzeitig erfüllt werden.

Definition 6.1.1. Sei E eine Menge und \mathcal{B} eine nicht-leere Menge von Teilmengen von E . Definiere $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ wie folgt:

$$M \in \mathcal{I} \iff \exists B \in \mathcal{B} : M \subseteq B$$

Das so definierte Paar $(E, \mathcal{I})_{\mathcal{B}}$ heißt das von \mathcal{B} *induzierte Unabhängigkeitssystem*.

Es ist leicht zu verifizieren, dass dies tatsächlich ein Unabhängigkeitssystem definiert (Vergleiche dazu Definition 4.1.1).

Bemerkung 6.1.2. Die Menge der Basen dieses Unabhängigkeitssystems ist eine Teilmenge von \mathcal{B} . Sind keine zwei Mengen in \mathcal{B} ineinander enthalten, so bildet \mathcal{B} genau die Menge der Basen in $(E, \mathcal{I})_{\mathcal{B}}$.

Die Definition 6.1.1 kann nun auf die Menge der gerichteten Kreise in D als Grundmenge und die Menge der ganzzahligen Kreisbasen in D als Teilmengensystem \mathcal{B} angewendet werden. Auf diese Weise erhält man ein Unabhängigkeitssystem, bei dem eine Menge von Kreisen genau dann unabhängig ist, wenn sie eine Teilmenge einer ganzzahligen Kreisbasis darstellt. Würde dieses Unabhängigkeitssystem sogar die zusätzliche Eigenschaft aus Definition 4.1.2 erfüllen und somit ein Matroid bilden, so könnte der *greedy*-Algorithmus (Algorithmus 1) auf das MICB-Problem angewendet werden.

Das Unabhängigkeitssystem der ganzzahligen Kreisbasen wurde in [14] untersucht und es wurde bewiesen, dass dieses *kein Matroid* ist. Zum Beweis kann ein Graph angegeben werden, dessen durch die ganzzahligen Basen induziertes Unabhängigkeitssystem die zusätzliche Matroid-Anforderung nicht erfüllt. Hier wird die Argumentation noch einmal geführt:

Beispiel 6.1.3 (Ganzzahlige Kreisbasen induzieren kein Matroid). *Abbildung 6.1 zeigt den Umschlag-Graphen D mit Knotenmenge V und Bogenmenge A . Es gilt $\nu(G) = |A| - |V| + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$. Die dick gezeichneten Bögen in der Abbildung bilden einen Spannbaum T mit den Nichtbaumbögen a_1, a_2, a_3 und a_4 . Diese bestimmen die vier Koordinaten des $\mathbb{Z}^{|A|}$, auf die alle Inzidenzvektoren nun gekürzt werden.*

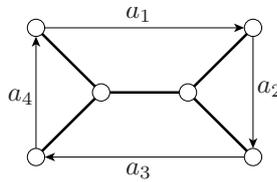


Abbildung 6.1: Der Umschlaggraph D und ein Spannbaum T von D .

Die Matrizen $\Gamma_{A \setminus T}$ und $\Gamma'_{A \setminus T}$ sind die gekürzten Basismatrizen zu zwei ganzzahligen Kreisbasen $B = \{C_1, \dots, C_4\}$ und $B' = \{C'_1, \dots, C'_4\}$.

$$\Gamma_{A \setminus T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \Gamma_{A \setminus T} = 1$$

$$\Gamma'_{A \setminus T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \Gamma'_{A \setminus T} = 1$$

Sei nun angenommen, dass die ganzzahligen Kreisbasen ein Matroid bilden, dann ist $A = B \setminus \{C_1\}$ als Teilmenge einer unabhängigen Menge selbst unabhängig und es gilt $|A| < |B'|$. Die zusätzliche Anforderung an ein Matroid verlangt

nun nach der Existenz eines Kreises $C \in B' \setminus A$, der A zu einer unabhängigen Menge erweitert (vergleiche Definition 4.1.2). Da $C_3 = C'_3$ und $C_4 = C'_4$, ist die Auswahl auf C'_1 und C'_2 begrenzt. Jedoch führen beide Möglichkeiten auf nicht-ganzzahlige Kreisbasen:

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |-2|$$

$$\left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |-3|$$

Das durch die ganzzahligen Kreisbasen induzierte Unabhängigkeitssystem dieses Graphen bildet also kein Matroid.

6.2 Die Horton-Familie

Neben dem Matroid als Struktur der Kreisbasen über \mathbb{K} ist eine zweite wichtige Eigenschaft dieser Kreisbasen die Existenz der Horton-Familie \mathcal{H} als genügend kleine Auswahl von Kreisen, die noch immer jede minimale Kreisbasis beinhalten. In der Bemerkung 4.3.4 wurde bereits erwähnt, dass die Horton-Familie für gerichtete Kreise eines gerichteten Graphen analog zur Definition 4.3.1 betrachtet werden kann und dass diese auch jede minimale gerichtete Kreisbasis enthalten. Dazu lässt sich der Beweis des Lemmas 4.3.3 analog auf jeden Körper \mathbb{K} übernehmen. Der Beweis, dass ein Vektor C in keiner minimalen Basis auftaucht, kann in die folgenden allgemeinen Schritte unterteilt werden.

1. Nehme eine Basis B , in der C enthalten ist.
2. Finde Vektoren C_1, \dots, C_k , so dass $C = \sum \lambda_i C_i$.
3. Zeige $w(C_i) < w(C)$ für alle $i = 1, \dots, k$.
4. Zeige, dass es mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass $B' = B \setminus C \cup C_i$ eine Basis darstellt.
5. Dann gilt $w(B') < w(B)$ und die Basis B kann somit nicht minimal sein.

Es folgt ein Beispiel dafür, dass diese Argumentation nicht übernommen werden kann, um zu zeigen, dass jeder Kreis einer minimalen *ganzzahligen* Kreisbasis ein Horton-Kreis ist.

Beispiel 6.2.1 (Ein einfacher Austausch kann einen Nicht-Hortonkreis nicht ersetzen). *Abbildung 6.2 zeigt den vollständig bipartiten Graphen $\mathcal{K}_{3,3}$ mit neun Bögen und sechs Knoten. Eine jede Kreisbasis besteht somit aus vier ($9 - 6 + 1 = 4$) gerichteten Kreisen. $M = \{a_1, \dots, a_4\}$ sei der Cobaum, der durch die dicken Bögen angedeutet ist.*

Diese dicken Bögen seien mit dem Gewicht 1 und der Baum T mit dem Gewicht 0 belegt. Dann bildet T den eindeutigen Kürzeste-Wege-Baum in $(\mathcal{K}_{3,3}, w)$.

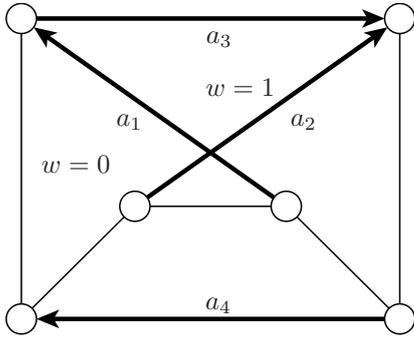


Abbildung 6.2: Der $\mathcal{K}_{3,3}$ mit dem Cobaum $\{a_1, a_2, a_4, a_4\}$.

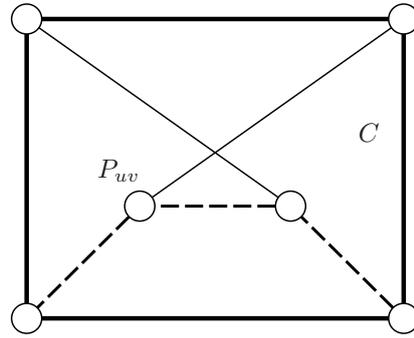


Abbildung 6.3: Ein Nicht-Horton-Kreis C und seine Sehne P_{uv} .

Insbesondere sind dadurch alle kürzesten Wege eindeutig bestimmt. Betrachte nun die ganzzahlige Kreisbasis der folgenden auf die Cobaumzeilen reduzierten Basismatrix.

$$\Gamma_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \Gamma_M = 1$$

Sei C der Kreis, der zu der letzten Spalte von Γ_M gehört. In Abbildung 6.3 ist C dick hervorgehoben. Da dieser Kreis zwei Kanten enthält, die auf keinem kürzesten Weg liegen, ist er kein Horton-Kreis.

Die einzige Sehne von C , die einem kürzesten Weg entspricht (und deren Existenz die Proposition 4.3.2 voraussagt), ist in der Abbildung 6.3 unterbrochen dargestellt und wird hier P_{uv} genannt. Die beiden elementaren Kreise C_1 und C_2 , die neben C in $C \cup P$ enthalten sind, können nun so orientiert werden, dass sie auf P entgegengesetzt verlaufen. Daraus ergeben sich beispielsweise diese Inzidenzvektoren:

$$C_1^M = (0, 0, 1, 0)^\top$$

$$C_2^M = (0, 0, 0, 1)^\top$$

Setzt man nun C_1 oder C_2 für C in die Basis ein, so erhält man in beiden Fällen nicht-ganzzahlige Kreisbasen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

Die Beziehungen zwischen der Horton-Familie eines Graphen und der Menge der minimalen ganzzahligen Kreisbasen können also nicht so einfach offengelegt werden. Obwohl die oben vorgestellte Beweisidee bei Kreisbasen über \mathbb{Z} nicht in ihrer vollen Allgemeinheit greift, konnte noch keine MICB angegeben werden, die einen Nicht-Horton-Kreis enthält.

Bemerkung 6.2.2. Im Beispiel 6.2.1 ist keiner der Kreise in der gewählten Basis in der Horton-Familie, und für die ersten drei Kreise liefert der Austausch auch eine ganzzahlige Basis.

Wählt man zum Kreis C eine andere ganzzahlige Basis, der er angehört, so kann auch der Tausch mit C_1 oder C_2 in dieser Basis zum Erfolg führen. Somit ist lediglich die Aussage, einen *beliebigen* Nicht-Horton-Kreis in einer *beliebigen* ganzzahligen Basis auf diese Weise ersetzen zu können, widerlegt.

6.3 Zirkulationen und das MIZB-Problem

Nach Definition 6.0.1 ist eine ganzzahlige Kreisbasis eine Menge \mathbb{Z} -linear unabhängiger gerichteter Kreise, die jeden Punkt in $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ als eine \mathbb{Z} -Linearkombination darstellen. Der Zykelraum $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ über dem Ring \mathbb{Z} kann als die Menge der ganzzahligen Vektoren des Zykelraumes über \mathbb{R} dargestellt werden.

$$Z_{\mathbb{Z}}(D) = Z_{\mathbb{R}}(D) \cap \mathbb{Z}^{|A|}$$

Die \mathbb{Z} -Inzidenzvektoren gerichteter Kreise sind eine Teilmenge des $Z_{\mathbb{Z}}(D)$, die sich durch die Erfüllung einer zusätzlichen Eigenschaft von den übrigen Vektoren unterscheiden lassen. Ein allgemeiner Vektor Z des Zykelraumes ordnet jedem Bogen $a \in A$ eine Vielfachheit $|Z(a)|$ und ein Vorzeichen $\text{sgn } Z(a)$ zu und kann als eine ganzzahlige Bogenbewertung des Graphen $D = (V, A)$ angesehen werden, die zusätzlich

$$\sum_{(v,x) \in A} Z(v,x) = \sum_{(y,v) \in A} Z(y,v) \quad \text{für alle Knoten } v \in V \quad (6.3.1)$$

erfüllt. Umgekehrt stellt jede ganzzahlige Kantenbewertung, die (6.3.1) erfüllt, einen Punkt in $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ dar. Die Bedingungen (6.3.1) werden *Flusserhaltung* genannt und ein Vektor $Z \in \mathbb{Z}^{|A|}$, der die Flusserhaltung erfüllt, eine *Zirkulation des Graphen*. Zu beachten ist allerdings, dass explizit auch negative Bogenbewertungen zugelassen sind und eine Zirkulation daher keinem Fluss im üblichen Sinne entspricht. Kehrt man allerdings die Richtung der Bögen mit $Z(a) < 0$ um und passt den Vektor Z durch einen Vorzeichenwechsel auf diesen Bögen an die neue Orientierung an, so erhält man einen Fluss ohne Quell- und Senkknoten, also eine Zirkulation nach der gebräuchlichen Definition.

Gerichtete Kreise sind nun spezielle Zirkulationen, nämlich die, die im Ungerichteten elementaren Kreisen entsprechen. Es gilt:

Proposition 6.3.1. *Ist $Z \in Z_{\mathbb{Z}}(D) \setminus \{0\}$ eine Nicht-Null-Zirkulation eines gerichteten Graphen, so sind äquivalent:*

1. Z ist ein gerichteter Kreis.
2. Für alle Darstellungen $Z = Z_1 + Z_2$ mit $Z_i \preceq Z$ gilt entweder $Z_1 = 0$ oder $Z_2 = 0$.

Dabei gilt $Z \preceq Z'$ genau dann, wenn in jeder Komponente $|Z(a)| \leq |Z'(a)|$ und $\text{sgn } Z(a) = \text{sgn } Z'(a)$ erfüllt ist.

Eine Zirkulation ist also genau dann nicht-elementar, wenn sie eine „Überlagerung“ zweier Nicht-Null-Zirkulationen ist. Die Null-Zirkulation erfüllt diese

Bedingung zwar nicht, soll aber als nicht-elementar gelten, da sie keinen gerichteten Kreis darstellt.

Nicht-elementare Zirkulationen entstehen beispielsweise durch die Addition zweier Kreise, die sich auf ihrer Schnittmenge nicht auslöschen, sondern verstärken. Dazu zählen auch ganzzahlige Vielfache von elementaren Kreisen, die durch mehrfache Addition eines Kreises mit sich selbst entstehen. Auch die Addition zweier elementarer Kreise mit disjunkten Bogenmengen liefert eine nicht-elementare, unter Umständen sogar unzusammenhängende, Zirkulation.

Mit dieser Erweiterung des Kandidatenraumes lässt sich nun auch das MICB-Problem erweitern.

Definition 6.3.2. Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine nicht-negative Bogenbewertung.

1. Eine *Zirkulationsbasis* ist eine Menge \mathbb{Z} -linear unabhängiger Zirkulationen, die jeden Punkt des $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ ganzzahlig darstellen.
2. Das *Gewicht einer Zirkulation* Z ist $w(Z) = \sum w(a)|Z(a)|$ und das *Gewicht einer Zirkulationsbasis* ist die Summe der Gewichte der einzelnen Zirkulationen.
3. Das *MIZB-Problem* fragt zu (D, w) nach einer Zirkulationsbasis minimalen Gewichts.

Der Begriff der gerichteten Kreise lässt sich auch für Körper-Inzidenzvektoren auf Zirkulationen ausweiten und man erhält ein *minimum directed circulation basis*-Problem und ein *minimum undirected circulation basis*-Problem. Jedoch stellt jede minimale *Kreisbasis* über \mathbb{K} auch eine minimale *Zirkulationsbasis* über \mathbb{K} dar. Um dies zu zeigen, kann der Beweis wieder dem Verlauf, der im Abschnitt 6.2 skizziert wurde, folgen.

Lemma 6.3.3. Sei \mathbb{K} ein Körper, dann ist jede optimale *Kreisbasis* über \mathbb{K} auch eine optimale *Zirkulationsbasis* über \mathbb{K} .

Beweis. Sei B eine beliebige Zirkulationsbasis und $Z \in B$ eine nicht-elementare Zirkulation. Da Z nicht elementar ist, gibt es nach Proposition 6.3.1 eine Darstellung $Z = Z_1 + Z_2$ mit $0 \neq Z_i \leq Z$. Aus der Definition von \leq und der Nichtnegativität der Bogengewichtung folgen

$$w(Z_i) \leq w(Z) \quad \text{und} \quad \|Z_i\|_1 < \|Z_2\|_1. \quad (6.3.2)$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_1$ die l_1 -Norm im $\mathbb{R}^{|A|}$ mit

$$\|Z\|_1 = \sum_{a \in A} |Z(a)|.$$

Da \mathbb{K} ein Körper ist, kann die Basis B durch den Austausch von Z mit Z_1 oder Z_2 wieder in eine Basis überführt werden. Mit (6.3.2) liegt das Gewicht dieser neuen Basis nicht über $w(B)$. Die nicht-elementare Zirkulation Z wurde damit durch eine (eventuell bereits elementare) Zirkulation geringerer l_1 -Norm ersetzt.

Durch Iterieren dieser Vorgehensweise entsteht demnach aus einer beliebigen *Zirkulationsbasis* über \mathbb{K} eine *Kreisbasis* über \mathbb{K} , deren Gewicht das der Zirkulationsbasis nicht übersteigt. \square

Erneut kann diese Argumentation nicht für Kreisbasen über \mathbb{Z} übernommen werden. Bevor die Gründe dafür erläutert werden, wird zunächst ein Gegenbeispiel angebracht.

Beispiel 6.3.4 (Ein einfacher Austausch kann eine nicht-elementare Zirkulation nicht ersetzen). Sei D der Graph in der Abbildung 6.4 und T der durch die dicken Kanten angedeutete Spannbaum von D . Sei $M = \{a_1, \dots, a_6\}$ die Menge der Nichtbaumkanten und B die Zirkulationsbasis der gekürzten Basismatrix Γ_M .

$$\Gamma_M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten fünf Basiskreise in B sind elementar, während die letzte Spalte von Γ_M den gekürzten Inzidenzvektor einer nicht-elementaren Zirkulation Z bildet. Da $\det \Gamma_M = 1$ gilt, bildet B eine ganzzahlige Zirkulationsbasis von D .

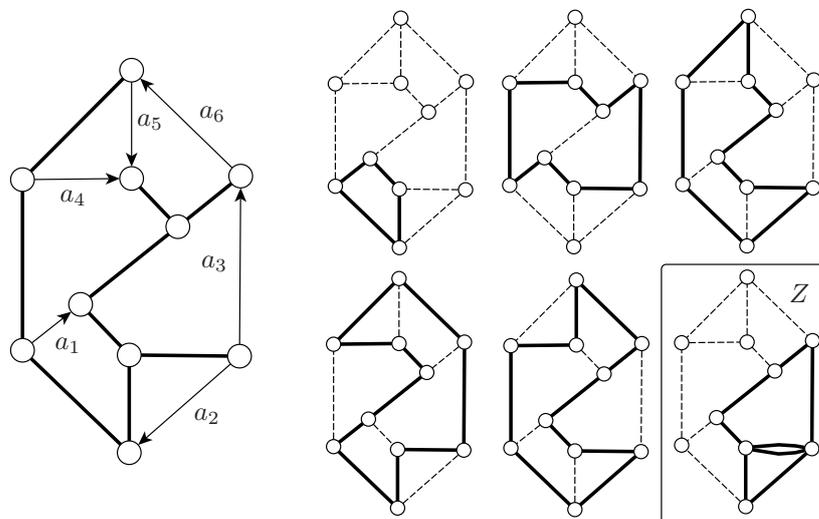


Abbildung 6.4: Ein Graph D und eine Zirkulationsbasis B von D , deren einzige nicht-elementare Zirkulation Z durch keinen Kreis ihrer Zerlegung ersetzt werden kann.

Die nicht-elementare Zirkulation Z ist als Vereinigung der Fundamentalkreise $F(a_2)$ und $F(a_3)$ darstellbar und diese Darstellung ist die einzige von der Form aus Proposition 6.3.1. Ersetzt man jedoch Z durch $F(a_2)$ oder $F(a_3)$ in der Basis B , ist die Determinante der neuen Kreisbasis 3 beziehungsweise 2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |3|$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |-2|$$

Wiederum folgt aus dem Beispiel 6.3.4 noch kein Beleg für eine Zirkulationsbasis, in der keine nicht-elementare Zirkulation ohne Erhöhung des Gewichts aufgelöst werden kann. Damit wurde lediglich gezeigt, dass die Untersuchung einer nicht-elementaren Zirkulation in einer Basis, wie sie im Beweis des Lemmas 6.3.3 durchgeführt wurde, im Fall der ganzzahligen Kreisbasen nicht ausreicht.

Es bleibt bis hierhin also ungeklärt, ob der Einsatz von nicht-elementaren Zirkulationen eine minimale ganzzahlige Kreisbasis verbessern kann, das heißt, ob die Optimalwerte des MICB- und des MIZB-Problems zusammenfallen. In allen folgenden Resultaten muss daher stets klar unterschieden werden, ob nicht-elementare Zirkulationen in einer Basis zugelassen sind oder nicht.

Kapitel 7

Unimodularität

In den Kapiteln 8 und 9 werden Algorithmen zur Konstruktion ganzzahliger Kreis- und Zirkulationsbasen angegeben. In beiden Algorithmen werden algebraische Aussagen verwendet, die in diesem Kapitel hergeleitet werden sollen.

