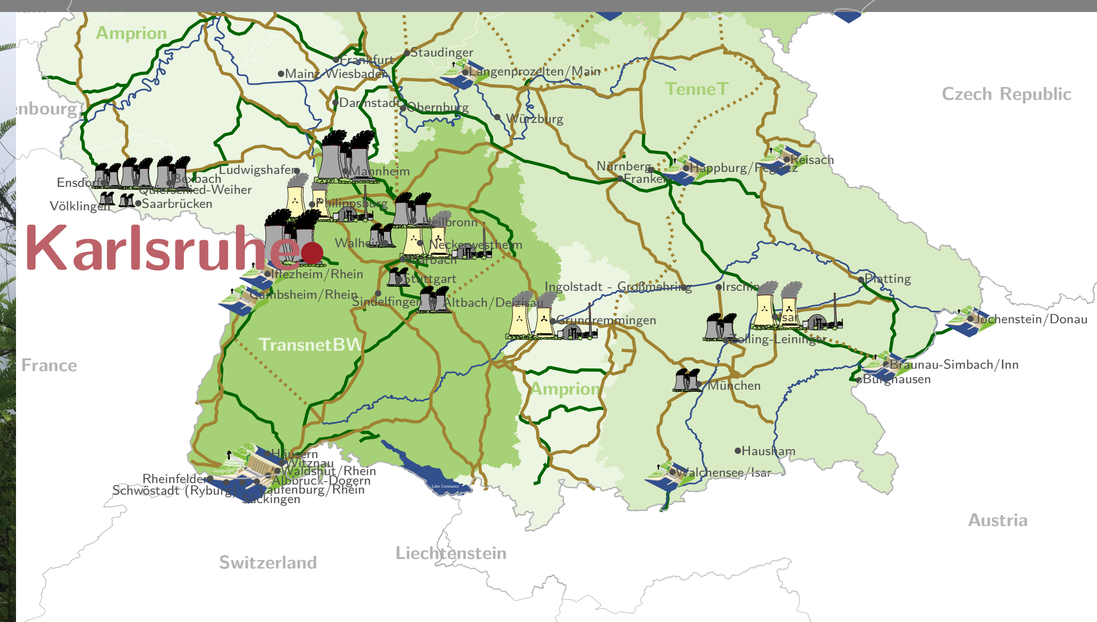
Karlsruher Institut für Technologie

Elektrische Flüsse

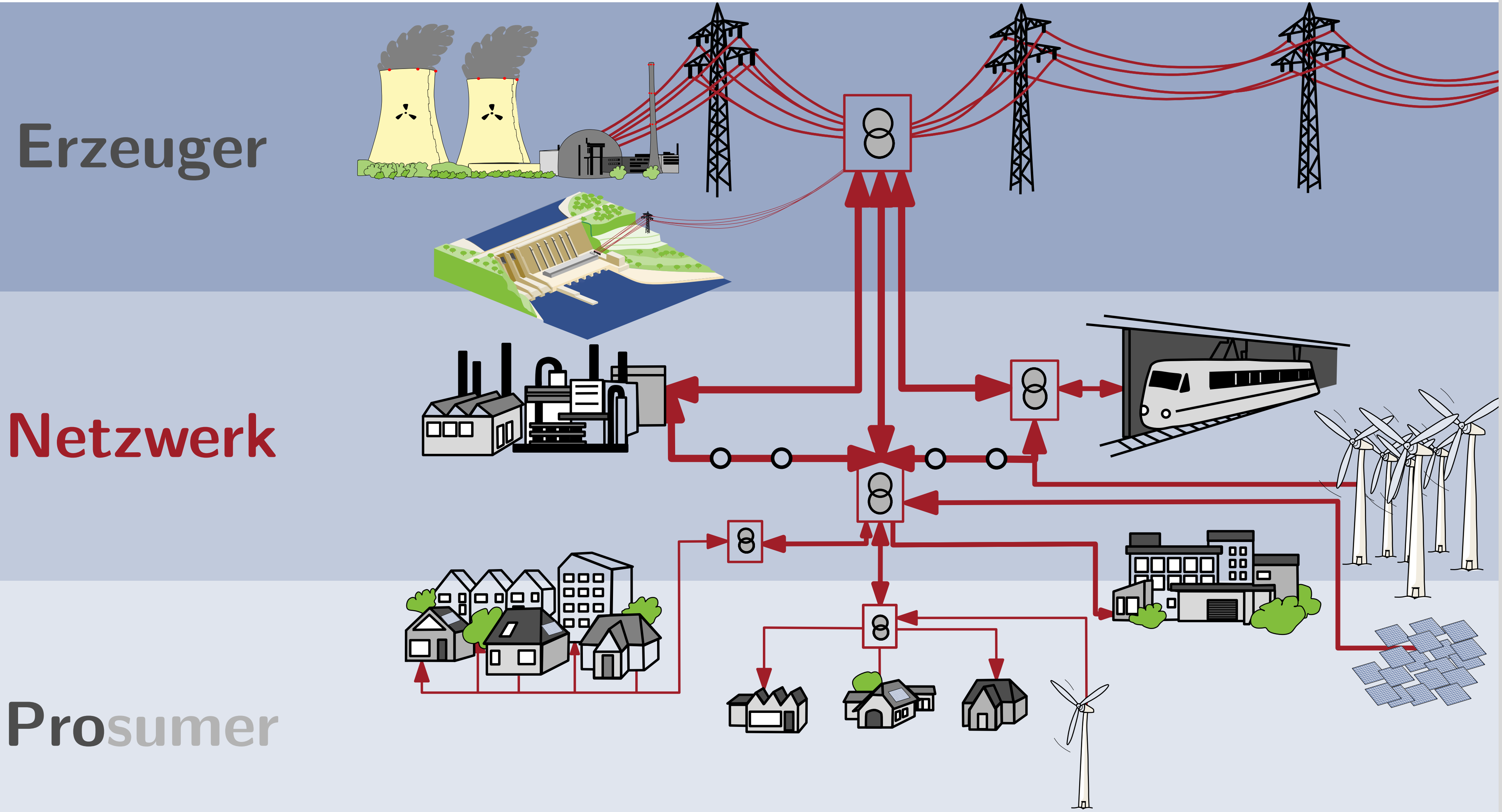
Energieinformatik · Teil 11 (VL1) · 30. Juni, 2020

