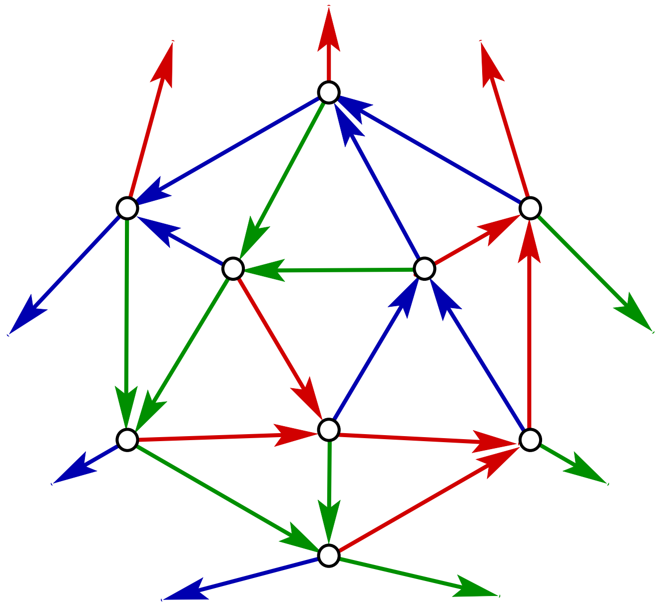
Projektdarstellung

Graphenorientierungen in Ebene und Raum



Fachgebiet und Arbeitsrichtungen

Kombinatorik, topologische Graphentheorie, Ordnungstheorie.

Best-fits aus der Mathematics Subject Classification 2000:

- (05C10) topological graph theory, imbedding,
- (05C20) directed graphs, tournaments,
- (05C62) graph representations,
- (05C85) graph algorithms,
- (06A07) combinatorics of partially ordered sets,
- (52C45) combinatorial complexity of geometric structures,
- (68R10) discrete mathematics in relation to computer science – graph theory,
- (68U05) computer graphics; computational geometry.

0. Zusammenfassung

Orientierungen von Graphen sind ein flexibles Modell mit vielen Anwendungen. Schwerpunkte in diesem Projekt sind Untersuchungen an α-Orientierungen planarer Graphen und von endliche Subordnungen (transitiven Orientierungen) des 3-dimensionalen Raums.

Eine α-Orientierung eines Graphen ist eine Orientierung, bei der jeder Knoten eine durch α vorgegebene Anzahl von ausgehenden Kanten hat. Viele interessante und vielfältig anwendbare Strukturen auf planaren Graphen lassen sich als α-Orientierungen kodieren, z.B. Schnyder Woods, Eulersche Orientierungen und aufspannende Bäume. Der gemeinsame Blickwinkel bietet die Möglichkeit Methode und Resultate zu übertragen.

Erst kürzlich wurde der enge Zusammenhang zwischen Schnyder Woods und 3-dimensionalen orthogonalen Flächen verstanden. Dies eröffnet einen neuen Zugang zu 3-dimensionalen Ordnungen. Ziele im Projekt sind die Charakterisierung 3-dimensionaler outerplanarer Graphen und die Klärung der Erkennungskomplexität von 3-dimensionalen Ordnungen der Höhe 1. Vorgesehen sind auch Untersuchungen der Struktur von 3-dimensionalen Ordnungen ohne Höhenrestriktion.

1. Stand der Forschung

A α-Orientierungen

3-Orientierungen einer planaren Triangulierung, d.h. Orientierungen der inneren Kanten, bei denen jeder innere Knoten Ausgrad 3 hat, stehen in Bijektion zu Schnyder Woods [dFdM01]. Auf den 3-Orientierungen gibt es eine einfache lokale Transformation: Man nimmt einen gerichteten Kreis und dreht die Orientierung aller Kanten des Kreises um. Ist der zugrunde liegende Graph planar eingebettet, dann gibt es positiv und negativ orientierte Kreise. Ein *Kreisflip* reorientiert einen Kreis von negativ nach positiv. Die transitive Hülle der Kreisflips ist eine partielle Ordnung auf der Menge aller 3-Orientierungen, bzw. Schnyder Woods, einer planaren Triangulierung. E. Brehm [Bre00] zeigte in seiner Diplomarbeit, dass diese partielle Ordnung ein distributiver Verband ist.