7.1 Unimodularität und Gitter

Die Untersuchungen dieses Abschnittes werden im Rahmen k -dimensionaler linearer Teilräume des \mathbb{R}^d und der *Gitter* der ganzzahligen Punkte dieser Teilräume durchgeführt. Ein Untervektorraum soll dabei durch eine Basis, eine Menge $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ linear unabhängiger Vektoren des \mathbb{R}^d mit ganzzahligen Einträgen, gegeben sein. Die Bezeichnung X wird auch für die $(d \times k)$ -Matrix, die die Vektoren aus X als Spalten enthält, verwendet.

Dieser Abschnitt wird nun einige Begriffe und Aussagen der Theorie der Gitter nennen und erläutern. Eine detaillierte Darstellung der Gitter im euklidischen Raum wird beispielsweise in [18] gegeben. Dort befinden sich zudem ausführliche Beweise zu den hier benutzten Aussagen.

Definition 7.1.1. Für eine linear unabhängige Menge $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ beziehungsweise eine Matrix $X = [x_1, \dots, x_k]$ heißt

$$\Lambda(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

ein *Gitter* mit Basis X vom Rang k .

Ein Gitter mit Basis X ist die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen der Vektoren in X . Ein wichtiges Beispiel für ein Gitter ist das Einheitsgitter $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ mit der Menge der d Einheitsvektoren als Basis. Die Basis eines Gitters ist nicht eindeutig bestimmt und so kann ein Gitter mehrere Basen aufweisen. Beispielsweise bildet jede der folgenden Matrizen eine Basis des \mathbb{Z}^2 .

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Beziehungen zwischen zwei verschiedenen Basen desselben Gitters können mittels unimodularer Matrizen angegeben werden. Eine Matrix $U \in \mathbb{Z}^{(k,k)}$ heißt *unimodular*, wenn $\det U = \pm 1$.

Lemma 7.1.2. Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{(d,k)}$ Matrizen vom Rang k . Dann ist Y genau dann eine Basis des Gitters $\Lambda(X)$, wenn es eine unimodulare Matrix $U \in \mathbb{Z}^{(k,k)}$ gibt, so dass $Y = XU$.

Wie bereits erwähnt wurde, bildet die Einheitsmatrix $I_k \in \mathbb{Z}^{(k,k)}$ eine Basis des Gitters \mathbb{Z}^k . Außerdem ist $\det I_k = 1$ und I_k somit unimodular. Es folgt ein Korollar.

Korollar 7.1.3. Eine Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(k,k)}$ ist genau dann eine Basis des \mathbb{Z}^k , wenn sie unimodular ist.

Bemerkung 7.1.4. Das Korollar 7.1.3 ist eine unmittelbare Verallgemeinerung der im Abschnitt 1.5 angegebenen Charakterisierung der ganzzahligen Kreisbasen. Das Gitter \mathbb{Z}^ν kann als die Menge der abgeschnittenen \mathbb{Z} -Inzidenzvektoren der Zirkulationen in D angesehen werden. Eine Gitterbasis ist eine Auswahl von ν solcher Vektoren, die jeden weiteren mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen. Demnach ist eine ganzzahlige Kreisbasis eine Gitterbasis des \mathbb{Z}^ν und somit eine gerichtete Kreisbasis genau dann ganzzahlig, wenn $\det(B) = 1$ gilt. Dies wiederum ist äquivalent zur Unimodularität ihrer gekürzten Basismatrix.

Das Gitter $\Lambda(X)$ wird auch als der *ganzzahlige Spann* der Menge X bezeichnet. Dagegen ist der *reelle Spann* $\text{span}_{\mathbb{R}}(X)$ die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren in X mit *reellen* Koeffizienten. Abkürzend soll dieser lineare Unterraum des \mathbb{R}^d mit $L(X)$ bezeichnet werden. Die Menge aller ganzzahligen Punkte eines solchen Unterraumes ist ein weiteres Gitter

$$\Lambda_L(X) := L(X) \cap \mathbb{Z}^d.$$

Die Gitter $\Lambda(X)$ und $\Lambda_L(X)$ können, selbst für ganzzahlige Vektoren in X , durchaus verschieden sein. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned}\Lambda(\{(2)\}) &= \{\lambda \cdot (2) \in \mathbb{Z} \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} \\ \Lambda_L(\{(2)\}) &= \{\lambda \cdot (2) \in \mathbb{Z} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ist X eine Menge ausschließlich ganzzahliger Vektoren, so stellt das Gitter $\Lambda(X)$ jedoch stets ein *Untergitter* von $\Lambda_L(X)$ und dieses ein Untergitter von \mathbb{Z}^d dar:

$$\Lambda(X) \subseteq \Lambda_L(X) \subseteq \mathbb{Z}^d. \quad (7.1.1)$$

Die Gitter $\Lambda(X)$ und $\Lambda_L(X)$ haben den Rang $\text{rank } X$ und ist $\text{rank } X < d$, so ist die zweite Mengeninklusion von (7.1.1) strikt. Falls dagegen die erste Mengeninklusion von (7.1.1) strikt ist, bildet die Menge X *keine Basis* von $\Lambda_L(X)$. Eine Basis von $\Lambda_L(X)$ wiederum ist eine Menge ganzzahliger Punkte des $L(X)$, die jeden weiteren ganzzahligen Punkt ganzzahlig darstellt.

Definition 7.1.5. Eine linear unabhängige Menge $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{Z}^d$ und die zugehörige Matrix $X = [x_1 \cdots x_k] \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ heißen *unimodular*, wenn X eine Basis von $\Lambda_L(X)$ bildet, das heißt

$$\forall x \in \Lambda_L(X) \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z} : \quad x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i.$$

Mit anderen Worten ist X genau dann unimodular, wenn in (7.1.1) die Gleichheit $\Lambda(X) = \Lambda_L(X)$ gilt. Es ist hilfreich sich die zwei Spezialfälle $k = 1$ und $k = d$ anzuschauen und zu beobachten, was Unimodularität in diesen Fällen bedeutet.

Der Fall $k = 1$ Es gilt $X = \{x_1\}$ und $\Lambda(X) = \{\lambda \cdot x_1 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$. Das Gitter $\Lambda_L(X)$ ist die Menge $\{\lambda \cdot x_1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda \cdot x_1 \in \mathbb{Z}^d\}$ der ganzzahligen Punkte der Geraden $L(X)$. Nun ist X genau dann unimodular, wenn auf der Teilstrecke $\overline{0x_1}$ von $L(X)$ neben 0 und x_1 kein weiterer ganzzahliger Punkt liegt und dies ist genau dann der Fall, wenn die Koordinaten von x_1 teilerfremd sind.

Der Fall $k = d$ Es gilt $L(X) = \mathbb{R}^d$, $\Lambda_L(X) = \mathbb{Z}^d$ und $\Lambda(X)$ hat vollen Rang. Die Menge X ist dann unimodular, falls auch $\Lambda(X) = \mathbb{Z}^d$ gilt, das heißt X eine Gitterbasis des \mathbb{Z}^d bildet und dies stimmt mit dem oben erwähnten Begriff der Unimodularität einer ganzzahligen quadratischen Matrix überein.

Nachdem der Begriff der Unimodularität nun auf nicht-quadratische $(d \times k)$ -Matrizen X , beziehungsweise auf deren Spaltenmenge, ausgedehnt wurde, kann man von Teilmengen einer unimodularen Menge sprechen.

Proposition 7.1.6. *Jede Teilmenge einer unimodularen Menge ist unimodular.*

Beweis. Sei X eine unimodulare Menge und $X' \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $\Lambda_L(X') \subseteq \Lambda_L(X)$ und somit gilt für $x \in \Lambda_L(X')$:

$$x = \sum_{x \in X'} \lambda_x x \qquad x = \sum_{x \in X} \mu_x x.$$

Da X und damit auch X' linear unabhängige Mengen sind, ist die Darstellung von x eindeutig und es gilt $\lambda_x = \mu_x$ für $x \in X'$ sowie $\mu_x = 0$ für $x \in X \setminus X'$. Da X unimodular ist, sind alle auftretenden Koeffizienten ganze Zahlen und damit auch X' eine unimodulare Menge. \square

Für Gitter mit vollem Rang d definiert man die Gitterdeterminante.

Definition 7.1.7. Ist $\Lambda(X)$ ein Gitter mit vollem Rang d , so ist $|\det X|$ die *Determinante von $\Lambda(X)$* und wird mit $\det \Lambda(X)$ bezeichnet.

Die Gitterdeterminante ist unabhängig von der Wahl der Basis X und damit wohldefiniert. Für ganzzahlige Matrizen X ist $|\det X|$ eine positive ganze Zahl. Sie kann als ein Maß für die Größe der Maschen von $\Lambda(X)$ angesehen werden. Das Gitter \mathbb{Z}^d hat die Gitterdeterminante 1 und je größer die Determinante eines Untergitters von \mathbb{Z}^d ist, desto größer ist dieses Untergitter. Im diesem Falle gibt $\det \Lambda(X)$ gerade die Anzahl der Nebenklassen von $\Lambda(X)$ in der additiven Gruppe \mathbb{Z}^d an.

Die folgende Proposition gilt für allgemeine reguläre quadratische Matrizen A und Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ und wird für den Beweis des Lemmas 7.1.9 benötigt.

Proposition 7.1.8. *Sei $A = [a_1 \cdots a_d]$ eine reguläre $(d \times d)$ -Matrix, b ein weiterer Vektor des \mathbb{R}^d und A_i die quadratische Matrix die durch Ersetzen der*

Spalte a_i von A durch b entsteht. Ist λ die eindeutige Lösung von $Ax = b$, so gilt

$$\det A_i = \lambda_i \det A.$$

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i = 1$.

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \det \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ b & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \det \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_k & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \det A \end{aligned}$$

□

Mit den nun bereit gestellten Hilfsmitteln kann das folgende Lemma bewiesen werden.

Lemma 7.1.9. *Eine Menge X ganzzahliger Vektoren ist genau dann unimodular, wenn sie zu einer Gitterbasis des \mathbb{Z}^d erweitert werden kann.*

Beweis. Sei X zu einer Gitterbasis X' des \mathbb{Z}^d erweiterbar. Nach Korollar 7.1.3 ist X' unimodular und nach Proposition 7.1.6 ist X als Teilmenge einer unimodularen Menge selbst unimodular.

Für die andere Implikation sei $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ unimodular. Da X linear unabhängig ist, gibt es $d - k$ ganzzahlige Vektoren, die X zu einer Basis $X' = \{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_d\}$ des \mathbb{R}^d ergänzen. Diese ergänzenden Vektoren seien so gewählt, dass die Matrix X' eine betragsmäßig kleinstmögliche Determinante aufweist. Sei weiterhin $x \in \mathbb{Z}^d$ ein beliebiger ganzzahliger Punkt. Es gibt dann Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, so dass

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^d \lambda_i z_i.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass all diese Koeffizienten ganzzahlig sind und die gewählte Erweiterung somit eine Gitterbasis des \mathbb{Z}^d bildet.

Sei $j \in \{k+1, \dots, d\}$ ein beliebiger Index. Dann ist $x^{(j)} := x - [\lambda_j]z_j$ ein ganzzahliger Punkt mit der Darstellung

$$x^{(j)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{i \in \{k+1, \dots, d\} \setminus \{j\}} \lambda_i z_i + \lambda'_j z_j.$$

Nun ist $\lambda'_j = \lambda_j - [\lambda_j]$ der Abstand von λ_j zur nächstkleineren ganzen Zahl. Insbesondere ist $\lambda'_j \in [0; 1)$. Tauscht man $x^{(j)}$ für z_j in die Basis X' so gilt für die entstandene Matrix X'' nach Proposition 7.1.8

$$\det X'' = \lambda'_j \cdot \det X'.$$

Ein positives λ'_j würde den Absolutbetrag der Determinante senken. Da die Basis X' aber so gewählt wurde, dass $|\det X'|$ minimal ist, muss $\lambda'_j = 0$, also $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ gelten. Da $j \in \{k+1, \dots, d\}$ beliebig gewählt wurde, gilt $(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^{d-k}$. Damit sind

$$z := \sum_{i=k+1}^d \lambda_i z_i \in \mathbb{Z}^d \quad \text{und} \quad x - z = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in \mathbb{Z}^d$$

ganzahlige Punkte. Außerdem wird $x - z$ durch die Menge X dargestellt. Da X unimodular ist, besteht auch der erste Teil $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ des Koeffizientenvektors λ aus ganzen Zahlen. \square

Sei $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ eine unimodulare Menge. Das Lemma 7.1.9 liefert die Existenz geeigneter Vektoren z_{k+1}, \dots, z_d deren Hinzunahme zu X eine Gitterbasis des \mathbb{Z}^d ergeben. Der Beweis des Lemma legt auch eine Methode dar, diese Vektoren zu finden.

1. Bestimme beliebige ganzahlige Vektoren z_{k+1}, \dots, z_d , so dass die Menge $X' = \{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_d\}$ eine Basis eines Gitters vom Rang d bildet.
2. Ist $\det \Lambda(X') > 1$, so bestimme einen Vektor $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda(X')$.
 - (a) Sei $x = X'\lambda$ und $j \in \{k+1, \dots, d\}$ ein Index mit $\lambda_j \notin \mathbb{Z}$.
 - (b) Ersetze z_j durch $x^{(j)} = x - [\lambda_j]z_j$ in X' und iteriere mit dem neuen Gitter $\Lambda(X')$ kleinerer Determinante.
3. Ist $\det \Lambda(X') = 1$, so bildet X' eine gesuchte Erweiterung.

Auf diese Weise erhält man eine wahllose Erweiterung zu einer unimodularen Menge X . Kennt man bereits eine Erweiterung X' von X und möchte zu einem Vektor x_{k+1} entscheiden, ob es eine zweite Erweiterung X'' von X mit $x_{k+1} \in X''$ gibt, so liefert Lemma 7.1.10 eine Antwort.

Lemma 7.1.10. *Sei eine ganzahlige Menge $\{x_1, \dots, x_k\}$ unimodular und erweiterbare $\{z_{k+1}, \dots, z_d\}$ diese Menge zu einer Basis des \mathbb{Z}^d . Sei*

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^d \lambda_i z_i \quad (7.1.2)$$

ein weiterer ganzahliger Punkt. Dann gilt:

$$\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \text{ unimodular} \iff \gcd(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_d) = 1$$

Beweis. Sei zunächst $\gcd(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_d) = t > 1$. Dann lässt sich jedes λ_i mit $i \in \{k+1, \dots, d\}$ schreiben als $\lambda_i = t \cdot \mu_i$, wobei $\mu_i \in \mathbb{Z}$. Mit der Darstellung (7.1.2) gilt dann:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + t \cdot \sum_{i=k+1}^d \mu_i z_i \\ \Leftrightarrow \frac{1}{t} \left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) &= \sum_{i=k+1}^d \mu_i z_i \\ \Leftrightarrow \frac{1}{t} x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{t} x_i &= \sum_{i=k+1}^d \mu_i z_i \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Damit ist Gleichung (7.1.3) eine nicht-ganzzahlige Linearkombination der Vektoren x_1, \dots, x_{k+1} zu einem ganzzahligen Punkt. Die Menge $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ ist also nicht unimodular.

Sei nun $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ nicht unimodular. Es gibt also einen ganzzahligen Punkt x , dessen Darstellung durch $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ nicht-ganzzahlige Koeffizienten beinhaltet. Insbesondere ist der Koeffizient μ_{k+1} zum Vektor x_{k+1} keine ganze Zahl, da $\{x_1, \dots, x_k\}$ unimodular ist. Sei $\mu_{k+1} = \frac{a}{t}$ mit teilerfremden $a, t \in \mathbb{Z}$. Mit (7.1.2) gilt:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k \mu_i x_i + \frac{a}{t} x_{k+1} \\ \Leftrightarrow x &= \sum_{i=1}^k \mu_i x_i + \frac{a}{t} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^d \lambda_i z_i \right) \\ \Leftrightarrow x &= \sum_{i=1}^k \left(\mu_i + \frac{a \cdot \lambda_i}{t} \right) x_i + \sum_{i=k+1}^d \frac{a \cdot \lambda_i}{t} z_i \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Die Gleichung (7.1.4) ist eine Darstellung des ganzzahligen Punktes x durch die unimodulare Menge $\{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_d\}$. Die Koeffizienten dieser Darstellung sind demnach ganze Zahlen. Insbesondere ist $\frac{a \cdot \lambda_i}{t} \in \mathbb{Z}$ und t somit ein Teiler von $a \cdot \lambda_i$. Da t kein Teiler von a ist, ist t ein Teiler eines jeden λ_i für $i = k+1, \dots, d$. Aus $t > 1$ folgt $\gcd(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_d) > 1$. \square

Dieser Abschnitt befasste sich mit Gittern im \mathbb{R}^d . Eine Menge ganzzahliger Vektoren, die jeden ganzzahligen Punkt ihres aufgespannten reellen Unterraums ganzzahlig darstellt, wird als *unimodular* bezeichnet. Das Lemma 7.1.9 besagt, dass eine Menge ganzzahliger Punkte genau dann unimodular ist, wenn sie zu einer Gitterbasis des \mathbb{Z}^d erweitert werden kann. Ist von einer Menge X ihre Unimodularität bereits bekannt, so liefert das Lemma 7.1.10 eine Methode zur Prüfung der Unimodularität einer um ein Element größeren Obermenge von X . Dafür wird jedoch eine Gitterbasis X' des \mathbb{Z}^d mit $X' \supset X$ benötigt. Der Beweis des Lemmas 7.1.9 liefert eine Möglichkeit eine solche Erweiterung zu einer unimodularen Menge X zu konstruieren. Allerdings ist dies nur ein theoretisches und kein effizientes Verfahren.

Im nächsten Abschnitt wird ein Algorithmus zur Prüfung der Unimodularität einer Menge *ohne* die Voraussetzung jeglicher Vorkenntnisse hergeleitet und erörtert.

7.2 Die HERMITE-Normalform

In diesem Abschnitt wird die HERMITE-Normalform, kurz \mathcal{HNF} , vorgestellt. Sie liefert eine weitere Charakterisierung der unimodularen Matrizen $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ und einen Test auf Unimodularität durch das Bestimmen der \mathcal{HNF} . In Abschnitt 7.3 wird ein effizientes Verfahren angegeben, um die \mathcal{HNF} von Matrizen mit kleinen Einträgen zu bestimmen. Dieses Verfahren wurde bereits in [7] benutzt. Dort wird unter anderem der enge Zusammenhang zwischen der \mathcal{HNF} und den sogenannten T -diagonalisierbaren Matrizen behandelt. Dieser Rahmen ist teilweise allgemeiner als die Unimodularität und daher sind einige der hier angeführten Resultate unmittelbare Folgerungen der Aussagen in [7].

Definition 7.2.1. Eine Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ vom Rang k ist in *HERMITE-Normalform*, wenn es eine reguläre obere Dreiecksmatrix $H = (h_{ij}) \in \mathbb{Z}^{(k,k)}$ gibt, so dass

- $X^\top = [H^\top, 0]$ und
- $h_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$ und
- $0 \leq h_{ji} < h_{ii}$ für alle $i = 1, \dots, k$ und $j < i$ gilt.

Ist X ein Matrix in \mathcal{HNF} , so treten nach der letzten Bedingung der Definition 7.2.1 keine negativen Werte in X auf und das eindeutige Maximum der Elemente jeder Spalte wird von dem Diagonalelement angenommen.

Ist X nicht in \mathcal{HNF} , so kann X mittels *elementarer Zeilenoperationen über \mathbb{Z}* in eine Matrix in HERMITE-Normalform überführt werden. Die Zeilenoperationen der folgenden Form werden als elementar über \mathbb{Z} bezeichnet und führen, angewendet auf eine ganzzahlige Matrix, wiederum auf eine ganzzahlige Matrix. Sie unterscheiden sich so von den elementaren Zeilenoperationen über \mathbb{R} .

- Das Vertauschen zweier Zeilen.
- Das Addieren einer Zeile i auf eine Zeile $j \neq i$.
- Das Multiplizieren einer Zeile mit -1 .

Die Anwendung einer Zeilenoperation auf eine Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ entspricht der Multiplikation von links mit einer Matrix $U \in \mathbb{Z}^{(d,d)}$. Ist die Zeilenoperation elementar, so hat die U -Matrix eine der folgenden Gestalten, je nachdem welches Typs die Zeilenoperation ist.