Franziska Wegner

Institut für Theoretische Informatik · Lehrstuhl Algorithmik



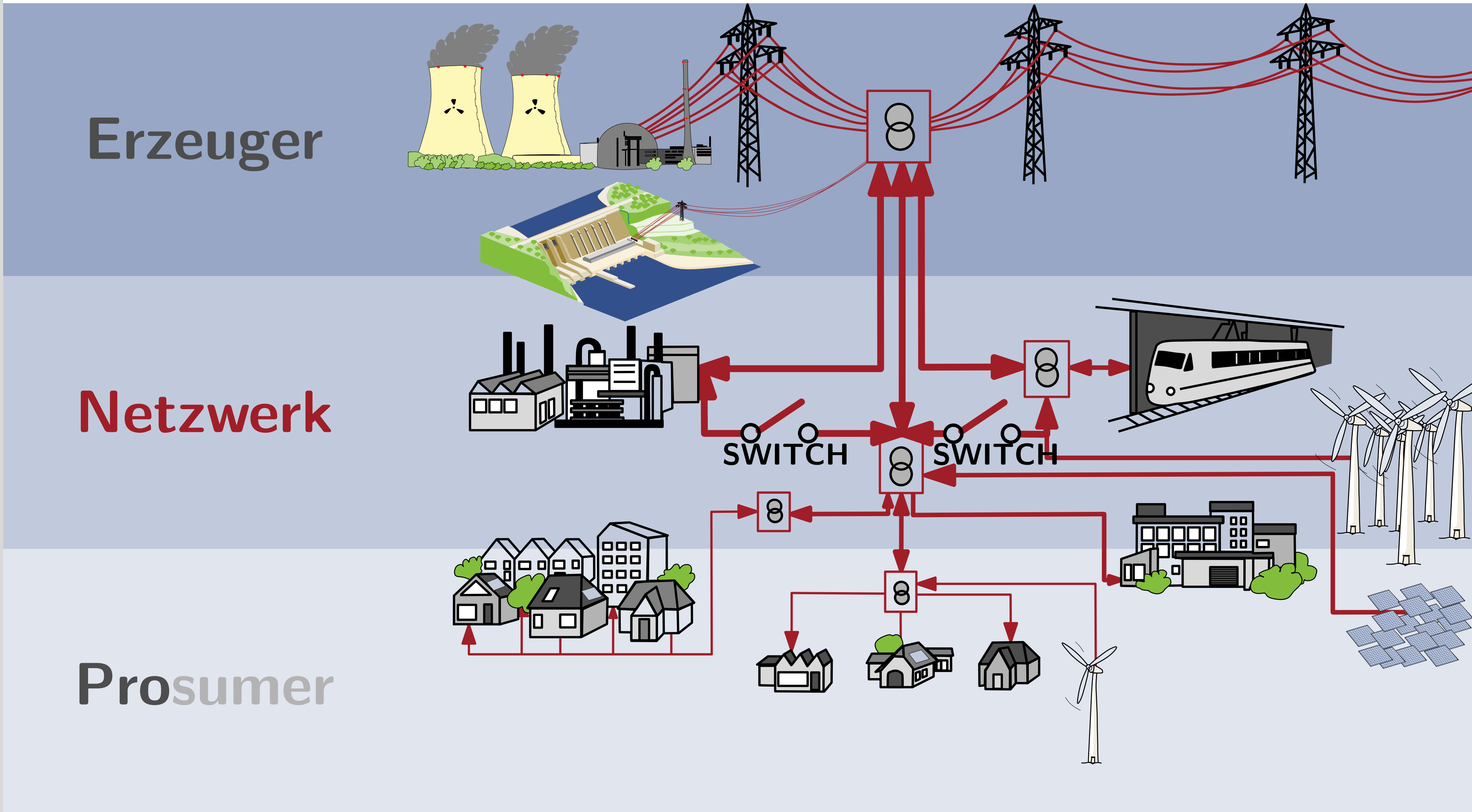
Aktuelle Entwicklungen im Energienetz



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aktuelle Entwicklungen im Energienetz