In [Fel04b] habe ich dieses Resultat stark verallgemeinert:

Satz 1. *Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph und $\alpha : V \to \mathbb{N}$ eine Abbildung. Auf der Menge der Orientierungen von G in denen jeder Knoten V gerade Ausgrad $\alpha(v)$ hat, induzieren die Kreisflips einen distributiven Verband.*

Dieses Ergebnis kann genutzt werden, um eine Verbandsstruktur auf diversen, durch einen planaren Graphen bestimmten, Strukturen zu definieren. Beispiele sind: Eulersche Orientierungen, aufspannende Bäume, f-Faktoren und Schnyder Woods.

Varianten dieses Satzes wurden in verschiedenen Zusammenhängen entdeckt. In der Knotentheorie untersuchten Gilmer und Litherland den Verband der aufspannenden Bäume [GL86]. Im Zusammenhang mit Tilings sind verschiedene Instanzen des Satzes gefunden worden (z.B., [KPW00, Rém04, DMRR04]). Dies liegt daran, dass die von Thurston eingeführten Höhenfunktionen für Tilings im Wesentlichen den Potentialen aus dem Beweis von Satz 1 entsprechen. Direkt auf Orientierungen von Graphen wurden Spezialfälle des Satzes in [dM94], [KPW00] und [LZ03] entwickelt. Hier ist auch eine wichtige Arbeit von Propp [Pro93] zu nennen, in der eine duale Theorie entwickelt wird. Die von Propp betrachteten Orientierungen lassen die „flow-difference around cycles" invariant. Die Theorie von Propp liefert eine Verbandsstruktur auf Klassen von Orientierungen auch für nicht-planare Graphen. Unklar ist derzeit ob es auch Verbindungen zu den Verbänden gibt, die bei den von Hochstättler et al. [HN06, HN07] untersuchten Verallgemeinerungen von Flüssen in Digraphen auf orientierte Matroide auftreten.

Die Verbandsstruktur auf α-Orientierungen hat einige interessante Konsequenzen:

Flip Zusammenhang: Der Begriff *Flip* meint hier den Übergang von einer α-Orientierung zu einer anderen, die im Diagramm des Verbandes über eine Kante erreichbar ist. In den meisten Fällen entspricht dies dem Kreisflip an einem Flächenkreis. Die Verbandsstruktur impliziert unmittelbar, dass je zwei α-Orientierungen durch Flips ineinander übergeführt werden können. Dies ist interessant, weil solche Flips in konkreten Instanzen lokalen Änderungen der Struktur entsprechen. In verschiedenen Spezialfällen wurde der Flipzusammenhang in Einzelarbeiten nachgewiesen, z.B. für Domino Tilings [KK92, DMRR04].

Random Sampling: Die Flips können als lokale Transformationen genutzt werden, um eine Markov Kette auf α-Orientierungen zu definieren. Für Markov Ketten, deren Übergangsgraph von einem distributiven Verband kommt, kann man die „coupling from the past“ Technik von Wilson und Propp verwenden ([PW96, Pro97]) und mit diesem Verfahren *exakt* gleichverteilt aus den α-Orientierungen samplen. In einigen Spezialfällen kann die wichtige Frage, ob diese Markov Kette schnell mischend ist, positiv beantwortet werden. Dies ist zum Beispiel der Fall bei Domino Tilings, [LRS01]. Für einige andere Objekte, die als α-Orientierungen kodierbar sind, konnten schnell mischende Markov Ketten analysiert werden, die aber nicht genau der Flip Kette auf α-Orientierungen entsprechen. Dies gilt für Eulersche Orientierungen [MW96] und aufspannende Bäume [PW98].

In seiner gerade fertiggestellten Diplomarbeit hat A. Hoffmeister [Hof07] die „coupling from the past“ Technik verwendet, um experimentell Ergebnisse zur Mischgeschwindigkeit der Markov Kette auf distributiven Verbänden zu bekommen. Die Diplomarbeit enthält einige interessante Vermutungen über Situationen, in denen die Kette schnell mischend ist.