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right) \quad (7.2.1)$$

Da die Matrizen (7.2.1) die Determinante 1 oder -1 haben und sukzessive Anwendung von Zeilenoperationen der Multiplikation der U -Matrizen entspricht, entspricht die Anwendung elementarer Zeilenoperationen auf die Matrix X der Multiplikation von links mit einer *unimodularen* Matrix U . Umgekehrt entspricht auch die Links-Multiplikation mit einer unimodularen Matrix elementaren Zeilenumformungen, da sich jede unimodulare Matrix als Produkt von Matrizen der Form (7.2.1) schreiben lässt.

Mittels der elementaren Zeilenumformungen lässt sich eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge der ganzzahligen $(d \times k)$ -Matrizen vollen Ranges definieren.

Definition 7.2.2. Seien $X_1, X_2 \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ zwei Matrizen vollen Ranges, dann heißt X_1 *links-äquivalent* zu X_2 , wenn es eine unimodulare Matrix U gibt, so dass $X_1 = U \cdot X_2$ gilt.

Dass die mit 7.2.2 definierte Relation tatsächlich eine Äquivalenzrelation bildet, kann bei [16] nachgelesen werden. Wie oben bereits erwähnt wurde, kann eine Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix in \mathcal{HNF} überführt werden. Daher befindet sich in jeder Äquivalenzklasse mindestens ein Vertreter in \mathcal{HNF} . Tatsächlich gibt es *genau einen* solchen Vertreter und man kann deshalb von *der* HERMITE-Normalform einer Matrix X sprechen. Für einen Beweis der Existenz und Eindeutigkeit kann auf [18] verwiesen werden. Die Existenz folgt jedoch auch aus dem weiter unten angegebenen Algorithmus zur Berechnung der HERMITE-Normalform einer Matrix.

Definition 7.2.3. Die HERMITE-Normalform (HNF) einer Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ mit $\text{rank } X = k$ ist die eindeutige Matrix in \mathcal{HNF} in der Äquivalenzklasse von X und wird mit $\text{hnf}(X)$ bezeichnet. Außerdem sei $\text{hnf}_\Delta(X)$ die obere Dreiecksmatrix von $\text{hnf}(X)$. Die unimodulare Transformationsmatrix, die den Übergang von X zu $\text{hnf}(X)$ darstellt ist nicht eindeutig bestimmt und so wird mit U eine beliebige Matrix dieser Form bezeichnet. Es gilt also

$$U \cdot X = \begin{bmatrix} \text{hnf}_\Delta(X) \\ \mathbf{0}_{d-k,k} \end{bmatrix} = \text{hnf}(X).$$

Die Unimodularität einer Matrix X lässt sich nun anhand ihrer HERMITE-Normalform $\text{hnf}(X)$ ablesen.

Lemma 7.2.4. Für eine Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ mit vollem Spaltenrank k gilt

$$X \text{ unimodular} \iff \text{hnf}_\Delta(X) = I_{k,k}. \quad (7.2.2)$$

Beweis.

$$\begin{array}{ll} & X \text{ unimodular} \\ \stackrel{7.1.9}{\iff} & \det[X, E] = \pm 1 \\ \iff & \det U \cdot \det[X, E] = \pm 1 \\ \iff & \det(U \cdot [X, E]) = \pm 1 \\ \iff & \det[U \cdot X, U \cdot E] = \pm 1 \\ \stackrel{7.1.9}{\iff} & U \cdot X = \text{hnf}(X) \text{ unimodular} \\ \iff & \text{hnf}_\Delta(X) \text{ unimodular} \\ \iff & \text{hnf}_\Delta(X) = I_{k,k} \end{array}$$

Zunächst wird die vorletzte Umformung noch genauer erläutert. Die Unimodularität von $\text{hnf}(X)$ bedeutet nach Definition 7.1.5, dass alle ganzzahligen Vektoren des reellen Spans von $\text{hnf}(X)$ ganzzahlige Linearkombinationen der Spalten von $\text{hnf}(X)$ sind. Da die letzten $d - k$ Zeilen von $\text{hnf}(X)$ ausschließlich Nullzeilen sind, reduzieren sich die Linearkombinationen zu \mathbb{Z} -Linearkombinationen der auf die ersten k Zeilen gekürzten Vektoren, das heißt der Spalten von $\text{hnf}_\Delta(X)$ mit denselben Koeffizienten. Daher ist $\text{hnf}(X)$ genau dann unimodular, wenn auch $\text{hnf}_\Delta(X)$ unimodular ist.

Die letzte Umformung besagt, dass die einzige unimodulare quadratische Matrix in \mathcal{HNF} die Einheitsmatrix ist. Da die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonalelemente ist, stehen bei einer quadratischen

unimodularen Matrix in \mathcal{HNF} ausschließlich Einsen auf der Diagonalen. Da die Diagonalelemente das jeweilige eindeutige Maximum ihrer Spalte bilden, sind alle weiteren Einträge der Matrix Null und es ergibt sich somit zwangsweise die Einheitsmatrix. Alternativ folgt diese letzte Äquivalenzumformung des Beweises aus der Eindeutigkeit der HERMITE-Normalform einer Matrix. \square

Mit Hilfe des Lemmas 7.2.4 lässt sich

Es soll hier noch ein zweites äquivalentes Resultat angegeben und bewiesen werden, da der Beweis eine Erweiterung einer unimodularen Menge zu einer Basis des \mathbb{Z}^d liefert.

Lemma 7.2.5. *Für eine linear unabhängige Menge $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ ganzzahliger Vektoren gilt*

$$X \subseteq \bar{X} \text{ für eine Gitterbasis } \bar{X} \text{ des } \mathbb{Z}^d \iff \text{hnf}_\Delta(X) = I_{k,k}.$$

Beweis. Sei zunächst X zu einer Gitterbasis \bar{X} des \mathbb{Z}^d erweiterbar. Dann stellt \bar{X} auch eine quadratische Matrix der Determinante ± 1 dar. Insbesondere ist die Inverse U von \bar{X} ganzzahlig und ebenfalls unimodular. Es gilt also:

$$\begin{pmatrix} U \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} X & \bar{X} \setminus X \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{k,k} & \\ \hline & I_{d-k, d-k} \end{array} \right) \quad (7.2.3)$$

Werden beide Seiten von (7.2.3) von rechts mit $[I_{k,k}, 0]^\top$ multipliziert, so entspricht das der Auswahl der ersten k Spalten der jeweils rechten Matrizen. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k,k} \\ \hline \end{pmatrix} \quad (7.2.4)$$

Demnach gilt $\text{hnf}_\Delta(X) = I_{k,k}$.

Ist umgekehrt die Gleichung (7.2.4) gegeben, so bildet X die ersten k Spalten der Inversen von U und durch Erweiterung von X mit den restlichen Spalten dieser Inversen ergibt sich (7.2.3). Dadurch wurde X zu einer unimodularen quadratischen Matrix ergänzt und es folgt die Behauptung. \square

7.3 Ein Algorithmus zur Berechnung der HNF

Mit Lemma 7.2.4 kann ein Test auf Unimodularität einer Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ mit vollem Spaltenrang auf das Bestimmen ihrer HERMITE-Normalform $\text{hnf}(X)$ zurückgeführt werden. Daher wird nun ein Algorithmus dargelegt, der auf Domich *et al.* [17] zurückgeht und in [18] gefunden werden kann.

Das Verfahren konstruiert die HERMITE-Normalform durch iteratives Berechnen der Spalten mit einem angepassten Euklidischen Algorithmus. Dabei werden die Einträge der aktuellen Spalte mittels elementarer Zeilenoperationen gekürzt und so können in den noch nicht betrachteten Spalten sehr große Zwischenergebnisse auftreten, auch wenn die letztendliche HERMITE-Normalform nur Nullen und Einsen aufweist. Die Zwischenergebnisse können sogar exponentiell groß werden und werden deshalb nach jeder Zeilenoperation mit einer modulo-Berechnung gekürzt. Wie und vor allem wie weit gekürzt werden kann, wird durch die Eingabematrix X gegeben. Das folgende Lemma stellt die dafür nötige Grundlage bereit.

Lemma 7.3.1. *Sei $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ eine Matrix vollen Ranges und X_I eine beliebige reguläre $(k \times k)$ -Untermatrix von X mit $\mu = |\det X_I|$. Dann gilt*

$$\text{hnf}\left(\begin{bmatrix} X \\ \mu \cdot I_{k,k} \end{bmatrix}\right) = \text{hnf}\left(\begin{bmatrix} X \\ \mathbf{0}_{k,k} \end{bmatrix}\right)$$

Beweis. Es gilt $\mu \cdot I_{k,k} = \mu \cdot (X_I^{-1} \cdot X_I)$, da X_I regulär ist. Weiterhin ist die Matrix $\mu \cdot X_I^{-1}$ ganzzahlig nach Proposition 1.5.3. Jede Zeile von $\mu \cdot I_{k,k}$ lässt sich demnach als \mathbb{Z} -Linearkombination der Zeilen von X_I darstellen, das heißt es gibt eine unimodulare Matrix U , so dass

$$U \cdot \begin{bmatrix} X \\ \mu \cdot I_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \mathbf{0}_{k,k} \end{bmatrix}.$$

Somit sind beide Matrizen in der gleichen Äquivalenzklasse und haben dieselbe HERMITE-Normalform. \square

Um nun die HERMITE-Normalform von X zu bestimmen, berechnet man die HERMITE-Normalform der Matrix X' , die aus X durch das Anhängen der Matrix $\mu \cdot I_{k,k}$ entsteht. Dies birgt den Vorteil die neuen Zeilen für elementare Operationen zur Verfügung zu haben, um die Zwischenergebnisse im Algorithmus betragsmäßig klein zu halten.

Es folgt ein Algorithmus zur Berechnung der HNF der Matrix X in der ursprünglichen Form. Dieser bekommt zusätzlich die Zahl μ aus Lemma 7.3.1 übergeben und macht essentiellen Gebrauch von den erwähnten Zeilenoperationen, ohne die zusätzlichen Zeilen der Matrix X' zu generieren.

Algorithmus 6 Berechnung der HERMITE-Normalform

Input: Eine Matrix $X = (x_{ij}) \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ mit den Zeilen x_1, \dots, x_d und eine natürliche Zahl $\mu > 0$.

Output: Eine Matrix in HERMITE-Normalform.

```

1: for  $1 \leq i \leq d$  und  $1 \leq j \leq k$  do
2:   Setze  $x_{ij} \leftarrow x_{ij} \bmod \mu$ .
3: end for
4: for  $j = 1$  bis  $k$  do
5:   while  $\exists j \leq i, i' \leq d$  mit  $i \neq i'$  und  $x_{ij} \geq x_{i'j} > 0$  do
6:     Setze  $x_i \leftarrow x_i - \lfloor x_{ij}/x_{i'j} \rfloor x_{i'}$ .
7:     for  $l = j + 1$  bis  $k$  do
8:       Setze  $x_{il} \leftarrow x_{il} \bmod \mu$ .
9:     end for
10:   end while
11:   Sei  $x_m$  die Zeile mit  $x_{mj} \neq 0$ .
12:   Vertausche die Zeilen  $x_m$  und  $x_j$ .
13: end for
14: for  $j = 2$  bis  $k$  do
15:   for  $i = 1$  bis  $j - 1$  do
16:     Setze  $x_i \leftarrow \lfloor x_{ij}/x_{ii} \rfloor x_j$ .
17:   end for
18: end for

```

Zunächst werden in der ersten FOR-Schleife die Einträge der Matrix modulo μ gekürzt. Die Kürzung eines Elementes x_{ij} entspricht der $\lfloor x_{ij}/\mu \rfloor$ -fachen Subtraktion der j -ten Zeile von $\mu \cdot I_{k,k}$ von der Zeile x_i und somit einer Folge von elementaren Zeilenoperationen der erweiterten Matrix X' . Am Ende der Schleife in Zeile 3 sind alle Einträge der Matrix ganzzahlig und in dem Bereich zwischen 0 und $\mu - 1$.

Der Laufindex j der FOR-Schleife in Zeile 4 indiziert die aktuelle Spalte, während die Indizes i und i' der WHILE-Schleife in Zeile 5 zwei Nichtnull-Einträge dieser Spalte indizieren, die nicht überhalb des Diagonalelementes liegen. Diese Einträge werden in Zeile 6 des Algorithmus reduziert, indem das $\lfloor x_{ij}/x_{i'j} \rfloor$ -fache der i' -ten Zeile von der i -ten Zeile abgezogen wird. Dies entspricht einem Schritt des euklidischen Algorithmus. Da jede Zeile, deren Index größer oder gleich j ist, in den ersten $j - 1$ Einträgen nur Nullen aufweist, werden die ersten $j - 1$ Spalten durch diese Operation nicht verändert.

Die Einträge x_{ij+1}, \dots, x_{ik} rechts des gekürzten Elementes x_{ij} werden hingegen unter Umständen beeinflusst und müssen deshalb in der FOR-Schleife in Zeile 7 modulo μ gekürzt werden. Dies kann wieder als eine Folge von elementaren Zeilenoperationen mit den Zeilen der Matrix $I_{k,k}$ angesehen werden und ändert daher die HNF der aktuellen Matrix nicht. Am Ende dieser Schleife in Zeile 9 sind wieder alle Einträge der Matrix ganzzahlig und im Bereich zwischen 0 und $\mu - 1$.

Die WHILE-Schleife dieser Iteration bricht ab, sobald es in der aktuellen Spalte unterhalb oder auf der Diagonalen keine zwei echt positiven Einträge mehr gibt, das heißt in Zeile 10 des Algorithmus gibt es nur einen Nichtnull-Eintrag in $\{x_{jj}, \dots, x_{dj}\}$ und dieser wird in Zeile 12 durch einen Tausch zweier Zeilen auf die Diagonale verschoben. Der Wert des Nichtnull-Eintrages entspricht dem

größten gemeinsamen Teiler der Spalteneinträge auf und unter der Diagonalen.

Bricht auch die FOR-Schleife in Zeile 13 ab, so stellen die ersten k Zeilen von X bereits eine obere Dreiecksmatrix dar, während in den unteren $d - k$ Zeilen nur Nullen stehen. Allerdings dominieren die Diagonalelemente x_{11}, \dots, x_{kk} unter Umständen die weiteren Einträge ihrer Spalte noch nicht. Daher werden die Einträge jeder Spalte überhalb der Diagonalen in Zeile 16 mit dem Diagonalelement gekürzt. Hinterher besteht der Eintrag von X an der Stelle (i, j) aus dem Rest der Division des Eintrages zuvor mit dem Diagonalelement.

Diese modulo-Operation muss jedoch mittels elementarer Zeilenumformungen geschehen und so ändern sich die Einträge der i -ten Zeile. Da die j -te Zeile jedoch links der Diagonalen nur Nullen aufweist, wird die Diagonaldominanz der Spalten kleineren Indexes nicht zerstört.

Theorem 7.3.2. *Algorithmus 6 berechnet die HNF einer ganzzahligen Matrix vollen Zeilenrangs in $\mathcal{O}(k^2 d(\log \mu + 1))$ arithmetischen Operationen.*

Beweis. Hier soll nur die Laufzeit bewiesen und für einen Korrektheitsbeweis auf die obigen Erläuterungen, sowie [18] verwiesen werden.

Die erste FOR-Schleife durchläuft $k \cdot d$ Iterationen zu je einer arithmetischen Operation. Eine Iteration der WHILE-Schleife, das heißt eine Ausführung der Zeile 6 sowie der FOR-Schleife in Zeile 7 benötigt $\mathcal{O}(k)$ Operationen. Die WHILE-Schleife entspricht dem euklidischen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers $\gcd(x_{jj}, \dots, x_{dj})$ von höchstens d Zahlen, deren Betrag nach oben durch μ beschränkt ist. Die Schleife besteht daher aus $\mathcal{O}(d \log \mu)$ Iterationen zu je $\mathcal{O}(k)$ Operationen und bis zur Zeile 10 einer Iteration der FOR-Schleife fallen somit $\mathcal{O}(kd \log \mu)$ arithmetischen Operationen an, deren beinhalten Zahlen betraglich durch $\mathcal{O}(\mu)$ beschränkt sind.

Die gesamte FOR-Schleife umfasst k Iterationen und somit $\mathcal{O}(k(kd \log \mu + d))$ Operationen. Die letzte FOR-Schleife umfasst höchstens k^2 Ausführungen der Zeile 16. Eine Ausführung dieser Zeile benötigt $\mathcal{O}(k)$ Operationen und die auftretenden Zahlen werden betraglich nicht größer als μ^k .

Die Gesamtlaufzeit des Algorithmus 6 liegt somit in

$$\mathcal{O}(k^2 d(\log \mu + 1) + k^3) = \mathcal{O}(k^2 d(\log \mu + 1)).$$

□

Innerhalb des Algorithmus wird darauf geachtet, die Einträge der Zwischenergebnisse und somit auch des Endergebnisses zwischen 0 und μ zu halten. Je kleiner das μ gewählt wurde, desto kleiner sind demnach die Werte der berechneten HNF. Es ist allerdings entscheidend, dass das dem Algorithmus 6 übergebene μ tatsächlich dem Betrag einer großen Unterdeterminante von X entspricht. Andernfalls kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Operationen in Zeile 2 und 8 elementaren Zeilenoperationen entsprechen. Dann liegt das Endergebnis zwar in $\mathcal{HN}\mathcal{F}$ vor, stellt aber nicht die HNF der Matrix X dar.

Wird bei der Bestimmung eines korrekten Wertes für μ eine $(k \times k)$ -Untermatrix von X gefunden, deren Determinante den Betrag 1 aufweist, so weist die HNF von X nur Nullen und Einsen auf und steht somit bereits eindeutig fest. In diesem Fall kann der Aufruf des Algorithmus 6 eingespart werden.

Korollar 7.3.3. *Ist $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ eine Matrix mit vollem Spaltenrang k und X_I eine $(k \times k)$ -Untermatrix von X mit $\det X_I = \pm 1$, so gilt $\text{hnf}(X) = I_{k,k}$ und X ist somit unimodular.*

7.4 Unimodularität und Determinanten

Dieser Abschnitt greift das Korollar 7.3.3 als hinreichende Bedingung der Unimodularität auf und leitet eine notwendige Bedingung auf Grundlage der großen Unterdeterminanten der Matrix X her.

Unimodularität der Menge X bedeutet, dass die Lösung λ des Gleichungssystems

$$X \cdot x = y \quad (7.4.1)$$

für jede ganzzahlige rechte Seite y ganzzahlig ist. Insbesondere ist λ dann bereits die eindeutige Lösung eines jeden regulären quadratischen Untersystems

$$X_I \cdot x = y_I \quad (7.4.2)$$

von (7.4.1).

Gibt es nun eine Zeilenauswahl I , so dass die quadratische Matrix X_I bereits unimodular ist, das heißt $\det X_I = \pm 1$, so ist bereits die Lösung des Untersystems (7.4.2) für jede ganzzahlige rechte Seite y_I ganzzahlig und somit ist auch ganz X unimodular.

Diese Bedingung ist jedoch keineswegs notwendig für die Unimodularität der Matrix X . Ein jedes Untersystem der Form (7.4.2) kann eine spezifische ganzzahlige rechte Seite y_I aufweisen, so dass die zugehörige Lösung nicht ganzzahlig ist. Ist das Gesamtsystem (7.4.1) jedoch nur ganzzahlig lösbar, so heißt das, dass die rechten Seiten y_I nicht passend zu einem großen Vektor y zusammengesetzt werden können. Ein Beispiel soll diesen Sachverhalt erläutern.

Beispiel 7.4.1 (Eine unimodulare Matrix X ohne quadratische unimodulare Untermatrix). *Sei $X = \{(3, 2)^T\}$ eine einelementige Teilmenge des \mathbb{Z}^2 . Im Abschnitt 7.1 wurde bereits erwähnt, dass im Spezialfall $k = 1$ eine Menge X genau dann unimodular ist, wenn die Einträge des einzigen Vektors in X teilerfremd sind. Demnach ist X zwar unimodular, weist jedoch nur die quadratischen Untermatrizen $X_{\{1\}} = (3)$ und $X_{\{2\}} = (2)$ der Determinante 3 beziehungsweise 2 auf.*

In der Abbildung 7.1 sieht man, dass der ganzzahlige Spann der Untermatrizen $X_{\{1\}}$ und $X_{\{2\}}$, die Gitter $\Lambda(X_{\{1\}})$ und $\Lambda(X_{\{2\}})$, echte Teilgitter von $\Lambda_L(X_{\{1\}})$ beziehungsweise $\Lambda_L(X_{\{2\}})$ sind und somit $X_{\{1\}}$ und $X_{\{2\}}$ nicht unimodular sind. Die ganzzahligen rechten Seiten der Untersysteme

$$X_{\{1\}} \cdot x = y_{\{1\}} \quad \text{und} \quad X_{\{2\}} \cdot x = y_{\{2\}},$$

zu denen die eindeutige Lösung nicht ganzzahlig ist, entsprechen den Punktmenge $\Lambda_L(X_{\{i\}}) \setminus \Lambda(X_{\{i\}})$. Diese sind in der Abbildung 7.1 nicht ausgefüllt dargestellt. Diese Punkte lassen sich jedoch zu keinem Punkt des Gitters $\Lambda_L(X)$ kombinieren, wie es hier für die Punkte $(7, 0)$ und $(0, 5)$ angedeutet wurde.