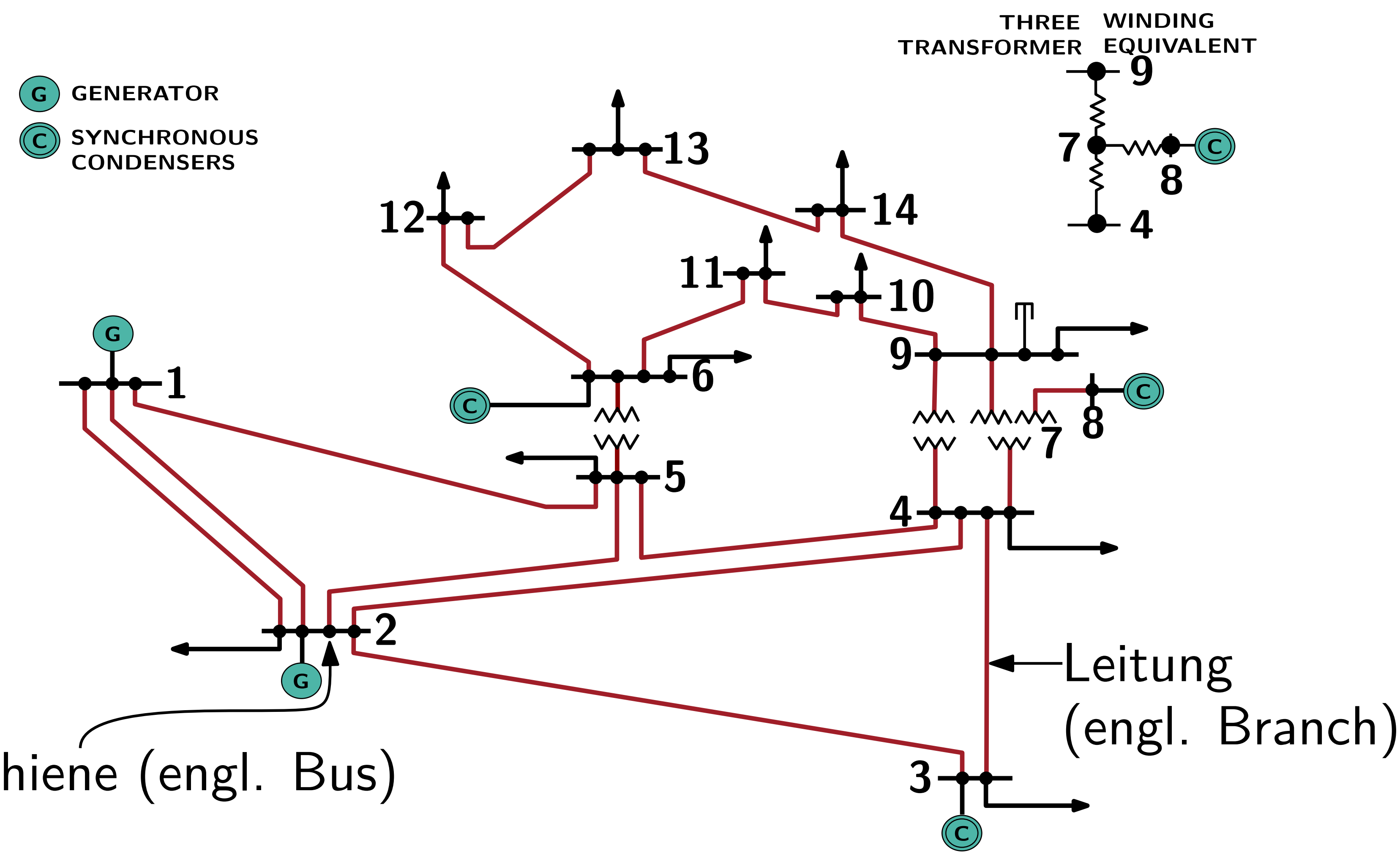
Karlsruher Institut für Technologie



Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