Vollständiges Erzeugen und Zählen: In diesem Umfeld gibt es bisher nur sporadische Ergebnisse. In [Des03] und [DR03] wird die Verbandsstruktur verwendet, um effizient alle Tilings einer gegebenen Region zu erzeugen. Dieser Ansatz sollte, ähnlich wie das “reverse search” Verfahren von Avis und Fukuda [AF96], auf eine allgemeine α-Orientierungen anwendbar sein. Zum Zählen gibt es ein negatives Ergebnis [Cre06]: Das Zählen Eulerscher Orientierungen eines planaren Graphen ist $\#P$-vollständig. Umgekehrt gibt es klassische, positive Resultate im Fall aufspannender Bäume (das folgt aus dem Matrix-Baum Theorem) und im Fall von Domino Tilings (dies geht auf Kastelyn zurück und verwendet Pfaffsche Orientierungen, vergl. z.B. [Sac90, Pro99]). Interessant ist auch asymptotisches Zählen. In [FZ07a] fragen wir nach der maximalen Anzahl von α-Orientierungen, die ein planarer Graph auf n Knoten haben kann und beweisen einige Schranken für die Wachstumskoeffizienten. In speziellen Fällen sind aus der statistischen Physik [Bax82] sogar die genauen Werte bekannt.

Eindeutiges Minimum: Die Existenz eines eindeutigen Minimums, also einer ausgezeichneten α-Orientierung hat etliche Anwendungen gefunden. Allein der Fall der 3-Orientierungen wird bei Algorithmen zum Zeichnen planarer Graphen [ZH05, BFM07] und beim Zählen planarer Strukturen [BGH03, PS03, FPS05] genutzt.

Aus der Fülle von Einzelergebnissen, die sich in der Sprache der α-Orientierungen fassen lassen, möchte ich noch einige spezielle Resultate hervorheben. Zwar weiß man nicht viel über die Anzahl der 3-Orientierungen einer gegebenen Triangulierung. Für die Gesamtzahl aller 3-Orientierungen von Triangulierungen auf n Knoten aber hat Bonichon [Bon02] eine einfache Formel angegeben. Der Beweis verwendet eine Bijektion auf Paare nichtkreuzender Dyck-Pfade und das Lemma von Gessel-Viennot. Eine neue verfeinerte Version der Bijektion wird in [BB06] vorgestellt. Ein ähnliches Phänomen gibt es bei 2-Orientierungen von Quadrangulierungen. Auch hier kann eine Bijektion auf nichtkreuzende Pfade angegeben werden [DG98]. Die Gesamtzahl der 2-Orientierungen von Quadrangulierungen mit n Knoten ist die n-te Baxterzahl. Tatsächlich haben wir über dieses Phänomen hinaus eine ganze Reihe von Analogien zwischen 2- und 3-Orientierungen gefunden [FHKO07].

Derzeit arbeitet K. Knauer an einer Diplomarbeit, in der es um Verallgemeinerungen von Satz 1 geht. Ansätze sind hier, die Planarität des zugrunde liegenden Graphen durch die Einbettung in eine geschlossene Mannigfaltigkeit zu ersetzen oder von gerichteten Graphen zu orientierten Matroiden weiterzugehen. In beiden Fällen hat Herr Knauer Bedingungen identifiziert, die für eine analoge Theorie notwendig sind und einige vielversprechende Teilresultate erzielt.

B Dimension von Ordnungen und Graphen

Dimension ist ein wichtiger und intensiv untersuchter Parameter für Ordnungen. Die kanonische Referenz ist Trotters Buch [Tro92]. Es ist bekannt, Yannakakis [Yan82], dass die Erkennung von Ordnungen der Dimension k für alle $k \geq 3$ NP-schwer ist. Dies gilt auch für Ordnungen der Höhe 1 und $k \geq 4$. Auf der anderen Seite ist die Erkennung von Ordnungen der Dimension 2 polynomiell. Einer der interessanten Aspekt von Schnyders Theorie (siehe [Sch89]) ist, dass er für eine nichttriviale Klasse von Ordnungen der Höhe 1 einen effizienten Entscheidungsalgorithmus für das Dimension 3 Problem liefert. Die Erkennungskomplexität von Ordnungen der Höhe 1 und Dimension 3 ist weiterhin offen. Mehr aus der graphentheoretischen Perspektive wirft Schnyders Resultat eine andere Frage auf:

- Lassen sich neben planaren Graphen noch andere Graphenklassen mittels Ordnungsdimension charakterisieren?