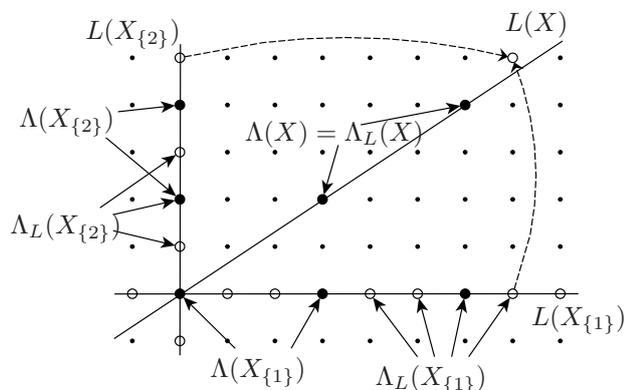


Abbildung 7.1: Die Untervektorräume $L(X)$, $L(X_{\{1}\})$ und $L(X_{\{2}\})$ und die Gitter $\Lambda(X)$, $\Lambda(X_{\{1}\})$, $\Lambda_L(X_{\{1}\})$, $\Lambda(X_{\{2}\})$ und $\Lambda_L(X_{\{2}\})$ des \mathbb{Z}^2 beziehungsweise \mathbb{Z}^1 .

Im Falle des Beispiels 7.4.1 und generell im Falle einelementiger unimodularer Mengen X kann ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die großen Unterdeterminanten leicht eingesehen werden. Eine solche Menge X ist nämlich genau dann unimodular, wenn die Einträge des einzigen Vektors (äquivalent dazu die großen Unterdeterminanten der Matrix) teilerfremd sind. Tatsächlich lässt sich diese Aussage für Mengen mehrerer linear unabhängiger Vektoren übernehmen.

Theorem 7.4.2. Eine Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ mit vollem Spaltenrang k ist genau dann unimodular, wenn

$$\gcd \{ \det X_I \mid I \subseteq [d], |I| = k \} = 1.$$

Um diesen Satz zu beweisen benötigt man eine weitere Normalform aus der Algebra der ganzzahligen Matrizen, die *SMITH-Normalform*.

Definition 7.4.3. Eine Matrix $X \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ vom Rang k ist in *SMITH-Normalform*, kurz *SNF*, wenn es eine Diagonalmatrix $S = (s_{ij}) \in \mathbb{Z}^{(k,k)}$ gibt, so dass gilt:

1. $X^T = [S, 0]$,
2. s_{ii} ist eine positive ganze Zahl für $1 \leq i \leq k$ und
3. s_{ii} teilt $s_{i+1,i+1}$ für $1 \leq i \leq k-1$.

Analog zur *HERMITE-Normalform* gibt es auch eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(d \times k)$ -Matrizen, so dass jede Äquivalenzklasse einen eindeutigen Vertreter in *SNF* besitzt.

Definition 7.4.4. Zwei Matrizen $X_1, X_2 \in \mathbb{Z}^{(d,k)}$ heißen *äquivalent*, wenn es unimodulare Matrizen $U \in \mathbb{Z}^{(d,d)}$ und $V \in \mathbb{Z}^{(k,k)}$ gibt, so dass

$$U \cdot X_1 \cdot V = X_2.$$

Die Multiplikation von rechts mit einer unimodularen Matrix entspricht einer Anwendung von elementaren *Spaltenumformungen* über \mathbb{Z} . Daher sind zwei Matrizen äquivalent, wenn sie sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen über \mathbb{Z} ineinander überführen lassen. Über einem Körper \mathbb{K} , das heißt mithilfe elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen über \mathbb{K} sind je zwei Matrizen gleicher Dimension und gleichen Ranges äquivalent. Da jedoch beispielsweise die (1×1) -Matrix (3) nicht mittels Operationen über \mathbb{Z} in die Matrix (1) überführt werden kann, gibt es in diesem Kontext weit mehr Äquivalenzklassen.

Der ausgezeichnete Vertreter in \mathcal{SNF} der Äquivalenzklasse einer Matrix X wird mit $\text{snf}(X)$ bezeichnet und analog zu $\text{hnf}_\Delta(X)$ bezeichnet $\text{snf}_\Delta(X)$ die Diagonalmatrix von $\text{snf}(X)$. Die Diagonaleinträge s_{11}, \dots, s_{kk} von $\text{snf}_\Delta(X)$ heißen die Elementarteiler der Matrix X und sind somit auch die Elementarteiler jeder weiteren Matrix in der Äquivalenzklasse von X .

Definition 7.4.5. Sei X eine Matrix und $S = (s_{ij}) = \text{snf}_\Delta(X)$. Die Zahlen

$$d_i(X) = \prod_{j=1}^i s_{jj}$$

heißen die *Determinantenteiler* der Matrix X .

Der i -te Determinantenteiler einer Matrix in \mathcal{SNF} ist offenbar der größte gemeinsame Teiler aller i -reihigen quadratischen Untermatrizen dieser Matrix und da sich dieser ggT durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen nicht ändert, gilt das folgende Lemma.

Lemma 7.4.6.

$$d_i(X) = \gcd \{ \det X_{I \times J} \mid I \subseteq [d], J \subseteq [k], |I| = |J| = i \}$$

Mit diesem Hilfsmittel kann nun das Theorem 7.4.2 bewiesen werden.

Beweis. [von Theorem 7.4.2]

Sei zunächst X als unimodular angenommen. Nach Lemma 7.2.4 gilt dann $\text{hnf}_\Delta(X) = I_{k,k}$ und es gibt eine unimodulare Matrix $U \in \mathbb{Z}^{(d,d)}$, so dass

$$U \cdot X = \begin{bmatrix} I_{k,k} \\ \mathbf{0}_{d-k,k} \end{bmatrix}. \quad (7.4.3)$$

Die rechte Seite von (7.4.3) stellt eine Matrix dar, die sowohl in \mathcal{HNF} als auch in \mathcal{SNF} vorliegt. Setzt man $V = I_{k,k}$, so gilt

$$U \cdot X \cdot V = \begin{bmatrix} I_{k,k} \\ \mathbf{0}_{d-k,k} \end{bmatrix} \quad (7.4.4)$$

und die rechte Seite von (7.4.4) stellt die SNF der Matrix X dar. Nun gilt $d_k(I_{k,k}) = 1$ und eine Implikation ist bewiesen.

Für die Umkehrung sei $d_k(X) = 1$ und y ein beliebiger ganzzahliger Vektor im Spann von X . Sei $I \subseteq [d]$ eine beliebige Auswahl von k Zeilen, so dass

$$X_I \cdot x = y_I \quad (7.4.5)$$

ein reguläres quadratisches Gleichungssystem bildet. Sei λ die eindeutige Lösung von (7.4.5). Nach Proposition 1.5.3 ist λ gerade $1/\det X_I$ -zahlig. Der Vektor λ

ist jedoch auch die eindeutige Lösung *jedes* quadratischen Untersystems der Form (7.4.5) und somit ist λ für jede reguläre k -reihige Untermatrix X_I auch $1/\det X_I$ -zahlig. Insbesondere gilt

$$\lambda \cdot \gcd \{ \det X_I \mid I \subseteq [d], |I| = k \} \in \mathbb{Z}^k$$

und mit $d_k(X) = 1$ folgt $\lambda \in \mathbb{Z}^k$. Die Matrix X stellt demnach jeden ganzzahligen Punkt ihres Spans mit ganzzahligen Koeffizienten dar und ist somit unimodular. \square

Das Theorem 7.4.2 ist äquivalent zu der Aussage

$$X \text{ unimodular} \iff \text{snf}_\Delta(X) \text{ unimodular.}$$

Dies ist das Analogon der SMITH-Normalform zu der Aussage (7.2.2) über die HERMITE-Normalform und kann auch analog zum Lemma 7.2.4 bewiesen werden, da die einzige quadratische unimodulare Matrix in \mathcal{SNF} wiederum die Einheitsmatrix ist. Im Gegensatz zur HERMITE-Normalform erlaubt die SMITH-Normalform nun allerdings eine Interpretation dieses Sachverhaltes im Kontext der Gitter aus dem Abschnitt 7.1.

Die Restriktion auf eine Auswahl I von k Zeilen der Matrix X entspricht der Projektion des Gitters $\Lambda(X)$ auf diese k Koordinaten. Das Bild dieser Projektion ist wiederum ein Gitter und wird von den Spalten der Matrix X_I erzeugt. Werden linear unabhängige Zeilen gewählt, so ist das Gitter $\Lambda(X_I)$ ein volldimensionales Untergitter des \mathbb{Z}^k mit der Gitterdeterminante $\det(\Lambda(X_I)) = |\det X_I|$. Je größer diese Determinante, desto weiter sind die Maschen des Gitters und desto mehr ganzzahlige Punkte gehen „verloren“ (Vergleiche Abbildung 7.1). Ist die Gitterdeterminante von $\Lambda(X_I)$ gleich 1, bildet X_I also eine Basis des \mathbb{Z}^k , so gehen nach der Projektion keine Punkte verloren und demnach stellt X bereits vor der Projektion eine Gitterbasis des \mathbb{Z}^d dar. Dies entspricht der Aussage des Korollars 7.3.3.

Die Determinante einer k -reihigen Untermatrix X_I gibt also die Maschenweite des Gitters $\Lambda(X_I)$ und somit auch die „Regelmäßigkeit“ an, in der ganzzahlige Punkte bei der Projektion verloren gehen. Besitzen diese Determinanten einen echten gemeinsamen Teiler, so gibt es demnach Gemeinsamkeiten in diesen „Regelmäßigkeiten“ und somit für jede passende Menge I Punkte $y_I \in \mathbb{Z}^k \setminus \Lambda(X_I)$, die zu einem Punkt $y \in \Lambda_L(X) \setminus \Lambda(X)$ zusammen gefügt werden können. X ist dann nicht unimodular.

Ist im Gegenzug der größte gemeinsame Teiler der großen Unterdeterminanten gerade 1, so bildet

$$S := \bigcap_{I \subseteq [d], |I|=k} \underbrace{\Lambda_L(X_I)}_{=\mathbb{Z}^k} \setminus \Lambda(X_I)$$

keine regelmäßige Schnittmenge, beinhaltet demnach kein „verschobenes Gitter“. Das Gitter muss „verschoben“ sein, da der Nullpunkt stets in $\Lambda(X_I)$ und somit nicht in S liegt.

Ist X nicht unimodular, so bildet die Menge $\Lambda_L(X) \setminus \Lambda(X)$ der ganzzahligen Punkte im Spann, die *nicht* ganzzahlig dargestellt werden, solch eine regelmäßige Schnittmenge und diese Regelmäßigkeit geht bei der Projektion auf k Koordinaten nicht verloren.

Kapitel 8

Eine Anpassung des Algorithmus von Horton

8.1 Die Grundidee

Dieser Abschnitt wird die Idee des Algorithmus von Horton auf Kreisbasen über \mathbb{Z} erweitern. Die Schlüsselerkenntnis beim Algorithmus von Horton, wie er in Kapitel 4 für Kreisbasen über einem Körper \mathbb{K} vorgestellt wurde, ist, dass die gerichteten Kreise mit der \mathbb{K} -linearen Unabhängigkeit ihrer Inzidenzvektoren ein Matroid bilden. Das Kapitel 6 zeigte, dass auch auf der Grundlage der ganzzahligen Kreisbasen ein Unabhängigkeitssystem definiert werden kann, welches allerdings kein Matroid ist. Gemäß Definition 6.1.1 besteht die Grundmenge dieses Unabhängigkeitssystems aus allen elementaren Kreisen in D und ist eine Menge von Kreisen genau dann unabhängig, wenn sie sich zu einer ganzzahligen Kreisbasis erweitern lässt. Es ist allerdings unter Umständen schwierig, die Unabhängigkeit einer Menge in diesem System zu überprüfen, da sich nicht ohne Weiteres klären lässt, ob eine Kreismenge eine Teilmenge einer ganzzahligen Basis ist. Es gilt allerdings das folgende Lemma.

Lemma 8.1.1. *Ist eine Menge X von gerichteten Kreisen zu einer ganzzahligen Kreisbasis erweiterbar, so ist X unimodular.*

Beweis. Zum Nachweis der Unimodularität muss zunächst ihre lineare Unabhängigkeit gezeigt werden. Diese folgt allerdings sofort aus der linearen Unabhängigkeit der Basis, zu der X erweitert werden kann.

Sei nun x ein ganzzahliger Punkt aus dem Spann der Menge X und $X \cdot \lambda = x$ dessen eindeutige Darstellung mit den Vektoren in X . Der Koeffizientenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^{|X|}$ lässt sich durch Nullen zu einem Vektor $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^V$ erweitern, so dass für die ganzzahlige Kreisbasis $\bar{X} \supseteq X$ gilt:

$$x = X \cdot \lambda = \bar{X} \cdot \bar{\lambda} \tag{8.1.1}$$

Die rechte Seite von (8.1.1) stellt nun eine, und damit die eindeutige, Linearkombination der Basis \bar{X} zu dem Vektor x dar. Da \bar{X} eine ganzzahlige Kreisbasis ist, ist $\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}^V$ und somit auch λ ein ganzzahliger Vektor. \square

Nach Lemma 8.1.1 ist die Unimodularität einer Menge Voraussetzung für ihre Unabhängigkeit in dem von den ganzzahligen Kreisbasen induzierten Unabhängigkeitssystem. Da die Unimodularität gut untersucht ist und mit Algorithmus 6 eine Möglichkeit besteht, diese effizient zu prüfen, wird über sie ein neues Unabhängigkeitssystem definiert.

Definition 8.1.2. Das *unimodulare Unabhängigkeitssystem* U ist gegeben durch

- die Menge \mathcal{C} aller gerichteten Kreise des Graphen D als Grundmenge und
- die unimodularen Teilmengen von \mathcal{C} als System der unabhängigen Mengen.

Dass U tatsächlich ein Unabhängigkeitssystem gemäß Definition 4.1.1 bildet, folgt aus der Proposition 7.1.6, nach der jede Teilmenge einer unimodularen Menge selbst wieder unimodular ist. Die Basen von U sind die maximal unabhängigen Mengen, das heißt diejenigen Teilmengen gerichteter Kreise, die durch Hinzunahme jedes Kreises ihre Unimodularität verlieren. Die ganzzahligen Kreisbasen sind genau die ν -elementigen Basen von U und somit zunächst nur eine Teilmenge *aller* Basen in U . Der Abschnitt 8.2 wird sich mit der Frage befassen, ob es Basen in U gibt, die weniger als ν Kreise beinhalten.

Bemerkung 8.1.3. Die leere Menge ist linear unabhängig und somit unimodular.

Es gibt noch weitere Möglichkeiten ein Unabhängigkeitssystem dieses Kontextes zu definieren. Eine solche ist mit der folgenden Definition gegeben.

Definition 8.1.4. Definiere ein Teilmengensystem \mathcal{B}' der Menge \mathcal{C} der gerichteten Kreise wie folgt. Eine, nicht notwendigerweise linear unabhängige, Kreismenge $X \subseteq \mathcal{C}$ ist ein Element von \mathcal{B}' , wenn

- $\text{span}_{\mathbb{Z}}(X) = Z_{\mathbb{Z}}(D)$ und
- $\text{span}_{\mathbb{Z}}(X \setminus \{C\}) \neq Z_{\mathbb{Z}}(D)$ für alle Kreise $C \in X$ gilt.

Eine Menge $X \in \mathcal{B}'$ besteht demnach aus Kreisen, die jeden weiteren Kreis des Zykelraumes ganzzahlig darstellen können und diese Eigenschaft verliert, sobald man ein beliebiges Element entfernt. Kreismengen mit diesen Eigenschaften sind inklusionsminimale Erzeugendensysteme des Zykelraumes $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ und als solche nicht notwendigerweise linear unabhängig. Es sind zwar alle ganzzahligen Kreisbasen des Graphen in \mathcal{B}' enthalten, es gibt deshalb jedoch auch Mengen darin, die aus mehr als ν Kreisen bestehen.

Auf der Grundlage dieses Mengensystems kann das durch \mathcal{B}' induzierte Unabhängigkeitssystem U' betrachtet werden (Definition 6.1.1). Die Menge der ganzzahligen Basen ist dann unter Umständen eine echte Teilmenge der Basen dieses Systems und eine Menge von Kreisen ist unabhängig, wenn sie zu einer Menge $X \in \mathcal{B}'$ erweitert werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Unabhängigkeitssystem U' jedoch nicht weiter untersucht werden.

Der hier vorgestellte Algorithmus besteht aus dem *greedy*-Algorithmus, angewendet auf das Unabhängigkeitssystem U der unimodularen Kreismengen, und wird mit dem folgenden Pseudocode in einer Grundversion umgesetzt.

Algorithmus 7 Eine Anpassung des Algorithmus von Horton an das MICB-Problem – Grundversion

Input: Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ zusammen mit einer nicht-negativen Gewichtsfunktion $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Output: Eine Menge gerichteter Kreise in D .

- 1: Bestimme die Menge \mathcal{C} aller gerichteten Kreise des Graphen D .
 - 2: Sortiere die Kreise in \mathcal{C} nach nicht-absteigendem Gewicht (D.h. am Ende dieses Schrittes kann man $w(C_1) \leq \dots \leq w(C_{|\mathcal{C}|})$ annehmen).
 - 3: Setze $I \leftarrow \emptyset$.
 - 4: **for** $i = 1$ bis $|\mathcal{C}|$ **do**
 - 5: **if** $I \cup \{C_i\}$ unimodular **then**
 - 6: Setze $I \leftarrow I \cup \{C_i\}$.
 - 7: **end if**
 - 8: **end for**
 - 9: **return** I .
-

8.2 Erweiterbarkeit

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Frage, ob eine unimodulare Menge gerichteter Kreise stets zu einer ganzzahligen Kreisbasis erweitert werden kann. Lautet die Antwort auf diese Frage „Ja“, so ist gewährleistet, dass der Algorithmus 7 stets eine ganzzahlige Kreisbasis, also eine zulässige Lösung des MICB-Problems berechnet. Gibt es andernfalls unimodulare Mengen, die *nicht* zu einer ganzzahligen Kreisbasis erweitert werden können, so könnte im Verlauf des Algorithmus die Menge I unter Umständen gerade solch eine Menge darstellen, was dazu führen würde, dass die berechnete Kreismenge zwar eine Basis von U , nicht aber eine ganzzahlige Kreisbasis des Graphen D darstellt.

Proposition 8.2.1. *Sei T ein Spannbaum von $D = (V, A)$, X eine Menge von Zirkulationen und $X_{A \setminus T}$ die Menge der gekürzten Inzidenzvektoren aus X . Dann gilt:*

$$X \text{ unimodular} \iff X_{A \setminus T} \text{ unimodular}$$

Beweis. Sei $\Phi^{(T)}$ die Basismatrix der Fundamentalbasis zum Baum T . Dann stellt $X_{A \setminus T}$ gerade die Basiswechsellmatrix zwischen $\Phi^{(T)}$ und X dar, das heißt

$$\Phi^{(T)} \cdot X_{A \setminus T} = X. \quad (8.2.1)$$

Sind die Zeilen der Matrizen $\Phi^{(T)}$ und X so sortiert, dass die ersten ν Zeilen von $\Phi^{(T)}$ die Einheitsmatrix darstellen, lässt sich (8.2.1) noch einmal etwas detaillierter aufschreiben.

$$\begin{bmatrix} I_{\nu, \nu} \\ \Phi_T^{(T)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{A \setminus T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{A \setminus T} \\ X_T \end{bmatrix} \quad (8.2.2)$$

Die Zeilen der Untermatrix $\Phi_T^{(T)}$ lassen sich offensichtlich mit elementaren Zeilenumformungen durch die Zeilen der Einheitsmatrix darstellen, es gibt also eine unimodulare Matrix $U \in \mathbb{Z}^{(\nu, \nu)}$, so dass

$$U \cdot \begin{bmatrix} I_{\nu, \nu} \\ \Phi_T^{(T)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\nu, \nu} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (8.2.3)$$

Die Multiplikation von links mit der verwendeten Matrix U an die Gleichung (8.2.2) ergibt mit (8.2.3) nun

$$\begin{aligned} U \cdot \begin{bmatrix} I_{\nu,\nu} \\ \Phi_T^{(T)} \end{bmatrix} \cdot [X_{A \setminus T}] &= U \cdot \begin{bmatrix} X_{A \setminus T} \\ X_T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_{\nu,\nu} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot [X_{A \setminus T}] &= U \cdot \begin{bmatrix} X_{A \setminus T} \\ X_T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{A \setminus T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= U \cdot \begin{bmatrix} X_{A \setminus T} \\ X_T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Daher sind die beiden Matrizen X und $[X_{A \setminus T}, 0]^T$ nach (8.2.4) links-äquivalent, besitzen somit die gleiche HNF und es gilt

$$\text{hnf}_\Delta(X) = \text{hnf}_\Delta\left(\begin{bmatrix} X_{A \setminus T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \text{hnf}_\Delta(X_{A \setminus T}).$$

□

Bemerkung 8.2.2. Die rechte Seite der Gleichung (8.2.3) ist eine Matrix in \mathcal{HNF} und somit gerade die Hermite-Normalform der verwendeten Fundamentaltbasis $\Phi^{(T)}$. Da auf diese Weise für *jede* Fundamentaltbasis $\text{hnf}_\Delta(\Phi^{(T)}) = I_{\nu,\nu}$ gezeigt werden kann, ist jede Fundamentaltbasis nach Lemma 7.2.4 eine ganzzahlige Kreismatrix.