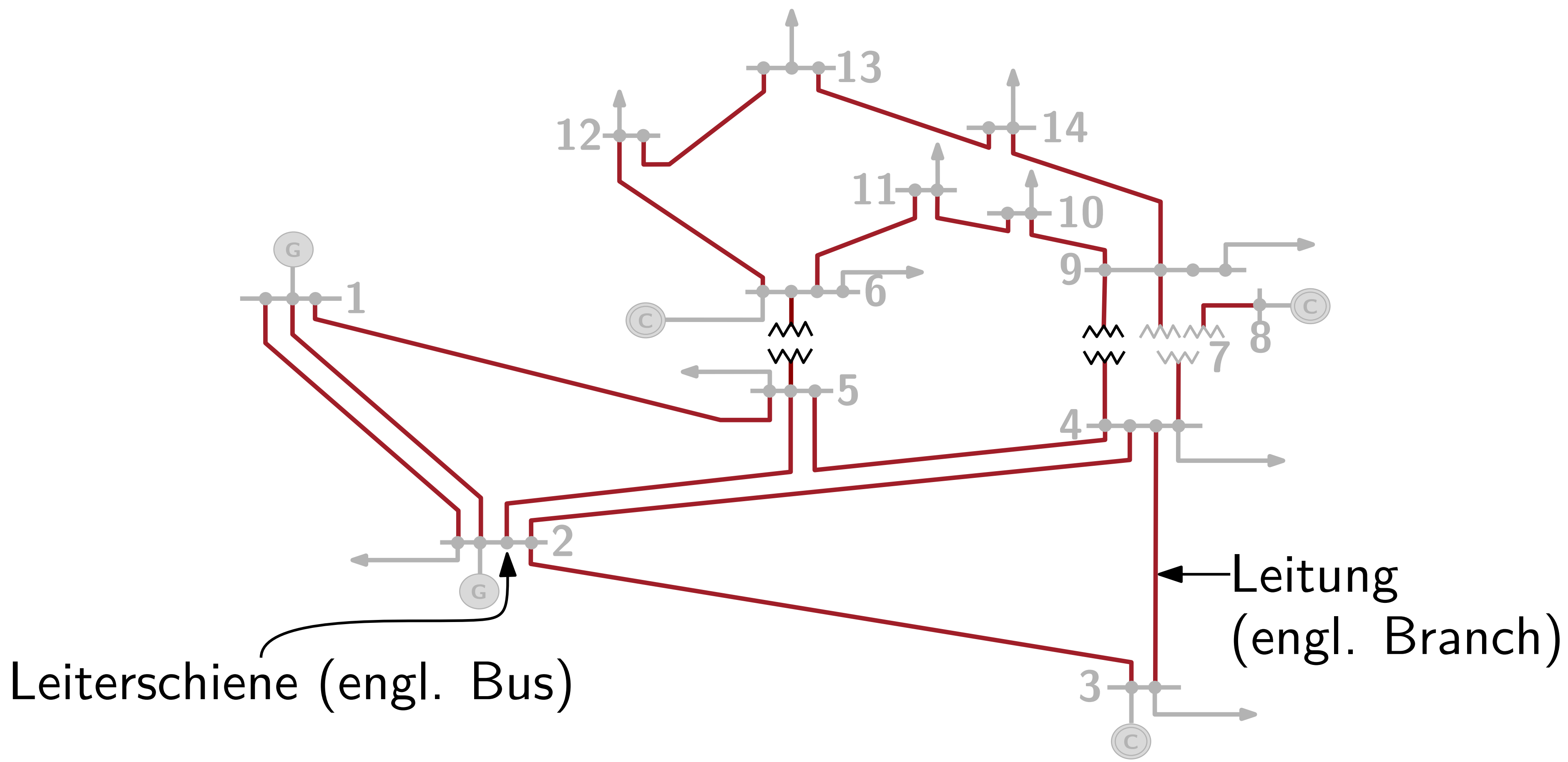


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