Schon Schnyder [Sch89] hatte als Korollar zu seinem Dimensionssatz gezeigt, dass die Dimension des Seitenverbands eines simplizialen Polytops 4 ist, aber auf 3 fällt, wenn man eine Facette löscht. Dies wurde von Brightwell und Trotter aufgegriffen [BT93]:

Satz 2. *Die Inklusionsordnung der Ecken und Flächen eines 3-Polytops hat Ordnungsdimension 4. Auch die Ordnungsdimension des vollen Seitenverbandes eines 3-Polytops ist 4. Löscht man aus dem Seitenverband eine Fläche, dann fällt die Dimension auf 3.*

Die Beweismethode basierte auf “normal families of paths”, einer Struktur, die eng an Schnyder Woods angelehnt ist. Der Originalbeweis war allerdings sehr kompliziert. Neuere Erkenntnisse haben zu immer einfacheren Beweisen des Satzes geführt.

In [Fel01a] habe ich verallgemeinerte Schnyder Woods für 3-zusammenhängende planare Graphen eingeführt. Dies erlaubte eine deutlich verkürzte und übersichtlichere Entwicklung der Beweisidee aus [BT93].

Motiviert durch algebraische Fragen untersuchte Miller [Mil02] orthogonale Flächen. Er beobachtete einen engen Zusammenhang zwischen eingehängten, nicht-degenerierten orthogonalen Flächen in $\mathbb{R}^3$ und Schnyder Woods auf 3-zusammenhängenden planaren Graphen. Tatsächlich induziert jede solche Fläche einen Schnyder Wood und jeder Schnyder Wood wird von so einer Fläche induziert, siehe z.B. [FK06]. Miller interessierte sich speziell für starre orthogonale Flächen. Er beobachtete, dass die Existenz einer starren Fläche für jeden 3-zusammenhängenden planaren Graphen eine stärkere Variante von Satz 2 impliziert. Miller vermutete, dass jeder Schnyder Wood von einer starren orthogonalen Fläche induziert wird. In [Fel03] konnte ich diese Vermutung beweisen.

Die Kombination der auf orthogonale Flächen basierenden Intuition mit einigen in [BFM07] entwickelten Transformationen von Schnyder Woods führte in [FZ07b] zu dem bislang elegantesten Beweis von Satz 2.

Ich erwarte, dass das seit 25 Jahren offene Problem, die Erkennungskomplexität von Ordnungen der Dimension 3 und Höhe 1 zu bestimmen, auch durch einen geometrisierenden Zugang beantwortet werden kann. Vermutlich ist die Erkennung NP-vollständig. Eine Reduktion könnte eine planare 3-Sat Instanz auf die Enthaltensrelation (containment) von homothetischen Dreiecken abbilden. Eine Reduktion auf die Durchschnittsrelation (intersection) wurde unlängst von Kaufman et al. in [KKLS06] vorgestellt.

Satz 2 wurde von Brightwell und Trotter [BT97] weiterverwendet in ihrem Beweis von Dimensionsschranken für allgemeine planar eingebettete Multigraphen:

Satz 3. *Die Inklusionsordnung der Knoten, Kanten und Flächen eines planaren Multigraphen hat höchstens Ordnungsdimension 4.*

Offen blieb die Charakterisierung jener planaren Multigraphen deren Inklusionsordnung der Knoten, Kanten und Flächen nur Dimension 3 hat. Gemeinsam mit J. Nilsson habe ich kürzlich an dieser Frage gearbeitet [FN07]. Wir konnten zeigen, dass alle solchen Graphen outerplanar sind und, dass es auch outerplanare Graphen gibt, die Ordnungsdimension 4 erzwingen. Eine vollständige Klassifikation steht noch aus.