Korollar 8.2.3. *Jede unimodulare Menge X gerichteter Kreise lässt sich zu einer ganzzahligen Zirkulationsbasis erweitern.*

Beweis. Sei T ein Spannbaum des Graphen D . Da X unimodular ist, ist auch $X_{A \setminus T}$ nach Proposition 8.2.1 unimodular und somit nach Lemma 7.1.9 zu einer ganzzahligen Basis $\bar{X}_{A \setminus T}$ des \mathbb{Z}^ν erweiterbar.

Jeder der hinzugenommenen Vektoren in $\bar{X}_{A \setminus T} \setminus X_{A \setminus T}$ legt ein ganzzahliges Element des Zykelraumes $Z_{\mathbb{R}}(D)$ fest, kann also zu einem Inzidenzvektor einer Zirkulation erweitert werden. Daher kann die gesamte Menge $\bar{X}_{A \setminus T}$ auf den Koordinaten der Baumbögen so erweitert werden, dass die entstandene Menge \bar{X} eine Menge von Zirkulationen darstellt. Diese ist wiederum nach Proposition 8.2.1 unimodular und bildet somit eine ganzzahlige Zirkulationsbasis von D . □

Im Kontext allgemeiner Zirkulationen und ganzzahliger Zirkulationsbasen sind die Begriffe „unimodular“ und „Teilmenge einer ganzzahligen Basis“ also äquivalent. Dies liegt daran, dass durch das Wegfallen der Einschränkung auf elementare Kreise die Struktur des Graphen unerheblich für die Erweiterbarkeit einer unimodularen Menge wird.

Der Graph D definiert die „Lage“ des Zykelraumes über \mathbb{Z} , einem Untergitter des $\mathbb{Z}^{|A|}$ vom Rang ν . Die Projektion des $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ auf die Koordinatenmenge eines beliebigen Cobaumes liefert jedoch stets das Einheitsgitter \mathbb{Z}^ν im \mathbb{R}^ν , aus dem die ursprüngliche „Lage“ des $Z_{\mathbb{Z}}(D)$ nicht mehr rekonstruierbar ist. Da bei der Projektion jegliche Linearkombinationen und somit auch jegliche \mathbb{Z} -lineare Unabhängigkeit und Unimodularität unverändert bleiben, können alle für die Erweiterbarkeit relevanten Aussagen und Beobachtungen im \mathbb{Z}^ν gehalten werden.

mit den Zeilen $\Phi_{S \setminus \{a\}}^{(T)}$ dargestellt werden und es gibt eine unimodulare Matrix $U \in \mathbb{Z}^{(\nu-k, \nu-k)}$, so dass

$$U \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{S \setminus a}^{(T)} \\ \Phi_a^{(T)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{S \setminus a}^{(T)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.2.5)$$

Mit (8.2.5) gilt in Analogie zum Beweis der Proposition 8.2.1 nun

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Phi_{S \setminus a}^{(T)} \\ \Phi_a^{(T)} \\ \Phi_{I \setminus S}^{(T)} \end{bmatrix} \cdot X_T = X_I \\ \left[\begin{array}{c|c} U & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{S \setminus a}^{(T)} \\ \Phi_a^{(T)} \\ \Phi_{I \setminus S}^{(T)} \end{bmatrix} \cdot X_T &= \left[\begin{array}{c|c} U & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array} \right] \cdot X_I \\ \begin{bmatrix} \Phi_{S \setminus a}^{(T)} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{I \setminus S}^{(T)} \end{bmatrix} \cdot X_T &= \left[\begin{array}{c|c} U & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array} \right] \cdot X_I \\ \begin{bmatrix} X_{S \setminus a} \\ \mathbf{0} \\ X_{I \setminus S} \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} U & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array} \right] \cdot X_I. \end{aligned}$$

Und damit gilt

$$\text{hnf}_\Delta(X_I) = \text{hnf}_\Delta(X_{I \setminus a}).$$

Dieses Vorgehen kann nun iteriert werden, bis eine Teilmenge I' von I erreicht wird, die keinen Schnitt mehr enthält. \square

Lemma 8.2.6. *Sei X eine unimodulare Menge von Zirkulationen. Dann gibt es genau dann einen elementaren Kreis, der X unimodular erweitert, wenn es eine Auswahl I von $\nu - 1$ Zeilen gibt, so dass X_I unimodular ist.*

Beweis. Sei zunächst $\bar{X} = X \cup \{x\}$ für einen gerichteten Kreis x unimodular und T ein beliebiger Spannbaum, so dass x ein Fundamentalkreis von T zum Nichtbaumbogen a ist. Nach Proposition 8.2.1 ist $\bar{X}_{A \setminus T}$ unimodular und hat folgende Gestalt:

$$\bar{X}_{A \setminus T} = \left(\begin{array}{c|c} & \mathbf{0} \\ & \vdots \\ X_{A \setminus T} & \\ & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} \end{array} \right) \quad (8.2.6)$$

Da $\bar{X}_{A \setminus T}$ unimodular ist und $\text{Rang } |X| + 1$ hat, gilt nach Theorem 7.4.2

$$\text{gcd} \{ \det \bar{X}_I \mid I \subseteq A \setminus T, |I| = |X| + 1 \} = 1.$$

Da die letzte Spalte von (8.2.6) der Einheitsvektor des Nichtbaumbogens a ist, weist jede Untermatrix \bar{X}_I mit $a \notin I$ eine Nullspalte auf und hat demnach die Determinante 0. Jede Untermatrix \bar{X}_I mit $a \in I$ enthält hingegen die a -te

Einheitsspalte und hat demnach betragslich dieselbe Determinante wie $X_{I \cup \{a\}}$. Insbesondere gilt

$$\gcd \{ \det X_I \mid I \subseteq (A \setminus T) \setminus \{a\}, |I| = |X| \} = 1$$

und dies ist gleichbedeutend mit der Unimodularität der Matrix $X_{(A \setminus T) \setminus \{a\}}$. Da $|(A \setminus T) \setminus \{a\}| = \nu - 1$ gilt, wurde eine geforderte Zeilenauswahl gefunden.

Für die Umkehrung sei I eine Auswahl von $\nu - 1$ Zeilen mit unimodularer Matrix X_I . Die Wahl der Zeilen entspricht einer Bogenmenge $I \subset A$. Enthält diese Bogenmenge einen Schnitt, so kann nach Proposition 8.2.5 eine Teilmenge I' von I gefunden werden, die keinen Schnitt enthält und deren Zeilenauswahl $X_{I'}$ noch immer unimodular ist.

Enthalte also die Menge I ohne Beschränkung der Allgemeinheit keinen Schnitt, das heißt, dass $A \setminus I$ zusammenhängend ist und daher ein Baum T in der Bogenmenge $A \setminus I$ gewählt werden kann. Bezüglich dieses Baumes stellt I , da $|I| < \nu$, eine *echte Teilmenge* des Cobaumes $A \setminus T$ dar. Sei $a \in (A \setminus T) \setminus I$ ein Nichtbaumbogen außerhalb der Menge I und C der Fundamentalkreis des Bogens a bezüglich des Baumes T . Die Erweiterung der Menge X durch diesen elementaren Kreis C führt auf die folgende gekürzte Kreismatrix der neuen Kreismenge $\bar{X} = X \cup \{C\}$:

$$\bar{X}_{A \setminus T} = \left(\begin{array}{c|c} X_I & 0 \\ \hline & \vdots \\ X_{(A \setminus T) \setminus I} & 0 \\ & 1 \end{array} \right)$$

Da die Matrix X_I bereits unimodular ist, also der größte gemeinsame Teiler der Determinanten ihrer großen quadratischen Untermatrizen gleich 1 ist, sind bereits die Determinanten der großen quadratischen Untermatrizen von $\bar{X}_{I \cup \{a\}}$ teilerfremd und somit $\bar{X}_{I \cup \{a\}}$ und insbesondere auch \bar{X} unimodular. \square

Die Proposition 8.2.1 besagt, dass jede Cobaum-Zeilenauswahl I einer unimodularen Menge X zu einer unimodularen Untermatrix X_I führt. Diese Untermatrix hat gerade ν Zeilen, während das Lemma 8.2.6 besagt, dass die unimodulare Menge X genau dann durch eine elementare Zirkulation erweiterbar ist, falls es sogar eine $(\nu - 1)$ -elementige Zeilenauswahl I' gibt, die eine unimodulare Matrix $X_{I'}$ bestimmt. Als Nächstes wird ein Beispiel für eine unimodulare Kreismenge eines Graphen angegeben, in der *keine* $(\nu - 1)$ -elementige Teilmenge I' einer Cobaummenge I auf eine unimodulare Untermatrix führt.

Beispiel 8.2.7. Betrachte den Graphen D aus Abbildung 8.1 und die ganzzahlige Zirkulationsbasis B aus dem Beispiel 6.3.4. Die ersten fünf Zirkulationen von B sind elementar, während die letzte Zirkulation die Menge zwar unimodular erweitert, jedoch eine nicht-elementare Zirkulation ist. Sei X die Menge der ersten fünf Kreise. Der im Beispiel 6.3.4 gewählte Cobaum entspricht einer

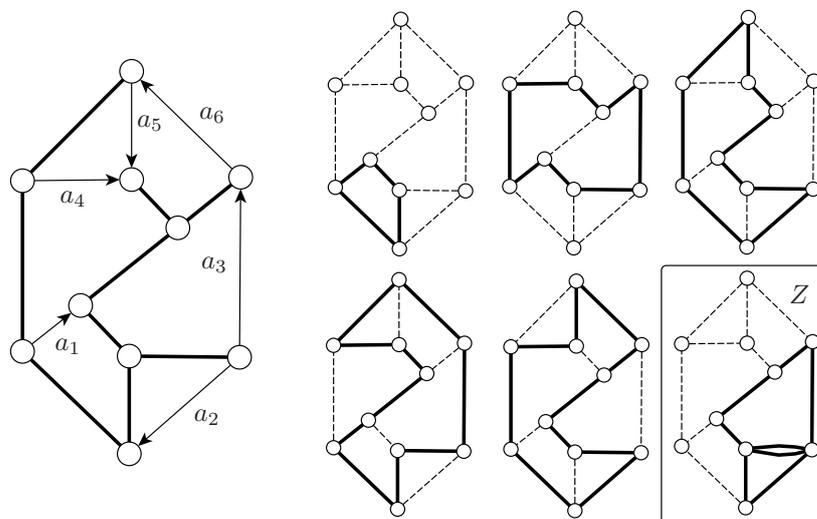


Abbildung 8.1: Der Graph D und die Zirkulationsbasis B aus Beispiel 6.3.4. Der gewählte Spannbaum $A \setminus I$ ist dick eingezeichnet.

Auswahl von $\nu = 6$ Zeilen I mit zugehöriger unimodularer Matrix X_I .

$$X_I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.2.7)$$

Eine Teilauswahl I' von $\nu - 1$ dieser Zeilen führt nun auf eine quadratische (5×5) -Matrix $X_{I'}$. Die Unimodularität dieser Matrix kann durch die Berechnung ihrer Determinante bestimmt werden. Es gibt genau sechs solcher Teilmengen und somit sechs Determinanten, die betrachtet werden müssen.

$$\begin{aligned} \det X_{\{1,2,3,4,5\}} &= 4 & \det X_{\{1,2,3,4,6\}} &= 3 & \det X_{\{1,2,3,5,6\}} &= -2 \\ \det X_{\{1,2,4,5,6\}} &= 2 & \det X_{\{1,3,4,5,6\}} &= 3 & \det X_{\{2,3,4,5,6\}} &= 0 \end{aligned}$$

Die sechs auftretenden Determinanten sind teilerfremd, was noch einmal die Unimodularität der Matrix X_I bezeugt. Es taucht jedoch keine ± 1 auf und so ist keine dieser Teilmengen unimodular. Dies bedeutet unter anderem, dass kein Fundamentalkreis des gewählten Baumes die Menge X ganzzahlig erweitern kann. Es gibt jedoch andere elementare Kreise, die die Menge X unimodular erweitern.

Es konnte im Umfang dieser Diplomarbeit nicht geklärt werden, ob jede unimodulare Menge von Kreisen zu einer ganzzahligen Kreisbasis erweitert werden kann. Diese Vermutung konnte weder bewiesen noch durch die Angabe eines Gegenbeispiels widerlegt werden.

8.3 Der Algorithmus

Der Algorithmus, der hier vorgestellt wird, basiert auf der im Abschnitt 8.1 gegebenen Grundversion und arbeitet mit unimodularen Kreismengen. Daher endet Algorithmus 7 mit einer Basis des Unabhängigkeitssystems U der unimodularen Kreismengen. Es konnte mit den Betrachtungen des Abschnittes 8.2 allerdings weder bewiesen noch widerlegt werden, dass jede Basis von U auch eine ganzzahlige Kreisbasis ist. So wird der folgende Algorithmus als eine Heuristik für das MICB-Problem, die unter Umständen unzulässige Lösungen berechnet, anzusehen sein.

Da Algorithmus 7 im Grunde dem *greedy*-Algorithmus, angewendet auf das Unabhängigkeitssystem U , entspricht, ist seine Laufzeit polynomial in der Größe der Grundmenge, das heißt polynomial in $|\mathcal{C}|$, der Anzahl aller elementaren Kreise in D . Diese Anzahl ist jedoch in der Regel exponentiell in Bogen- und Knotenzahl des Graphen und die Laufzeit somit nicht durch ein Polynom in der Größe des Graphen beschränkt. Im Algorithmus von Horton, wie er im Kapitel 4 vorgestellt wurde, wird dieses Problem mit der Ersetzung der Grundmenge \mathcal{C} durch eine kleine Teilmenge, der Horton-Familie \mathcal{H} von (D, w) , gelöst. Dadurch wird auch das System der unabhängigen Mengen auf die unimodularen Teilmengen der Horton-Familie begrenzt und man erhält ein weiteres Unabhängigkeitssystem mit kleinerer Grundmenge.

Definition 8.3.1. Das *unimodulare Horton-Unabhängigkeitssystem*, kurz *UH-System*, ist gegeben durch

- die Horton-Familie \mathcal{H} der Instanz (D, w) als Grundmenge und
- die unimodularen Teilmengen von \mathcal{H} als System der unabhängigen Mengen.

Durch diese Einschränkung kann die Laufzeit zwar gering gehalten werden, es könnten nun allerdings wichtige unimodulare Mengen wegfallen. Es ist natürlich eine viel stärkere Annahme, dass eine unimodulare Menge stets sogar durch einen Horton-Kreis unimodular erweitert werden kann und in ihrer vollen Allgemeinheit kann man diese auch widerlegen.

Beispiel 8.3.2. Betrachte erneut das Beispiel 8.2.7. Es wurde gezeigt, dass kein Fundamentalkreis des gewählten Spannbaumes die unimodulare Menge X unimodular erweitert. Wählt man nun die Bogengewichte auf dem Spannbaum 0 und auf allen übrigen Bögen 1, so sind genau diese Fundamentalkreise die einzigen Horton-Kreise der Instanz (D, w) und die Kreismenge X durch keinen Horton-Kreis unimodular erweiterbar. Allerdings enthält die Menge X bereits vier Nicht-Hortonkreise und ist daher selbst keine Menge des UH-Systems.

Die Vermutung, dass jede Basis des UH-Systems, ν -elementig, das heißt eine ganzzahlige Kreisbasis ist, bleibt unbewiesen. Trotzdem erhält man mit dem Ersetzen des Unabhängigkeitssystems U durch das UH-System nun eine polynomielle Heuristik für das MICB-Problem.

Algorithmus 8 Eine Variante des Algorithmus von Horton für das MICB-Problem

Input: Eine Instanz (D, w) des MICB-Problems aus einem gerichteten Graphen $D = (V, A)$ und einer nicht-negativen Gewichtsfunktion $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Output: Eine Basis des UH-Systems von (D, w) .

- 1: Perturbiere die Bogengewichte so, dass alle kürzesten Wege bezüglich \tilde{w} eindeutig sind.
 - 2: Bestimme die Horton-Familie \mathcal{H} von (D, \tilde{w}) .
 - 3: Sortiere die Kreise in \mathcal{H} nach nicht-absteigendem Gewicht (D.h. am Ende dieses Schrittes kann man $\tilde{w}(C_1) \leq \dots \leq \tilde{w}(C_{|\mathcal{H}|})$ annehmen).
 - 4: Setze $I = \emptyset$.
 - 5: **for** $i = 0$ bis $|\mathcal{H}|$ **do**
 - 6: **if** $I \cup \{C_i\}$ unimodular **then**
 - 7: Setze $I \leftarrow I \cup \{C_i\}$.
 - 8: **end if**
 - 9: **end for**
 - 10: **return** I .
-

Der Test auf Unimodularität in Zeile 6 kann mittels Algorithmus 6 durchgeführt werden. Dadurch fällt für jeden Kreis in \mathcal{H} ein Aufruf dieses Algorithmus mit je $\mathcal{O}(i^2\nu(\log \mu + 1))$ Operationen an. Die Gesamtlaufzeit liegt demnach in

$$\mathcal{O}(|A||V|\nu^3(\log \mu + 1)). \quad (8.3.1)$$

Die Anzahl der HNF-Berechnungen lässt sich jedoch von $|\mathcal{H}| = |A||V|$ auf $\nu - 1 = |A| - |V|$ reduzieren. Nach dem Beweis des Lemmas 7.2.5 stellt die unimodulare Übergangsmatrix U bei der Darstellung der HNF von I gerade die Inverse einer möglichen unimodularen Erweiterung von I dar, falls I unimodular ist. Diese Übergangsmatrix kann während der Bestimmung der HNF berechnet werden, ohne die Laufzeit entscheidend zu erhöhen.

Sei also Algorithmus 6 nur aufgerufen, wenn in Zeile 7 tatsächlich ein neues Element der Menge I hinzugefügt wurde und sei bei dieser Berechnung auch die unimodulare Übergangsmatrix U ausgegeben. U kann nun dazu benutzt werden, die Unimodularität der Menge $I \cup \{C\}$ zu testen. Nach Lemma 7.1.10 erweitert C die Menge I genau dann unimodular, wenn für eine Darstellung

$$C = \sum_{k=1}^{|I|} \lambda_k C_k + \sum_{k=|I|+1}^{\nu} \lambda_k U_k \quad (8.3.2)$$

des Kreises C durch die erweiterte Basis $I \cup U^{-1}$ gilt:

$$\gcd(\lambda_{|I|+1}, \dots, \lambda_{\nu}) = 1$$

Der Koeffizientenvektor λ von (8.3.2) ist durch $U \cdot C$ gegeben und kann in $\mathcal{O}(\nu^2)$ bestimmt werden. Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{\nu}$ lässt sich in $\mathcal{O}(\log^{\nu-k} \lambda_{max}) = \mathcal{O}(\eta)$ berechnen. Die Gesamtlaufzeit dieser Variante ergibt demnach:

$$\mathcal{O}(\nu^4(\log \mu + 1) + |A||V|(\nu^2 + \eta))$$

8.4 Suboptimalität

Der angepasste Algorithmus von Horton (Algorithmus 8) besteht im Kern aus dem *greedy*-Algorithmus angewendet auf das UH-System. Dieses ist zwar ein Unabhängigkeitssystem, der Abschnitt 6.1 zeigte allerdings, dass dieses kein Matroid bildet. Dies könnte dazu führen, dass nicht alle Basen die gleiche Mächtigkeit aufweisen oder dazu, dass der *greedy*-Ansatz suboptimale Ergebnisse liefert.

Die Existenz von Basen mit weniger als ν Kreisen konnte nicht belegt werden, die Sehnen-Graphen des Kapitels 2 ermöglichen es jedoch, eine Beispielinstantz (D, w) eines gewichteten Graphen anzugeben, bei der der Algorithmus 8 mit einer ganzzahligen Kreisbasis endet, deren Gewicht über dem einer MICB liegt.

Da der *greedy*-Algorithmus, angewendet auf das entsprechende Matroid, eine minimale gerichtete beziehungsweise minimale ungerichtete Kreisbasis findet, muss in einem solchen Beispiel sowohl jede MUCB als auch jede MDCB nicht-ganzzahlig sein. Außerdem soll der Algorithmus in einer Iteration eine Fehlentscheidung treffen, das heißt einen Kreis C aufnehmen, der zwar die billigste unimodulare Erweiterung darstellt, durch dessen Aufnahme jedoch mindestens zwei, nur leicht teurere, Kreise C_1 und C_2 nicht mehr hinzugefügt werden können.

Das Fehlschlagen der Aufnahme der Kreise C_1 und C_2 kann zum Beispiel darauf beruhen, dass diese zwar linear unabhängig mit den bisherigen Kreisen sind, die Unimodularität allerdings verletzt wird.

Die Idee ist nun, dass C_1 und C_2 der Innen- und der Außenkreis des Sehnen-Graphen ist und die Aufnahme eines von beiden auf die eindeutige MUCB und die Aufnahme des anderen auf die eindeutige MDCB führt.

Des Weiteren soll der nächste Kreis C' in der sortierten Reihenfolge zwar auf eine ganzzahlige Kreisbasis führen, allerdings so teuer sein, dass es günstiger ist $\{C_1, C_2\}$ statt $\{C, C'\}$ zu wählen.

Beispiel 8.4.1 (Eine Instanz (D, w) , für die der Algorithmus 8 suboptimal endet). *Für die Umsetzung der oben skizzierten Idee sucht man zunächst den kleinsten Zirkulanten mit einem passenden minimalen Tupel (i, a) . Dieses sollte derart sein, dass beispielsweise a eine gerade Zahl ist und demnach die i -te Innenbasis gerichtet aber nicht ungerichtet ist, und dass i eine ungerade Zahl $\neq 1$ ist und die a -te Außenbasis somit ungerichtet aber nicht ganzzahlig ist. Tabelle 8.1 listet alle geschlossenen Tupel der ersten Zirkulanten bis zum Auftreten eines solchen Falles auf.*

Das Tupel $(3, 2)$ des 11, 3-Zirkulanten erfüllt die gewünschten Eigenschaften:

- *Die 3-te Innenbasis hat die Determinante 2 und ist damit gerichtet aber nicht ungerichtet.*
- *Die 2-te Außenbasis hat die Determinante 3 und ist damit ungerichtet aber nicht ganzzahlig.*

Nun wird durch den Einsatz von Brücken der verallgemeinerte Petersen-Graph $P_{11,3}$ erhalten und ein Sehnen-Satz festgelegt, der es ermöglicht, eine Bogenwegichtung festzulegen, unter der sich Innen- und Außenbasis wie gewünscht zueinander verhalten.

Die Abbildung 8.2 zeigt einen minimalen Kreis des Tupels $(3, 2)$ im $P_{11,3}$ und die Lage seiner Sehne s . Der zweite Übergang verändert lediglich die Einbettung,

$Z_{5,2}$	i	0	1	2	3	4	5						
	a	5	2	1	1	2	0						
$Z_{7,2}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7				
	a	7	2	3	1	1	3	2	0				
$Z_{7,3}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7				
	a	7	3	1	2	2	1	3	0				
$Z_{8,3}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8			
	a	8	3	2	1	4	1	2	3	0			
$Z_{9,2}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	a	9	2	4	3	1	1	3	4	2	0		
$Z_{9,4}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	a	9	4	1	3	2	2	3	1	4	0		
$Z_{10,3}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	a	10	3	4	1	2	5	2	1	4	3	0	
$Z_{11,2}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	a	11	2	4	5	3	1	1	3	5	4	2	0
$Z_{11,3}$	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	a	11	3	5	2	1	4	4	1	3	5	3	0

Tabelle 8.1: Alle geschlossenen Tupel der ersten neun Zirkulanten. Die minimalen Tupel sind hervorgehoben.

indem der Innenkreis ein Stück im Uhrzeigersinn gedreht wird, während beim letzten Übergang der gesamte Sehnen-Satz S dick eingezeichnet ist. Der am Ende dieser Konstruktion erhaltene Graph wird mit D bezeichnet und weist eine zyklomatische Zahl von $\nu(D) = 23$ auf.

Die in D verwendeten Sehnen verlaufen zwischen dem Innen- und Außenkreis und bilden somit eine weitere Brückenmenge, wie dies bereits im Beispiel 3.3.2 der Fall ist. Sei nun die Gewichtung w wie folgt definiert:

$$w_A = 5 \quad w_B = 19 \quad w_S = 19 \quad w_I = 5$$

Unter dieser Gewichtung gibt es genau 22 Kreise mit einem Gewicht von höchstens 53.

- Die 11 Kreise aus je einer Brücke, einer Außenkante, einer Innenkante und einer Sehne erhalten das Gewicht 48.
- Die 11 Kreise aus je einer Brücke, einer Außenkante, zwei Innenkanten und einer Sehne erhalten das Gewicht 53.

Diese Kreise entsprechen der paarweisen Aufteilung der 11 minimalen Kreise des Tupels $(3, 2)$. Die Kreise mit den nächsthöheren Gewichten sind

- der Innenkreis mit Gewicht 55,
- der Außenkreis mit Gewicht 55,
- die 11 Kreise mit je vier Außenkanten, einer Brücke und einer Sehne mit Gesamtgewicht 58,

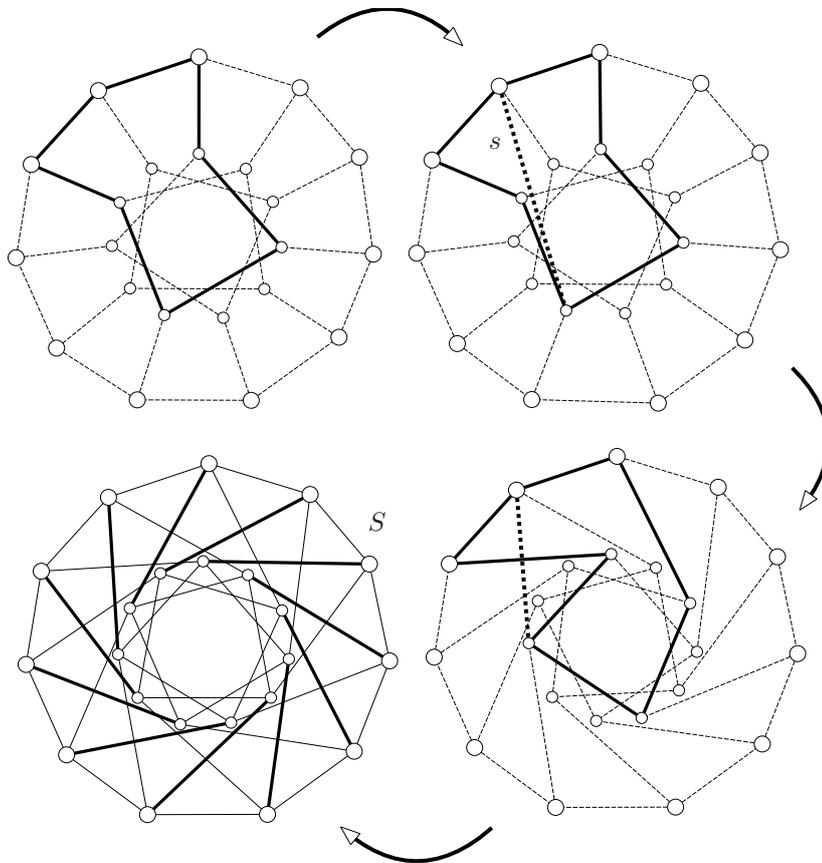


Abbildung 8.2: Die Konstruktion des Graphen D aus dem verallgemeinerten Petersen-Graphen $P_{11,3}$, die Lage der Sehne s eines minimalen Kreises des Tupels $(3, 2)$ und der komplette Sehnen-Satz S .

- die 11 Kreise mit je drei Außenkanten, zwei Brücken und einer Innenkante mit Gesamtgewicht 58 und
- die 11 Kreise mit je drei Außenkanten, zwei Sehnen und einer Innenkante mit Gesamtgewicht 58.

All diese Kreise gehören der Horton-Familie an und werden daher in einer Reihenfolge ihrer nicht-absteigenden Gewichte vom Algorithmus 8 betrachtet. Die 22 Kreise mit einem jeweiligen Gewicht von höchstens 53 bilden eine unimodulare Menge und werden daher vom greedy-Algorithmus gewählt. Diese unimodulare Kreismenge sei im Weiteren mit I und der zuletzt darin aufgenommene Kreis vom Gewicht 53 mit C bezeichnet. Die Wahl des Kreises C wird sich als falsch herausstellen, das heißt, dass $I \setminus C$ nicht aber I zu einer MICB ergänzt werden kann.

Nach C weisen nun der Innenkreis C_1 und der Außenkreis C_2 das nächsthöhere Gewicht auf. Da $I \cup C_1$ die 3-te Innenbasis des Graphen D bildet, hat diese die Determinante 2, ist also nicht unimodular. Die Menge $I \cup C_2$ bildet hingegen die 2-te Außenbasis von D , hat die Determinante 3 und ist somit auch

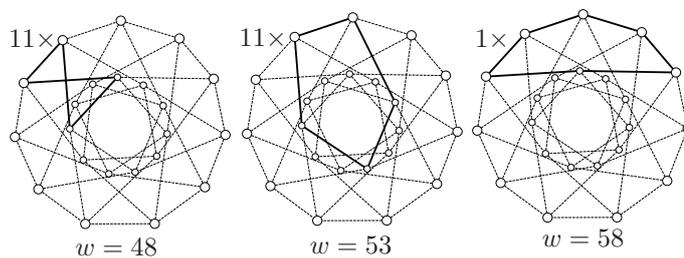


Abbildung 8.3: Eine von Algorithmus 8 gefundene ganzzahlige Kreisbasis von (D, w) mit dem Gesamtgewicht 2280.

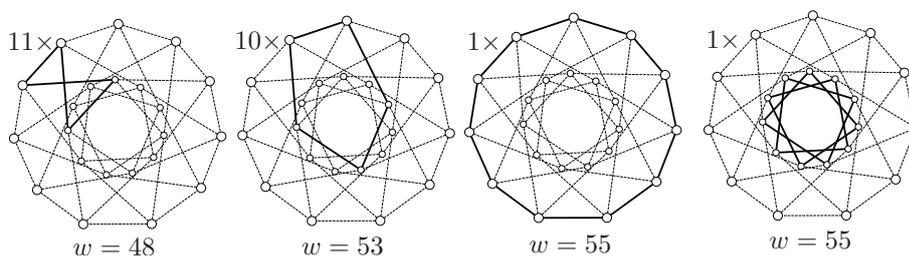


Abbildung 8.4: Die eindeutige minimale ganzzahlige Kreisbasis von (D, w) mit dem Gesamtgewicht 2279.

nicht unimodular. Der nächste Kreis, der für den Algorithmus nun in Frage kommt, hat ein Gewicht von 58 und sei mit C' bezeichnet. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \det(I \cup C') &= 1 & \det((I \setminus C) \cup \{C_1, C_2\}) &= 1 \\ w(I \cup C') &= 2280 & w((I \setminus C) \cup \{C_1, C_2\}) &= 2279 \end{aligned}$$

und somit ist die vom greedy-Algorithmus berechnete Basis $I \cup C'$ (Abbildung 8.3) tatsächlich schwerer als die minimale ganzzahlige Basis $(I \setminus C) \cup \{C_1, C_2\}$ dieser Instanz (Abbildung 8.4).

Der Graph D des obigen Beispiels 8.4.1 beinhaltet die zwei betrachteten ganzzahligen Kreisbasen

$$B_1 = I \cup C' \quad \text{und} \quad B_2 = (I \setminus C) \cup \{C_1, C_2\}.$$

Die Bogengewichtung wurde so gesetzt, dass B_1 und B_2 zu den kleinsten ganzzahligen Kreisbasen gehören und außerdem $w(B_1) > w(B_2)$ erfüllt ist. Die dazu benutzten Gewichte können nun etwas verändert werden, dass sich die Gewichte von B_1 und B_2 annähern und schließlich gleich sind, ohne dass eine weitere ganzzahlige Kreisbasis ein geringeres Gewicht als diese Basen erhält. Dann sind sowohl B_1 als auch B_2 minimale ganzzahlige Kreisbasen mit der Besonderheit, dass sich die Folge der Basiskreis-Gewichte unterscheidet. Dies belegt dann, dass eine Entsprechung des Korollars 4.2.2 für Kreisbasen über \mathbb{Z} nicht gilt. Dort wird bewiesen, dass die Folge der Gewichte einer jeden minimalen Kreisbasis über einem Körper \mathbb{K} eindeutig ist und die folgende Instanz belegt, dass zwei minimale ganzzahlige Kreisbasen sich in dieser Gewichtsfolge unterscheiden können.

Beispiel 8.4.2 (Eine Instanz (D, w') mit zwei minimalen ganzzahligen Kreisbasen mit unterschiedlicher Gewichtsfolge). Sei D erneut der Graph aus dem Beispiel 8.4.1 und w' eine neue Bogengewichtung mit

$$w'_A = 4 \quad w'_B = 15 \quad w'_S = 15 \quad w'_I = 4.$$

Dann stellen die oben erwähnten Kreisbasen

$$B_1 = I \cup C' \quad \text{und} \quad B_2 = (I \setminus C) \cup \{C_1, C_2\}$$

zwei minimale ganzzahlige Kreisbasen von (D, w') dar. Für die nicht-absteigend sortierten Folgen w_1 und w_2 der Basiskreis-Gewichte von B_1 beziehungsweise B_2 gilt dann:

$$w_1 = (\underbrace{38, \dots, 38}_{11 \times}, \underbrace{42, \dots, 42}_{11 \times}, 46)$$

$$w_2 = (\underbrace{38, \dots, 38}_{11 \times}, \underbrace{42, \dots, 42}_{10 \times}, 44, 44)$$

Kapitel 9

Eine Anpassung des Algorithmus von De Pina

9.1 Zeugen

Zur Verifikation der \mathbb{K} -linearen Unabhängigkeit eines Kreises C mit einer Menge X bereits gewählter Kreise wurden im Abschnitt 5.1 des Kapitels 5 die Zeugen eingeführt. Durch den Übergang auf Kreisbasen über \mathbb{Z} ist man jedoch nun vielmehr an der *Unimodularität* der Vereinigung $X \cup \{C\}$ einer unimodularen Menge X mit einem Kreis C interessiert. Im Abschnitt 7.1 des Kapitels 7 wurde bereits mit Lemma 7.1.10 eine Möglichkeit angegeben die Unimodularität der Menge $X \cup \{C\}$ mit diesen Voraussetzungen zu prüfen. Allerdings muss dazu eine Erweiterung der unimodularen Menge X zu einer quadratischen unimodularen Matrix, das heißt einer Gitterbasis des \mathbb{Z}^d , bekannt sein.

Nach der Proposition 8.2.1 genügt es, sich zum Test der Unimodularität auf die gekürzten Inzidenzvektoren eines Cobaumes einzuschränken. Dann gilt $d = \nu$ und eine Gitterbasis des \mathbb{Z}^ν ist eine ganzzahlige Zirkulationsbasis des Graphen. In diesem Rahmen soll das Lemma 7.1.10 noch einmal wiedergegeben werden.

Lemma 9.1.1. *Sei $X = \{C_1, \dots, C_k\}$ eine unimodulare Kreismenge, $\{Z_{k+1}, \dots, Z_\nu\}$ Zirkulationen, die X zu einer ganzzahligen Zirkulationsbasis ergänzen und C ein weiterer Kreis mit der Darstellung*

$$C = \sum_{i=1}^k \lambda_i C_i + \sum_{i=k+1}^{\nu} \lambda_i Z_i.$$

Dann gilt

$$X \cup \{C\} \text{ unimodular} \iff \gcd(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_\nu) = 1. \quad (9.1.1)$$

Die rechte Seite der Äquivalenz (9.1.1) im Lemma 9.1.1 kann so abgeschwächt werden, dass die neue Bedingung zwar hinreichend aber nicht länger notwendig für die Unimodularität der Menge $X \cup \{C\}$ ist.

Korollar 9.1.2. Sei $X = \{C_1, \dots, C_k\}$ eine unimodulare Kreismenge, $Z = \{Z_{k+1}, \dots, Z_\nu\}$ eine Zirkulationsmenge, die X zu einer ganzzahligen Zirkulationsbasis ergänzt und C ein weiterer Kreis mit der Darstellung

$$C = \sum_{i=1}^k \lambda_i C_i + \sum_{i=k+1}^{\nu} \lambda_i Z_i.$$

Dann gilt

$$X \cup \{C\} \text{ unimodular} \iff \lambda_i = \pm 1 \text{ für ein } i \in \{k+1, \dots, \nu\}.$$

Die Aussage dieses Korollar folgt auch unmittelbar aus Proposition 7.1.8, nach der

$$\det(X \cup Z \setminus \{Z_i\} \cup \{C\}) = |\lambda_i \cdot \det(X \cup Z)| = |\lambda_i| \quad (9.1.2)$$

gilt. Wird demnach nur ein λ -Koeffizient benötigt, um bereits einen größten gemeinsamen Teiler von 1 zu erhalten, so erhält man mit Korollar 9.1.2 eine unimodulare Menge $X \cup \{C\}$ und mit (9.1.2) bereits eine Erweiterung $Z \setminus \{Z_i\}$ dieser Menge zu einer ganzzahligen Zirkulationsbasis. Zur schnellen Bestimmung des Koeffizienten λ_i in der Darstellung eines Kreises durch eine ganzzahlige Basis, wird erneut ein *Zeuge* definiert.

Definition 9.1.3. Sei $Z = \{Z_1, \dots, Z_\nu\}$ eine ganzzahlige Zirkulationsbasis. Der *Zeuge der Zirkulation* Z_i ist die eindeutige Lösung S_i des Gleichungssystems

$$x^\top Z = e_i^\top.$$

Lemma 9.1.4. Sei $Z = \{Z_1, \dots, Z_\nu\}$ eine ganzzahlige Zirkulationsbasis und S_i der *Zeuge der Zirkulation* Z_i . Dann gilt für jede Zirkulation C :

$$S_i^\top C = \pm 1 \iff Z \setminus \{Z_i\} \cup \{C\} \text{ unimodular}$$

Beweis. Sei $C = \sum \lambda_k Z_k$ die Darstellung der Zirkulation C durch die Basis Z . Dann gilt

$$S_i^\top C = S_i^\top \left(\sum \lambda_k Z_k \right) = \sum \lambda_k \cdot S_i^\top Z_k = \lambda_i.$$

Demnach ist genau dann $\lambda_i = \pm 1$, wenn $S_i^\top C = \pm 1$ gilt. \square

9.2 Der Algorithmus

Die Ergebnisse des letzten Abschnittes können nun dazu verwendet werden, den Algorithmus von De Pina an ganzzahlige Kreisbasen anzupassen. Innerhalb des Algorithmus wird eine Menge C gehalten, die anfangs leer ist, und der nach und nach Kreise so hinzugefügt werden, dass die Menge stets unimodular bleibt. Es wird außerdem eine Menge Z von Zirkulationen unterhalten, die stets die Menge C zu einer ganzzahligen Zirkulationsbasis ergänzt. Diese Menge Z wird demnach im gleichen Maße schrumpfen, wie C anwächst.

Der Algorithmus besteht aus ν Iterationen, wobei in jeder Iteration i eine Zirkulation Z_i aus Z gewählt wird, die Menge Z zu verlassen. Dann wird ein kürzester Kreis C_i berechnet, der C so ergänzt, dass nach dem Entfernen von Z_i aus Z und dem Einfügen von C_i in C , die Vereinigungsmenge $C \cup Z$ wieder eine ganzzahlige Zirkulationsbasis ergibt.

Kann ein solcher Kreis C_i in jeder Iteration gefunden werden, so stellt nach ν Iterationen die Menge C eine ganzzahlige Kreisbasis des Graphen dar, während Z die leere Menge ist.

Algorithmus 9 Eine Anpassung des Algorithmus von De Pina – iterative Variante

Input: Ein Paar (D, w) aus einem gerichteten Graphen $D = (V, A)$ und einer Gewichtsfunktion $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Output: Eine ganzzahlige Zirkulationsbasis von D .