Zur Dimension der Inklusionsordnungen von allgemeinen Graphen gibt es auch eine Reihe von Arbeiten. Die Dimension vollständiger Graphen wurde zuerst von Spencer [Spe72] untersucht. Er bewies, dass die Dimension dieser Graphen unbeschränkt ist. Trotter [Tro77] fand exakte Werte für die Dimension von K_n für $n \leq 25$. Hoşten und Morris [HM99] erzielten einen Durchbruch, indem sie eine Verbindung mit gewissen Familien von Antiketten im Boolschen Verband herstellten.

Mit Agnarsson und Trotter untersuchten wir in [AFT99] die maximale Kantenzahl $\beta(d, n)$, die ein Graph der Dimension d mit n Knoten haben kann. In [FT05] betrachteten wir darüber hinaus eine Variante der Dimension bei der gefordert wird, dass die ersten beiden Permutationen π_1 und π_2 der Dimensionsdarstellung $\pi_1, ..\pi_k$ gegenläufig sind, d.h. $\pi_1 = (1, 2, \ldots, n) \longleftrightarrow \pi_2 = (n, n-1, \ldots, 1)$. Sei $\beta_i^{\vee}(d, n)$ die maximale Kantenzahl in diesem Modell. Wir bewiesen:

- $\beta_1^{\vee}(2, n) = \beta_1(2, n) = n - 1$,
- $\beta_1^{\vee}(3, n) = 2n - 3$, maximiert durch outerplanare Graphen.
- $\beta_1(3, n) = 3n - 6$, maximiert durch planare Triangulierungen (Satz von Schnyder).
- $\beta_1^{\vee}(4, n) = \frac{1}{4}n^2 + o(n^2)$.
- $\beta_1(4, n) = \frac{3}{8}n^2 + o(n^2)$.

Die letzten beiden Resultate erfordern den Einsatz von „schwerem Geschütz“ aus der Ramsey Theorie. In einer neueren Arbeit [Fel06] konnte ich $\beta_1^{\vee}(4, n) \leq \frac{1}{4}n^2 + 5n$ zeigen. Das ist eine erhebliche Verbesserung gegenüber der älteren asymptotischen Schranke. Auch hier ist die Verwendung eines geometrischen Modells entscheidend.

In einer kürzlich abgeschlossenen Diplomarbeit hat G. Melamed [Mel06] mit Skeletten für 3-dimensionale Ordnungen experimentiert. Skelette von 2-dimensionalen Ordnungen wurden von Viennot [Vie77, Vie84] eingeführt. Sie ermöglichen einen anschaulichen und eleganten Zugang zur Robinson-Schensted-Knuth Korrespondenz. Auch algorithmisch ist das Konzept nützlich, in [FW99] konnten wir zum Beispiel zeigen wie maximale k-Ketten mithilfe von Skeletten schnell berechnet werden können.

Die Viennotsche Konstruktion von Skeletten kann man mittels orthogonaler Flächen auf Ordnungen beliebiger Dimension übertragen: Gegeben sei eine endliche Teilordnung $X \subset \mathbb{R}^d$. Sei $A_1, .., A_h$ die kanonische Antikettenzerlegung von X. Jede Antikette A_i erzeugt, als Menge von Minima, eine orthogonale Fläche im $\mathbb{R}^d$. Mit $S(A_i)$ bezeichnen wir die Menge der Maxima dieser Fläche und definieren das Skelett $S(X)$ von X als Vereinigung der $S(A_i)$, $i = 1, .., h$. In der Arbeit von G. Melamed wurde gezeigt, dass die Iteration der Skelettkonstruktion schließlich auf die leere Menge führt. Schon im 3-dimensionalen Fall kann aber anders als im 2-dimensionalen $|S(X)| > |X|$ gelten. Es steht noch aus, diese Skelettkonstruktion wirklich auf ihre Nutzbarkeit hin zu untersuchen.

2. Ziele

Die gemeinsame Sichtweise auf verschiedene Strukturen auf planaren Graphen, die durch α-Orientierungen gegeben ist, soll genutzt werden. Dies kann in einem Transfer von Methoden und in der Aufdeckung von Analogien bestehen. Ein erfolgreiches Beispiel in diesem Sinn ist die Entwicklung einer Theorie für 2-Orientierungen, die in weiten Bereichen der für 3-Orientierungen folgt [FHKO07].