- 1: Setze $C = \emptyset$.
 - 2: Bestimme eine beliebige ganzzahlige Zirkulationsbasis Z von D .
 - 3: **for** $i = 1$ bis ν **do**
 - 4: Bestimme die eindeutige Lösung S_i des Gleichungssystems $x^T Z = e_i$.
 - 5: Berechne einen kürzesten Kreis C_i mit $S_i^T C_i = \pm 1$.
 - 6: Setze $C \leftarrow C \cup \{C_i\}$.
 - 7: Setze $Z \leftarrow Z \setminus \{Z_i\}$.
 - 8: **end for**
 - 9: **return** I .
-

Im Abschnitt 5.4 des Kapitels über den Algorithmus von De Pina für Kreisbasen über \mathbb{K} wurde bereits erwähnt, dass die Einschränkung der Kandidatenmenge auf die Kreise zu einem vorab gewählten Zeugen im Falle ganzzahliger Kreisbasen zu Problemen führen kann. Das heißt, dass ein Zeuge unter Umständen so gewählt wird, dass ein kurzer Kreis C zunächst nicht gewählt wird, da er nicht das passende Skalarprodukt mit diesem Zeugen aufweist. Die Wahl des Kreises, der stattdessen in die Basis aufgenommen wird, kann die Zeugen der kommenden Iterationen jedoch so beeinflussen, dass der kurze Kreis C auch später nicht mehr aufgenommen werden kann.

Im Folgenden wird ein solches Beispiel angegeben. Dieser Effekt kann nur bei Instanzen (D, w) auftreten, in denen eine minimale ungerichtete Kreisbasis nicht ganzzahlig ist, denn sind alle minimalen ungerichteten Kreisbasen ganzzahlig, so insbesondere auch die von Algorithmus 3 aus dem Kapitel 5 berechnete. Die Menge I der bereits bestimmten Kreise ist dann stets eine Teilmenge des Endproduktes und somit unimodular. Die Zeugen des *ganzzahligen Algorithmus von De Pina* wären dann in jeder Iteration auch mögliche Zeugen des *ungerichteten Algorithmus von De Pina*. Da im ungerichteten Algorithmus 3 ein Kreis C_i gewählt wird, der I unimodular erweitert, kommt dieser Kreis auch im ganzzahligen Algorithmus 9 in Frage. Beide Algorithmen wählen somit in jeder Iteration den gleichen oder gleichwertige Kreise.

Ist also $w_{OPT}(MUCB) = w_{OPT}(MICB)$, so ist die hier vorgestellte Variante 9 des Algorithmus von De Pina korrekt. Ein Beispiel, in dem Algorithmus 9 suboptimal endet, besteht daher aus einer Instanz (D, w) , deren minimale ganzzahlige Kreisbasen teurer als ihre minimalen ungerichteten Kreisbasen sind.

Beispiel 9.2.1 (Eine Instanz, in der Algorithmus 9 suboptimal endet). *Dieses Beispiel wurde bereits in [15] betrachtet, um die Eigenständigkeit des MICB-Problems gegenüber des MUCB-Problems zu belegen.*

Betrachte den verallgemeinerten PETERSEN-Graphen $P_{11,4}$ aus der Abbildung 9.1. Die Tabelle 9.1 gibt eine Liste der geschlossenen Tupel dieses Graphen

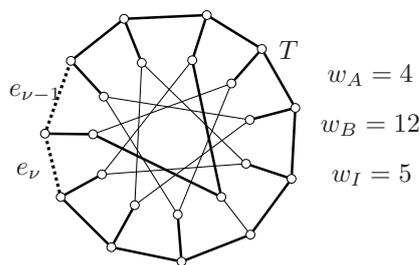


Abbildung 9.1: Der verallgemeinerte PETERSEN-Graph $P_{11,4}$ mit dem Spannbaum T und den Nichtbaumkanten $e_{\nu-1}$ und e_{ν} .

und zeigt, dass $(3, 1)$ ein minimales Tupel ist. Demnach hat die 1-te Außenbasis $B^{(1)}$ des $P_{11,4}$ die Determinante 3 und ist somit zwar ungerichtet aber nicht ganzzahlig. Unter der Gewichtsfunktion

$$w_A = 4 \quad w_B = 12 \quad w_I = 5$$

besteht $B^{(1)}$ aus genau den $\nu = 12$ Kreisen in $(P_{11,4}, w)$ mit einem Gewicht von höchstens 44. Der Außenkreis erhält das Gewicht 44, während die elf minimalen Kreise des Tupels $(3, 1)$ das Gewicht 43 erhalten. Somit bildet $B^{(1)}$ die eindeutige MUCB des Graphen.

Jede MICB entsteht aus $B^{(1)}$ durch den Austausch des Außenkreises gegen einen der geschlossenen Kreise des Tupels $(1, 4)$ vom Gewicht 45.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	11	4	3	1	5	2	2	5	1	3	4	0

Tabelle 9.1: Die geschlossenen Tupel des $P_{11,4}$.

Die ganzzahlige Variante des Algorithmus von De Pina, das heißt Algorithmus 9 beginnt mit der Wahl einer beliebigen ganzzahligen Zirkulationsbasis des Graphen. Dazu kann beispielsweise stets eine Fundamentalebasis gewählt werden, da diese sogar eine ganzzahlige Kreisbasis darstellt.

Sei in diesem Fall die Fundamentalebasis F zum Spannbaum T aus der Abbildung 9.1 gewählt. Sei die Reihenfolge der Basiskreise in F außerdem so gewählt, dass die Fundamentalkreise $F(e_{\nu-1})$ und $F(e_{\nu})$ zu den eingezeichneten Nichtbaumkanten in der vorletzten beziehungsweise letzten Iteration des Algorithmus betrachtet werden.

In den ersten zehn Iterationen können jeweils minimale Kreise des Tupels $(3, 1)$ in die Basis getauscht werden. In der Tat ist einer dieser Kreise bereits anfangs in F enthalten. In vielen Iterationen gibt es mehrere $(3, 1)$ -Kreise, die in die Basis aufgenommen werden können. Sei die Wahl jedoch so gefallen, dass nach zehn vollendeten Durchläufen der FOR-Schleife die Basis in der Abbildung 9.2 entstanden ist.

Die Menge C enthält bereits zehn der elf minimalen Kreise mit dem Tupel $(3, 1)$. Der in der Abbildung eingezeichnete Kreis dieser Sorte sei dabei gerade derjenige, der nicht in C auftaucht. Die erweiternde Menge Z besteht nun noch aus den Fundamentalkreisen der Kanten $e_{\nu-1}$ und e_{ν} . Diese Basis $C \cup Z$ hat zu Beginn der elften Iteration die folgende Basismatrix.

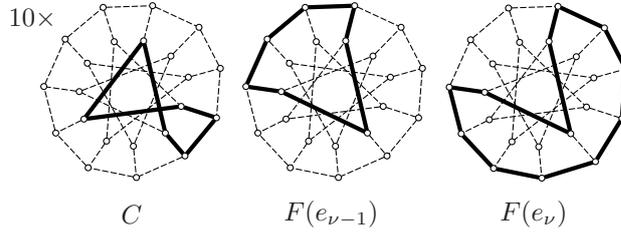


Abbildung 9.2: Die Mengen C und $Z = \{F(e_{\nu-1}), F(e_{\nu})\}$ nach zehn Iterationen des Algorithmus 9.

$$\Gamma(C \cup Z) = \left(\begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & & & & & & & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

Die Menge C kann noch zu jeder minimalen ganzzahligen Kreisbasis durch den letzten $(3, 1)$ -Kreis und einen beliebigen $(1, 4)$ -Kreis ergänzt werden. Der letzte $(3, 1)$ -Kreis C' hat den Inzidenzvektor

$$C' = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$$

während der Zeuge dieser Iteration

$$S_{\nu-1} = (0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, 0, -1, -1, 0)^T$$

ist. Damit gilt $S_{\nu-1}^T C' = 0 \neq \pm 1$ und C' kann nicht für $F(e_{\nu-1})$ in die Basis getauscht werden. Der Außenkreis hat den Inzidenzvektor

$$C_A = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)^T$$

und es gilt $S_{\nu-1}^T C_A = -1$. Damit ist C_A eindeutig (bis auf Vorzeichen) der kürzeste Kreis der Kandidatenmenge zu diesem Zeugen und wird für $F(e_{\nu-1})$ in die Basis aufgenommen.

Da $C \cup \{C_A\}$ jedoch in keiner minimalen ganzzahligen Basis enthalten ist, endet Algorithmus 9, nach der Aufnahme eines $(1, 4)$ -Kreises in der letzten Iteration, mit einer ganzzahligen Basis des Gesamtgewichtes 519. Jede MICB hat jedoch das Gewicht 518.

Der Algorithmus 9 liefert demnach bei ungünstiger Wahl der Startbasis ein suboptimales Ergebnis. Wird in Zeile 2 bereits eine MICB gewählt, so wird diese im Algorithmus nicht mehr verschlechtert und so gibt es auch Startbasen, für

die die ganzzahlige Variante des Algorithmus von De Pina Optimallösungen des MICB-Problems berechnet.

Im Beispiel 9.2.1 stellt die *am Ende berechnete Basis* zwar keine MICB, aber eine günstige Startbasis dar, das heißt, dass eine erneute Prüfung des falsch eingefügten Außenkreises *nach dem Einfügen des (1, 4)-Kreises* in der letzten Iteration, ergibt, dass der letzte (3, 1)-Kreis C' nun für C_A in die Basis getauscht werden kann. Die iterative Variante, wie sie als Algorithmus 9 angegeben ist, lässt sich also zu einer *lokalen Suche* erweitern.

Algorithmus 10 Eine Anpassung des Algorithmus von De Pina – Variante als lokale Suche

Input: Ein Paar (D, w) aus einem gerichteten Graphen $D = (V, A)$ und einer Gewichtsfunktion $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Output: Eine ganzzahlige Zirkulationsbasis von D .

- 1: Bestimme eine beliebige ganzzahlige Zirkulationsbasis Z von D .
 - 2: **for** $i = 1$ bis ν **do**
 - 3: Bestimme die eindeutige Lösung S_i des Gleichungssystems $x^T Z = e_i$.
 - 4: Berechne einen kürzesten Kreis C_i mit $S_i^T C_i = \pm 1$.
 - 5: Setze $Z \leftarrow Z \cup \{C_i\} \setminus \{Z_i\}$.
 - 6: **end for**
 - 7: **if** $w(Z)$ ist innerhalb der FOR-Schleife gesunken **then**
 - 8: Gehe zu Zeile 2.
 - 9: **end if**
 - 10: **return** I .
-

Algorithmus 10 bewegt sich von einer ganzzahligen Zirkulationsbasis zur nächsten jeweils durch den Austausch eines Basiselementes. Die Zeile 4 gewährleistet dabei, dass das Gewicht der Basis dabei nicht steigt. Ist eine Basis gefunden, deren Gewicht nicht durch den einfachen Tausch eines Kreises verbessert werden kann, so wird ist die IF-Bedingung in Zeile 7 nicht erfüllt und die aktuelle Basis wird ausgegeben.

Definition 9.2.2. Eine ganzzahlige Zirkulationsbasis Z einer Instanz (D, w) heißt *lokal optimal*, wenn es nicht möglich ist, durch den Austausch eines Basiselementes eine ganzzahlige Zirkulationsbasis geringeren Gewichtes zu erhalten.

Das Beispiel 8.4.1 des Abschnittes 8.4 zeigt, dass es lokal optimale Basen gibt, die nicht global optimal, das heißt keine minimale ganzzahlige Kreisbasis, sind. Die Abbildung 8.3 dieses Beispiels zeigt eine vom ganzzahligen Horton-Algorithmus berechnete Basis B . Abbildung 8.4 zeigt hingegen die eindeutige MICB B_{OPT} dieser Instanz. Anhand der Abbildungen ist leicht zu sehen, dass nur der Kreis C der Basis B mit Gewicht 58 verbessert werden könnte, da die 22 weiteren Kreise bereits die kürzesten des Graphen sind. Eine Verbesserung der Basis ist zwar durch Tausch des Kreises C gegen den Innenkreis C_I oder den Außenkreis C_A möglich, doch führen beide Vorgänge auf nicht-ganzzahlige Kreisbasen. Die Basis B ist daher lokal-optimal und um sie mittels einzelner Tauschvorgänge in die MICB zu überführen ist es nötig einen Kreis mit Gewicht 53 gegen einen Kreis mit Gewicht 55 zu tauschen, also ein Verschlechterung in Kauf zu nehmen.

Es ist bisher ungeklärt, wieviele Durchgänge der FOR-Schleife in Zeile 2 nötig sind, um eine beliebige ganzzahlige Zirkulationsbasis in eine lokal-optimale Basis zu überführen. Bisher konnte noch kein Beispiel konstruiert werden, in dem die Basis Z nach *zwei Durchgängen* noch nicht lokal optimal ist.

Die Gesamtlaufzeit des Algorithmus 10 hängt zusätzlich von der Realisierung der Suche nach einem kürzesten Kreis C mit $S_i^T C = \pm 1$ in Zeile 4 ab. In den nächsten beiden Abschnitten wird jeweils ein Ansatz für dieses Problem diskutiert.

9.3 Der Schichtgraph

Der Algorithmus von De Pina zur Bestimmung einer minimalen ungerichteten Kreisbasis, wie er im Kapitel 5 vorgestellt wird, benutzt den *Schichtgraphen* G_S eines Zeugen $S \in GF(2)^{|E|}$ zur Bestimmung eines kürzesten Kreises C mit $S^T C \neq 0$. Ein Skalarprodukt über $GF(2)$ aus zwei Vektoren des $GF(2)^{|E|}$ und kann nur den Wert 0 oder 1 annehmen. Werden Vektoren des $\mathbb{Z}^{|A|}$ auf diesen Vektorraum projiziert, so ist das Skalarprodukt der Projektionen über $GF(2)$ genau dann 1, wenn das Skalarprodukt der beiden ursprünglichen Vektoren über \mathbb{R} *ungerade* ist. Daher kann der Schichtgraph aus dem Abschnitt 5.3 nicht in dieser Form auf den Fall der ganzzahligen Kreisbasen übernommen werden und dies ist auch verständlich, da sich ansonsten die Algorithmen 3 und 9 nicht mehr unterscheiden würden.

Dennoch kann erneut ein Schichtgraph eines Zeugen $S \in \mathbb{Z}^{|A|}$ definiert werden. Ein Zeuge der i -ten Spalte einer quadratischen unimodularen Matrix X ist nach Definition 9.1.3 die i -te Zeile der Inversen zu X und demnach ein ganzzahliger Vektor. Das Skalarprodukt eines gerichteten Kreises C mit einem Zeugen S lässt sich wie folgt berechnen:

$$S^T C = \sum_{a \in A} S(a) \cdot C(a) = \sum_{a \in C^+} S(a) - \sum_{a \in C^-} S(a) \quad (9.3.1)$$

Wird der gerichtete Kreis C entlang seiner Orientierung durchlaufen und werden dabei die S -Werte auf den Vorwärtsbögen aufaddiert, während die S -Werte der Rückwärtsbögen abgezogen werden, so stellt das Ergebnis nach (9.3.1) gerade den Wert des Skalarproduktes $S^T C$ dar.

Zunächst sei noch erwähnt, dass es genügt, sich in Zeile 4 des Algorithmus 10 auf die Kreise C mit $S^T C = 1$ zu beschränken, denn hat ein Kreis C' ein Skalarprodukt von -1 mit dem Zeugen, so bewirkt eine Umkehrung der Orientierung des Kreises eine Multiplikation von C' und somit auf von $S^T C'$ mit -1 . Der unorientierte Kreis C erhält jedoch das gleiche Gewicht wie C' und erweitert eine Menge genau dann unimodular, wenn C' dies auch bewirkt.

Das Addieren und Subtrahieren der S -Werte beim Durchlaufen eines Kreises, angefangen bei einem beliebigen Knoten v , ergibt in jedem Schritt ein Zwischenergebnis für das Skalarprodukt, wobei nur die Werte bisher benutzten Bögen berücksichtigt werden. Dieses Zwischenergebnis ist eine ganze Zahl und kann als *Level* angesehen werden auf dem sich der aktuelle Knoten befindet. Startet die Traversierung eines Kreises C bei Knoten v auf Level 0 so ist C genau dann ein Kandidat, wenn der zweite Besuch des Knotens v auf Level 1 stattfindet. Da die Knoten zwischendurch durchaus sehr hohe oder sehr tiefe (negative) Level erreichen können, ist der Schichtgraph D_S als *unendlicher Graph* definiert.

Definition 9.3.1. Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Bewertung der Bögen und $S \in \mathbb{Z}^{|A|}$ eine weitere Belegung der Bögen von D mit ganzen Zahlen. Der *Schichtgraph* D_S von D zum Vektor S ist ein unendlicher Graph mit

- $V(D_S) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} V_l$, wobei V_l eine private Kopie der Knotenmenge V ist, und
- $A(D_S) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} A_l$, wobei A_l eine private Kopie der Bogenmenge A ist, mit

$$(u, v) \in A \quad \longrightarrow \quad (u_l, v_{l+S(u,v)}) \in A_l \quad \text{und} \quad w(u_l, v_{l+S(u,v)}) = w(u, v).$$

Die Abbildung 9.3 zeigt einen beispielhaften Schichtgraphen D_S zu einem gerichteten Graphen D und Zeugen S .

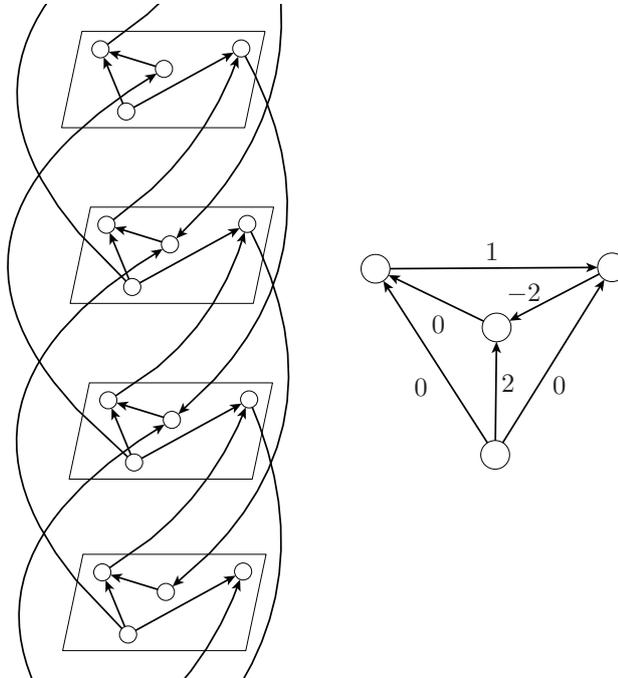


Abbildung 9.3: Ein gerichteter Graph D mit ganzzahligen Bogenbewertungen S und ein Ausschnitt des zugehörigen Schichtgraphen D_S .

Nach den vorherigen Betrachtungen entspricht jeder Kandidatenkreis, das heißt jeder Kreis C mit $S^T C = 1$, für jeden Knoten $v \in V(C)$ einem elementaren Weg von v_0 nach v_1 in D_S .

Lemma 9.3.2. Aus jedem elementaren Weg W von v_0 nach v_1 in D_S kann eine Zirkulation Z in D gewonnen werden, für die gilt:

$$S^T Z = 1 \quad \text{und} \quad w(Z) \leq w(W)$$

Beweis. Die Konstruktion der Zirkulation Z aus dem Weg W erfolgt analog zum Fall der ungerichteten Schichtgraphen in Abschnitt 5.3.

Beim Verfolgen des Weges W von v_0 nach v_1 werden einige Bögen entlang ihrer Orientierung und einige Bögen entgegen ihrer Orientierung durchlaufen. Diese Bögen sollen entsprechend zunächst mit einer 1 (Vorwärtsbogen) beziehungsweise -1 (Rückwärtsbogen) bewertet werden. Alle weiteren Bögen in D_S erhalten den Wert 0.