Der Verband der α-Orientierungen soll genauer untersucht werden. Fragen sind die Anzahl der Elemente, genauere Eingrenzungen dieser Verbände in der Klasse aller distributiven Verbände und Fragen nach der Mischrate der natürlichen Markov Kette auf diesen Verbänden.

Verallgemeinerungen der Theorie der α-Orientierungen sollen betrachtet werden. Insbesondere die Menge der α-Orientierungen von Graphen, die auf einer 2-Mannigfaltigkeiten eingebettet sind, scheint interessant.

In einer zweiten Zielrichtung geht es um Fragen der Dimension von Ordnungen und Graphen. Speziell interessiert hier der Fall von Dimension 3. Es soll versucht werden, die Erkennungskomplexität von Ordnungen der Dimension 3 und Höhe 1 zu klären. Bei den Graphen ist in Hinblick auf die Sätze von Brightwell und Trotter [BT93, BT97] besonders die Trennlinie zwischen Dimension 3 und 4 bei den Inzidenzordnungen der Knoten, Kanten und Flächen von outerplanaren Multigraphen interessant.

Weitere Untersuchungsrichtungen sind Extremalfragen bezüglich der Anzahl von Kanten von Graphen gegebener Dimension im Sinne von [AFT99] und die Tragfähigkeit des Skelettbegriffs für 3-dimensionale Ordnungen.

Literaturverzeichnis

[AF96] D. Avis and K. Fukuda. Reverse search for enumeration. *Theor. Comput. Sci.*, 65:21–46, 1996.

[AFT99] G. Agnarsson, S. Felsner, and W.T. Trotter. The maximum number of edges in a graph of bounded dimension, with applications to ring theory. *Discrete Mathematics*, 201:5–19, 1999.

[Bax82] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.

[BB06] O. Bernardi and N. Bonichon. Catalan intervals and realizers of triangulations, 2006. `http://www.labri.fr/perso/bernardi/tamari.pdf`.

[BFM07] N. Bonichon, S. Felsner, and M. Mosbah. Convex drawings of 3-connected planar graphs. *Algorithmica*, 47:399–420, 2007.

[BGH03] N. Bonichon, C. Gavoille, and N. Hanusse. An information-theoretic upper bound of planar graphs using triangulation. In *Proceedings STACS '02*, volume 2607 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 499 – 510. Springer-Verlag, 2003.

[Bon02] N. Bonichon. A bijection between realizers of maximal plane graphs and pairs of non-crossing Dyck paths. In *Formal Power Series and Algebraic Combinatoric (FPSAC)*, 2002.

[Bre00] E. Brehm. 3-orientations and Schnyder 3–tree–decompositions. Master's thesis, Freie Universität Berlin, Germany, 2000. `http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Diplomarbeiten/brehm.ps.gz`.

[BT93] G. Brightwell and W. T. Trotter. The order dimension of convex polytopes. *SIAM J. Discrete Math.*, 6(2):230–245, 1993.

[BT97] G. Brightwell and W. T. Trotter. The order dimension of planar maps. *SIAM J. Discrete Math.*, 10(4):515–528, 1997.

[Cre06] P. Creed. Sampling Eulerian orientations of the triangle. In *Proc. ACiD*, 2006.

[Des03] S. Desreux. An algorithm to generate exactly once every tiling with lozenges of a domain. *Theor. Comput. Sci.*, 303:375–408, 2003.

[dFdM01] H. de Fraysseix and P. O. de Mendez. On topological aspects of orientation. *Discrete Math.*, 229(1-3):57–72, 2001.

[dFdMR94] H. de Fraysseix, P. O. de Mendez, and P. Rosenstiehl. On triangle contact graphs. *Comb. Probab. and Comput.*, 3:319–328, 1994.

[DG98] S. Dulucq and O. Guibert. Baxter permutations. *Discrete Math.*, 180:143–156, 1998.

[dM94] P. O. de Mendez. *Orientations bipolaires*. PhD thesis, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris, 1994.

[DMRR04] S. Desreux, M. Matamala, I. Rapaport, and E. Rémila. Domino tilings and related models: Space of configurations of domains with holes. *Theor. Comput. Sci.*, 319:83–101, 2004.

[DR03] S. Desreux and E. Rémila. An optimal algorithm to generate tilings, 2003. `ftp://ftp.ens-lyon.fr/pub/LIP/Rapports/RR/RR2003/RR2003-04.ps.gz`.

[Fel94] S. Felsner. 3-interval irreducible partially ordered sets. *Order*, 11:97–125, 1994.

[Fel01a] S. Felsner. Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes. *Order*, 18:19–37, 2001.

[Fel01b] S. Felsner. The skeleton of a reduced word and a correspondence of Edelman and Greene. *Electronic Journal of Combinatorics*, 8(R10):21p., 2001.

[Fel03] S. Felsner. Geodesic embeddings and planar graphs. *Order*, 20:135–150, 2003.

[Fel04a] S. Felsner. Geometric Graphs and Arrangements. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg Verlag, 2004.

[Fel04b] S. Felsner. Lattice structures from planar graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 11(R15):24p., 2004.

[Fel06] S. Felsner. Empty rectangles and graph dimension, 2006. `arxiv:math.CO/0601767`.

[FHKO07] S. Felsner, C. Huemer, S. Kappes, and D. Orden. Binary labelings for plane quadrangulations and their relatives. Submitted to SIAM J. on Discr. Math., 2007. `arXiv:math.CO/0612021`.

[FHM94] S. Felsner, M. Habib, and R.H. Möhring. On the interplay of interval dimension and dimension. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7:32–40, 1994.

[FK05] S. Felsner and S. Kappes. Orthogonal surfaces. In *Oberwolfach Reports*, volume 2, No. 2 of *Discrete Geometry*, pages 945–946. EMS - Publishing House, 2005.

[FK06] S. Felsner and S. Kappes. Orthogonal surfaces. Submitted to Order, 2006. `arXiv:math.CO/0602063`.

[FN07] S. Felsner and J. Nilsson. On the dimension of outerplanar maps, 2007. in preparation.

[FPS05] É. Fusy, D. Poulalhon, and G. Schaeffer. Dissection and trees, with applications to optimal mesh encoding and random sampling. In *Proceedings SODA*, pages 690–699, 2005.

[FT05] S. Felsner and W. T. Trotter. Posets and planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 49:262–272, 2005.

[Fus05] É. Fusy. Transversal structures on triangulations, with application to straight-line drawing. In *Proceedings of Graph Drawing 2005*, volume 3843 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 177–188. Springer, 2005.

[Fus06] É. Fusy. Straight-line drawing of quadrangulations. In D. Wagner, editor, *Proceedings of Graph Drawing 2006*, volume 4372 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* Springer Verlag, 2006.

[FW99] S. Felsner and L. Wernisch. Maximum k-chains in planar point sets: Combinatorial structure and algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 28:192–209, 1999.

[FZ06] S. Felsner and F. Zickfeld. Schnyder woods and orthogonal surfaces. In D. Wagner, editor, *Proceedings of Graph Drawing 2006*, Lecture Notes in Comput. Sci. Springer Verlag, 2006.

[FZ07a] S. Felsner and F. Zickfeld. On the number of alpha-orientations. Submitted to WG'07, 2007. `arXiv:math.CO/0701771`.

[FZ07b] S. Felsner and F. Zickfeld. Schnyder woods and orthogonal surfaces. Submitted to DCG, 2007. `http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Paper/swaos.ps.gz`.

[GL86] P.M. Gilmer and R.A. Litherland. The duality conjecture in formal knot theory. *Osaka J. Math.*, 23:229–247, 1986.

[HM99] S. Hoşten and W. D. Morris. The order dimension of the complete graph. *Discrete Math.*, 201:133–139, 1999.

[HN06] W. Hochstättler and J. Nešetril. Antisymmetric flows in matroids. *Europ. J. Comb.*, 27:1129–1134, 2006.

[HN07] W. Hochstättler and R. Nickel. The flow lattice of oriented matroids. *Contrib. to Discr. Math.*, 1:68–86, 2007.

[Hof07] A. Hoffmeister. ‚Coupling from the past' in distributiven Verbänden. Master's thesis, TU Berlin, 2007. Adv. S. Felsner.