Werden alle Knoten und Bögen des Schichtgraphen, die bei der Konstruktion aus demselben Knoten beziehungsweise Bogen hervorgegangen sind, miteinander identifiziert, so erhält man den ursprünglichen Graphen D . Bei der Identifizierung einer Bogenmenge $M(a)$ zu einem Bogen a soll $Z(a)$ die Summe der Bogenwerte in $M(a)$, wie sie aus dem Weg W hervorgehen, sein. Für die so erhaltene Bewertung Z gilt

$$\sum_{(v,x) \in A} Z(v,x) = \sum_{(y,v) \in A} Z(y,v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Somit bildet Z eine Zirkulation des Graphen D und die behaupteten Eigenschaften (9.3.2) folgen aus der Definition dieser Bogenwerte und der Bögen des Schichtgraphen. \square

Mit Hilfe der Aussage des Lemmas 9.3.2 kann nun die Berechnung einer *kurzesten Zirkulation* Z mit $S^T Z = 1$ auf die Berechnung eines kürzesten (v_0, v_1) -Weges im Schichtgraphen zurückgeführt werden. Der Schichtgraph ist unendlich groß und kann daher weder Teil der Eingabe sein, noch innerhalb des Algorithmus explizit erstellt werden. Die Knoten und Bögen des Schichtgraphen sind jedoch durch den Graphen D und den Zeugen S bereits eindeutig bestimmt und können so bei Bedarf berechnet werden. Daher kann ein kürzester (v_0, v_1) -Weg in D_S durch eine Modifikation des Dijkstra-Algorithmus gefunden werden, indem ein Bogen des Schichtgraphen erst dann erzeugt wird, wenn ein inzidenter Knoten gescannt werden soll.

Algorithmus 11 Eine mögliche Subroutine des Algorithmus 10

Input: Ein Paar (D, w) aus einem gerichteten Graphen $D = (V, A)$ und einer Gewichtsfunktion $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, sowie ein Zeuge $S \in \mathbb{Z}^{|A|}$.

Output: Eine Zirkulation Z mit $S^T Z = 1$.

- 1: Bestimme für jeden Knoten $v \in V$ einen kürzesten (v_0, v_1) -Weg in D_S .
 - 2: Berechne die Zirkulation Z aus einem kürzesten dieser Wege.
 - 3: **return** Z .
-

Das folgende Beispiel liefert einen Beleg dafür, dass der Algorithmus 11 unter Umständen keine *kürzeste* Zirkulation mit den gegebenen Anforderungen berechnet.

Beispiel 9.3.3 (Eine Instanz (D, w, S) , für die Algorithmus 11 suboptimal endet). *Betrachte den Umschlag-Graphen D aus dem Beispiel 6.1.3 mit dem Spannbaum T und der Gewichtung w aus der Abbildung 9.4. Sei B die Zirkulationsbasis zur Basismatrix $\Gamma(B)$ und S die erste Zeile der Inversen $\Gamma(B)^{-1}$.*

$$\Gamma(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Gamma(B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

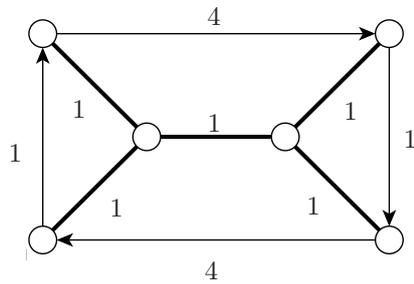


Abbildung 9.4: Der Umschlag-Graph D mit der Bogenbewertung w und dem dick eingezeichneten Spannbaum T .

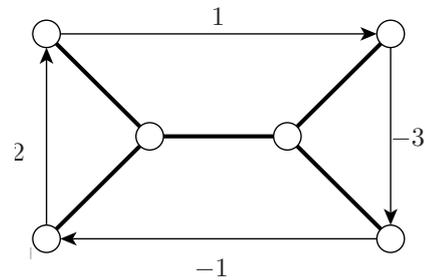


Abbildung 9.5: Die Bogenbewertung S – die Bögen von T erhalten die Bewertung 0.

Die Abbildung 9.5 zeigt die S -Werte der Bögen von D . Die kürzeste Zirkulation Z mit $S^T Z = 1$ ist in Abbildung 9.6 links dargestellt und hat das Gewicht $w(Z) = 6$. Da Z allerdings unzusammenhängend ist, benutzt jeder zugehörige elementare Weg in D_S noch mindestens einen weiteren Bogen und diesen mindestens doppelt. Damit erhält jeder Weg in D_S , dessen Projektion auf D die Zirkulation Z ergibt, ein Gewicht von mindestens 8. Jeder kürzeste (v_0, v_1) -Weg im Schichtgraphen hat allerdings das Gewicht 7 und gehört zu einem der Kreise C auf der rechten Seite der Abbildung 9.6.

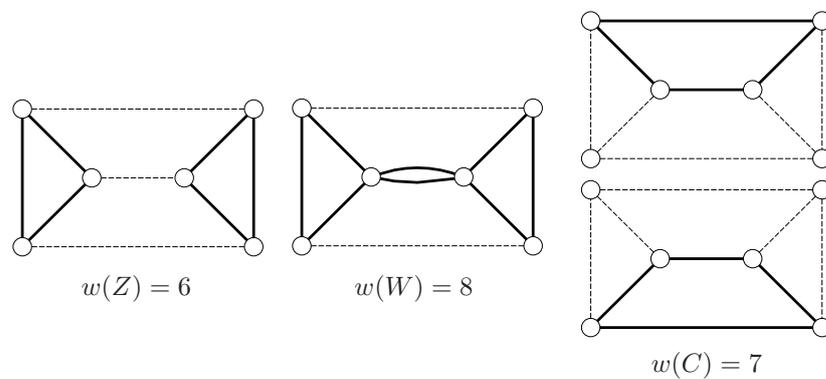


Abbildung 9.6: Die kürzeste passende Zirkulation Z , die Projektion des kürzesten zugehörigen Weges W und die zweit-kürzesten passenden Zirkulationen C .

Die im Beispiel 9.3.3 betrachtete Zirkulationsbasis B beinhaltet eine nicht-elementare Zirkulation, da es bisher nicht gelungen ist ein ähnliches Beispiel mit einem Zeugen einer ganzzahligen Kreisbasis zu konstruieren.

9.4 Das ganzzahlige Programm

Dieser Abschnitt realisiert die Bestimmung einer kürzesten Zirkulation Z mit $S^T Z = 1$ zu einem gegebenen Zeugen S mit einem ganzzahligen Programm und diskutiert dessen Berechnungsaspekte.

Eine Zirkulation ist eine ganzzahlige Belegung der Bögen des Graphen, so dass gilt:

$$\sum_{(v,x) \in A} Z(v,x) = \sum_{(y,v) \in A} Z(y,v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (9.4.1)$$

Ist M die *Knoten-Bogen-Inzidenzmatrix* des Graphen $D = (V, A)$, das heißt $M = (m_{va}) \in \mathbb{Z}^{|V| \times |A|}$ mit

$$m_{va} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = (v,x) \text{ für ein } x \in V \\ -1 & \text{falls } a = (x,v) \text{ für ein } x \in V, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist (9.4.1) äquivalent zu

$$M \cdot Z = 0 \in \mathbb{Z}^{|V|}. \quad (9.4.2)$$

Die gesuchte Zirkulation soll neben (9.4.2) die lineare Bedingung $S^T Z = 1$ erfüllen. Damit ist eine Zirkulation Z genau dann ein Kandidat in Zeile 4 des Algorithmus 10, wenn eine Z zulässige Lösung des folgenden Satzes linearer Restriktionen mit Ganzzahligkeitsforderungen darstellt.

$$\begin{aligned} M \cdot Z &= 0 \\ S^T Z &= 1 \\ Z &\in \mathbb{Z}^{|A|} \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

Das Gewicht einer Zirkulation berechnet sich als

$$w(Z) = \sum_{a \in A} w_a |Z(a)|. \quad (9.4.4)$$

Da die Zielfunktion in (9.4.4) nicht linear in Z ist, werden die Bedingungen (9.4.3) durch das Einfügen der Zielfunktion $\min w(Z)$ nicht zu einem ganzzahligen Programm ergänzt. Deshalb wird die ganzzahlige Variable $Z(a)$ eines Bogen durch zwei nicht-negative ganzzahlige Variablen $Z^+(a)$ und $Z^-(a)$ ersetzt, die den positiven Anteil beziehungsweise den negativen Anteil von $Z(a)$ bestimmen, das heißt

$$Z(a) = Z^+(a) - Z^-(a).$$

Mit dieser Definition stellt sich der Betrag von $Z(a)$ als Summe $Z^+(a) + Z^-(a)$ dar, falls einer der beiden Werte null ist. Die Zielfunktion (9.4.4) wird dann durch

$$w(Z) = \sum_{a \in A} w_a (Z^+(a) + Z^-(a)) \quad (9.4.5)$$

ersetzt und da (9.4.5) nun eine Minimierung mit nicht-negativen Koeffizienten bildet, gibt es auch eine Optimallösung, in der nur der positive oder nur der negative Anteil jeder Variable $Z(a)$ ungleich null ist.

Durch die Substitution $Z = Z^+ - Z^-$ in den Bedingungen (9.4.3) ergibt sich nun ein ganzzahliges Programm.

$$\begin{aligned}
\min \quad & w^\top (Z^+ + Z^-) \\
\text{s.t.} \quad & M \cdot (Z^+ - Z^-) = 0 \\
& S^\top (Z^+ - Z^-) = 1 \\
& Z^+, Z^- \geq 0 \\
& Z^+, Z^- \in \mathbb{Z}^{|A|}
\end{aligned} \tag{9.4.6}$$

Jede Optimallösung (Z_{OPT}^+, Z_{OPT}^-) von (9.4.6) kann durch die Rücksubstitution $Z_{OPT} = Z_{OPT}^+ - Z_{OPT}^-$ in eine kürzeste Zirkulation des Graphen mit den geforderten Eigenschaften überführt werden und so stellt dieses ganzzahlige Programm eine weitere mögliche Subroutine für die Zeile 4 des Algorithmus 10 dar. Da selbst das Lösen ganzzahliger Programme mit wenigen Nebenbedingungen im Allgemeinen jedoch \mathcal{NP} -vollständig ist, muss das aufgestellte IP genauer untersucht werden.

Die *LP-Relaxierung* des ganzzahligen Programms (9.4.6), sowie die *Langrange-Relaxierung* der Bedingung $S^\top Z = 1$, ergeben für das Ausgangsproblem unbrauchbare Lösungen.

Um unter Umständen Flussalgorithmen auf dieses Problem anwenden zu können, kann (9.4.6) auf eine weitere Weise interpretiert werden. Werden die Variablen in Z^+ und Z^- zu einem Vektor $Z = (Z^+, Z^-)$ zusammengefasst, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\min \quad & (w, w)^\top Z \\
\text{s.t.} \quad & [M, -M] \cdot Z = 0 \\
& (S, -S)^\top Z = 1 \\
& Z \geq 0 \\
& Z \in \mathbb{Z}^{2|A|}.
\end{aligned} \tag{9.4.7}$$

Die Matrix $[M, -M]$ ist die Knoten-Bogen-Inzidenzmatrix des nicht-einfachen Graphen D' der aus D durch Einfügen aller entgegengesetzten Bögen entsteht, das heißt durch zusätzliches Einfügen des Bogens (v, u) für alle existierenden Bögen (u, v) . Eine nicht-negative ganzzahlige Bogenbewertung Z mit $[M, -M] \cdot Z = 0$ entspricht dann einer Zirkulation in D' , wobei nun eine Zirkulation ein quellen- und senkenfreier ganzzahliger *Fluss* des Graphen ist.

Erhält jeder neu eingefügte Bogen (v, u) das Gewicht des Bogens (u, v) aus dem er entstanden ist, so stellt der Zielfunktionswert $(w, w)^\top Z$ in (9.4.7) das Gewicht des Flusses Z in (D', w') dar. Erhält des Weiteren jeder neu eingefügte Bogen (v, u) gerade $-S_{uv}$, den *inversen* Wert der ursprünglichen S -Bewertung, so stellt $(S, -S)^\top Z$ das Skalarprodukt dieses neuen Zeugen mit dem Fluss Z dar. Demnach entspricht (9.4.7) dem folgenden Optimierungsproblem.

- Gegeben sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, in dem zu jedem Bogen $(u, v) \in A$ auch sein antiparalleles Pendant (v, u) existiert.
- Sei $w : A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine nichtnegative Bogenbewertung mit $w_{uv} = w_{vu}$.

- Sei $S \in \mathbb{Z}^{|A|}$ ein Zeuge mit $S_{uv} = -S_{vu}$.
- Gesucht ist nun ein ganzzahliger quellen- und senkenfreier Fluss f in D mit $\sum S_a \cdot f(a) = 1$, der $\sum w_a \cdot f(a)$ minimiert.

Dieses Optimierungsproblem ist nun in einer Form, in der eventuell kombinatorische (Fluss-)Algorithmen angewendet werden können. Im Rahmen dieser Arbeit ist dies jedoch nicht gelungen und so bleibt der Komplexitätsstatus von (9.4.6) weiter offen.

9.5 Unterschiede zur Anpassung des Algorithmus von Horton

Mit der im Kapitel 8 vorgestellten Anpassung des Algorithmus von Horton und der im Kapitel 9 vorgestellten Anpassung des Algorithmus von De Pina stehen nun zwei Heuristiken für das MICB- beziehungsweise MIZB-Problem zur Verfügung. Dieser Abschnitt geht auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Algorithmen ein.

Grundlage des Algorithmus 8 – der Anpassung des Algorithmus von Horton – ist der *greedy*-Algorithmus auf dem Unabhängigkeitssystem $U(\mathcal{C}, \mathcal{B}_\mathcal{C})$ der Teilmengen der ganzzahligen Kreisbasen. Die Grundmenge dieses Systems, die Menge aller elementaren Kreise des Graphen, kann unter Umständen exponentiell groß sein. Außerdem ist die Unabhängigkeit einer Menge, das heißt die Erweiterbarkeit, zu einer ganzzahligen Kreisbasis schwer zu überprüfen. Deshalb wurde diese Grundidee im Kapitel 8 an mehreren Stellen relaxiert.

- Der Unabhängigkeitsbegriff wurde durch die Unimodularität ersetzt.
- Die Horton-Familie \mathcal{H} wurde anstelle der Grundmenge \mathcal{C} eingesetzt.

Die Unimodularität einer Kreismenge X ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer ganzzahligen Kreisbasis als Obermenge von X . Im Falle der ganzzahligen Zirkulationsbasen ist diese Bedingung auch hinreichend, jedoch konnte die Hinlängigkeit für nicht-elementare Zirkulationen weder bewiesen noch widerlegt werden. Des Weiteren ist ungeklärt, ob mit der Einschränkung der Grundmenge auf die Horton-Familie minimale ganzzahlige Kreisbasen verloren gehen. Es gibt auch hierfür weder Beleg noch Gegenbeispiel.

Mit diesen Anpassungen entspricht der Algorithmus 8 dem *greedy*-Algorithmus, angewendet auf das UH-System (Definition 8.3.1) und erreicht somit eine polynomiale Laufzeit. Allerdings konnte die Zulässigkeit der berechneten Lösungen im MICB-Problem unter den oben genannten Einschränkungen bisher nicht bewiesen werden.

Der Algorithmus 10 – die Anpassung des Algorithmus von De Pina – ist eine lokale Suche auf der Menge der ganzzahligen Zirkulationsbasen und somit eine Heuristik für das MIZB-Problem. Der Übergang von einer Basis zur nächsten entspricht dabei dem Austausch einer Zirkulation, so dass sich das Gewicht der Basis nicht erhöht. Mit dem im Abschnitt 9.3 vorgestellten Schichtgraphen können solche Zirkulationen gefunden werden, obwohl auf diese Weise zu einem Basiselement nicht stets *die kürzeste*, für den Austausch passende, Zirkulation

gefunden wird. Außerdem konnte bisher nicht bewiesen werden, dass die Laufzeit dieses Verfahrens durch ein Polynom in der Größe des Graphen beschränkt ist. Die Optimallösungen des ganzzahligen Programms des Abschnittes 9.4 entsprechen zwar genau den bestmöglichen Austausch Kandidaten, jedoch konnte auch hier die Laufzeit noch nicht polynomial beschränkt werden.

Wenn es möglich ist einen zulässigen Schritt in der lokalen Suche zu erkennen, bleibt noch die Anzahl der benötigten Schritte bis zum Erreichen eines lokalen Minimas zu bestimmen. Diese ist in allen bisher betrachteten Beispielen durch $2 \cdot \nu$ nach oben beschränkt, jedoch konnte auch hier kein allgemeiner Beweis gefunden werden.

Zusammenfassend werden die beiden Algorithmen in der folgenden Tabelle 9.2 gegenüber gestellt.

	Algorithmus 8	Algorithmus 10
Anpassung des	Algorithmus von Horton	Algorithmus von De Pina
Grundkonzept	<i>greedy</i> -Algorithmus	lokale Suche
behandeltes Problem	MICB-Problem	MIZB-Problem
Zulässigkeit	vermutet	bewiesen
Laufzeit	$\mathcal{O}(\nu^4(\log \mu + 1) + mn(\nu^2 + \eta))$	–
Optimalität	Gegenbeispiel 8.4.1	Gegenbeispiel 8.4.1

Tabelle 9.2: Eine Gegenüberstellung der Anpassung des Algorithmus von Horton und der Anpassung des Algorithmus von De Pina.

Ausblick

In dieser Diplomarbeit wurde das MICB-Problem – das Bestimmen einer minimalen ganzzahligen Kreisbasis – bearbeitet. In diesem Themengebiet gab es zu Beginn der Arbeit viele offenen Fragen, von denen nun einige geklärt werden konnten. Andererseits sind dabei weitere Fragen aufgeworfen worden, die im Umfang dieser Diplomarbeit nicht beantwortet werden konnten.

Die bedeutendsten noch zu beantwortenden Fragen sind im Folgenden aufgelistet:

1. Der Komplexitätsstatus des MICB-Problems ist bisher ungeklärt.
2. Es ist ungeklärt, ob sich MICB- und MIZB-Problem voneinander unterscheiden.
3. Es ist ungeklärt, ob die Horton-Familie stets jede oder zumindest eine MICB birgt.

Diese Fragen wurden bereits in der Einleitung gestellt und es wurde auf die Abschnitte der Arbeit verwiesen, in denen diese Erwähnung finden.

Bei der Analyse der aufgestellten Heuristiken aus Kapitel 8 und 9 sind weitere Fragen offen geblieben:

1. Ist jede unimodulare Kreismenge zu einer ganzzahligen Kreisbasis erweiterbar?
2. Ist das Bestimmen eines zulässigen Schrittes der lokalen Suche polynomial durchführbar?
3. Ist die Anzahl der Schritte in der lokalen Suche durch ein Polynom beschränkt?
4. Können Approximationsgüten für die Algorithmen 8 und 10 bewiesen werden?

Literaturverzeichnis

- [1] G. Cramer. *Introduction a l'analyse de lignes courbes algébriques*. Genf, 1750.
- [2] S. Popescu D. Geller, I. Kra and S. Simanca. On circulant matrices. lecture notes of State University of New York at Stony Brook.
- [3] P.J. Davis. *Circulant Matrices*. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [4] J.C. de Pina. *Applications of shortest path methods*. PhD thesis, University of Amsterdam, The Netherlands, 1995.
- [5] E. Amaldi G. Galbiati. On the approximability of the minimum fundamental cycle basis problem. In *Lectures Notes in Comput. Sci.*, volume 2909, pages 151–164. Springer, Berlin, 2003.
- [6] C. Godsil and G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer, New York, Berlin and Heidelberg, 2000.
- [7] S. Haenelt. Taktfahrplanoptimierung mit unterschiedlichen Taktzeiten. Master's thesis, Technische Universität Berlin, Deutschland, 2004.
- [8] Prof. Dr. Florian Hess. mündliche Korrespondenz, 2008.
- [9] J.D. Horton. A polynomial time algorithm to find the shortest cycle basis of a graph. *SIAM J. Comput.*, 16(2):358–366, 1987.
- [10] T. Kavitha and K. Mehlhorn. Algorithms to compute minimum cycle basis in directed graphs. *Theory of Computing Systems*, 40(4):485–505, 2007.
- [11] G.R. Krichhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik und Chemie*, 72(12):497–508, 1847.
- [12] C. Liebchen. Finding short integral cycle bases for cyclic timetabling, 2003.
- [13] C. Liebchen and L. Peeters. On cyclic timetabling and cycles in graphs. 2002.
- [14] C. Liebchen and R. Rizzi. A greedy approach to compute a minimum cycle basis of a directed graph. *Information Processing Letters*, 94:107–112, 2005.
- [15] C. Liebchen and R. Rizzi. Classes of cycle bases. *Discrete Applied Mathematics*, 155(3):337–355, 2007.

- [16] M. Newman. Integral matrices. In *Pure and applied mathematics A series of monographs and textbooks*. Academic Press, New York and London, 1972.
- [17] R. Kannan P. Domich and L. Trotter. Hermite normal form computation using modulo determinant arithmetic. *Math. Operations Research*, 12:50–59, 1987.
- [18] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, New York, 1986.

Hiermit versichere ich, dass die Diplomarbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst wurde.

Berlin, den 11. April 2008

Torsten Ueckerdt