[KK92] C. Kenyon and R. Kenyon. Tiling a polygon with rectangles. In *33rd Annual Symp. on Found. of Comp. Sci. (FOCS)*, pages 610–619, 1992.

[KKLS06] M. Kaufmann, J. Kratochvíl, K. Lehmann, and A.R. Subramanian. Max-tolerance graphs as intersection graphs: cliques, cycles, and recognition. In *Proceedings SODA*, pages 832–841, 2006.

[KPW00] R. Kenyon, J. Propp, and D.B. Wilson. Trees and matchings. *Electronic J. Comb.*, 7(R25):34p., 2000.

[LRS01] M. Luby, D. Randall, and A. Sinclair. Markov chain algorithms for planar lattice structures. *SIAM J. Comput.*, 31:167–192, 2001.

[LZ03] P.C.B. Lam and H. Zhan. A distributive lattice on the set of perfect matchings of a plane bipartite graph. *Order*, 20:13–29, 2003.

[Mel06] G. Melamed. Skelette von 3-dimensionalen Ordnungen. Master's thesis, TU Berlin, 2006. Adv. S. Felsner.

[Mil02] E. Miller. Planar graphs as minimal resolutions of trivariate monomial ideals. *Documenta Math.*, 7:43–90, 2002.

[MW96] M. Mihail and P. Winkler. On the number of Eulerian orientations of a graph. *Algorithmica*, 16:402–414, 1996.

[Pro93] J. Propp. Lattice structure for orientations of graphs, 1993. `www.math.wisc.edu/~propp/orient.html`.

[Pro97] J. Propp. Generating random elements of finite distributive lattices. *Electr. J. Comb.*, 4(R15):12p., 1997.

[Pro99] J. Propp. Enumeration of matchings: Problems and progress. In *New perspectives in algebraic combinatorics*, pages 255–291. MSRI Publ. 38, 1999.

[PS03] D. Poulalhon and G. Schaeffer. Optimal coding and sampling of triangulations. In *Proceedings ICALP '03*, volume 2719 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 1080–1094. Springer-Verlag, 2003.

[PW96] J. Propp and D.B. Wilson. Exact sampling with coupled markov chains and applications to statistical mechanics. *Rand. Struct. and Alg.*, 9:223–252, 1996.

[PW98] J. Propp and D.B. Wilson. How to get a perfectly random sample from a generic Markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph. *J. Algorithms*, 27:170–217, 1998.

[Rém04] E. Rémila. The lattice structure of the set of domino tilings of a polygon. *Theor. Comput. Sci.*, 322:409–422, 2004.

[Sac90] H. Sachs. Counting perfect matchings in lattice graphs. In *Topics in combinatorics and graph theory. Essays in honour of Gerhard Ringel*, pages 577–584. Physica-Verlag, 1990.

[Sch89] W. Schnyder. Planar graphs and poset dimension. *Order*, 5:323–343, 1989.

[Spe72] J. Spencer. Minimal scrambling sets of simple orders. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 22:349–353, 1972.

[Tro77] W.T. Trotter. Some combinatorial problems for permutations. In *Proc. 8th southeast. Conf. on Comb., Gr. Theory, and Comp.*, Utilitas Math., pages 619–632, 1977.

[Tro92] W. T. Trotter. *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory.* Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences. The Johns Hopkins University Press, 1992.

[Vie77] G. Viennot. Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted. In D. Foata, editor, *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique*, pages 29–58. Lecture Notes in Mathematics 579, 1977.

[Vie84] G. Viennot. Chain and antichain families, grids and Young tableaux. In *Orders: Description and Roles*, pages 409–463. North-Holland Math. Stud. 99, Amsterdam-New York, 1984.

[Wei94] K. Weihe. *Flow and Routing Problems in Planar Graphs.* PhD thesis, TU Berlin, 1994.

[Yan82] M. Yannakakis. The complexity of the partial order dimension problem. *SIAM J. Alg. Discr. Meth.*, 3:351–358, 1982.

[ZH05] H. Zhang and X. He. Canonical ordering trees and their applications in graph drawing. *Discrete Comput. Geom.*, 33:321–344, 2005.