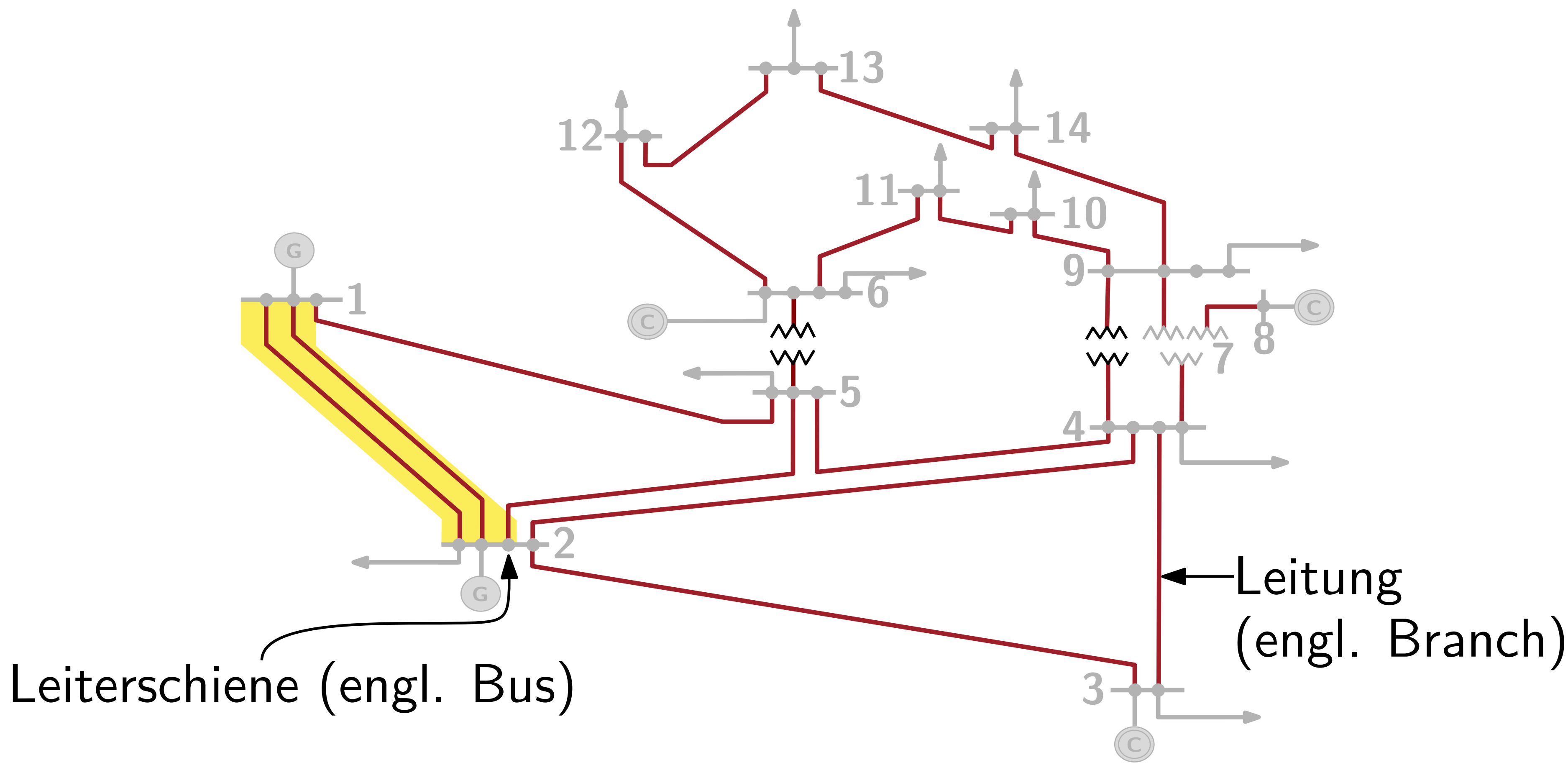


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

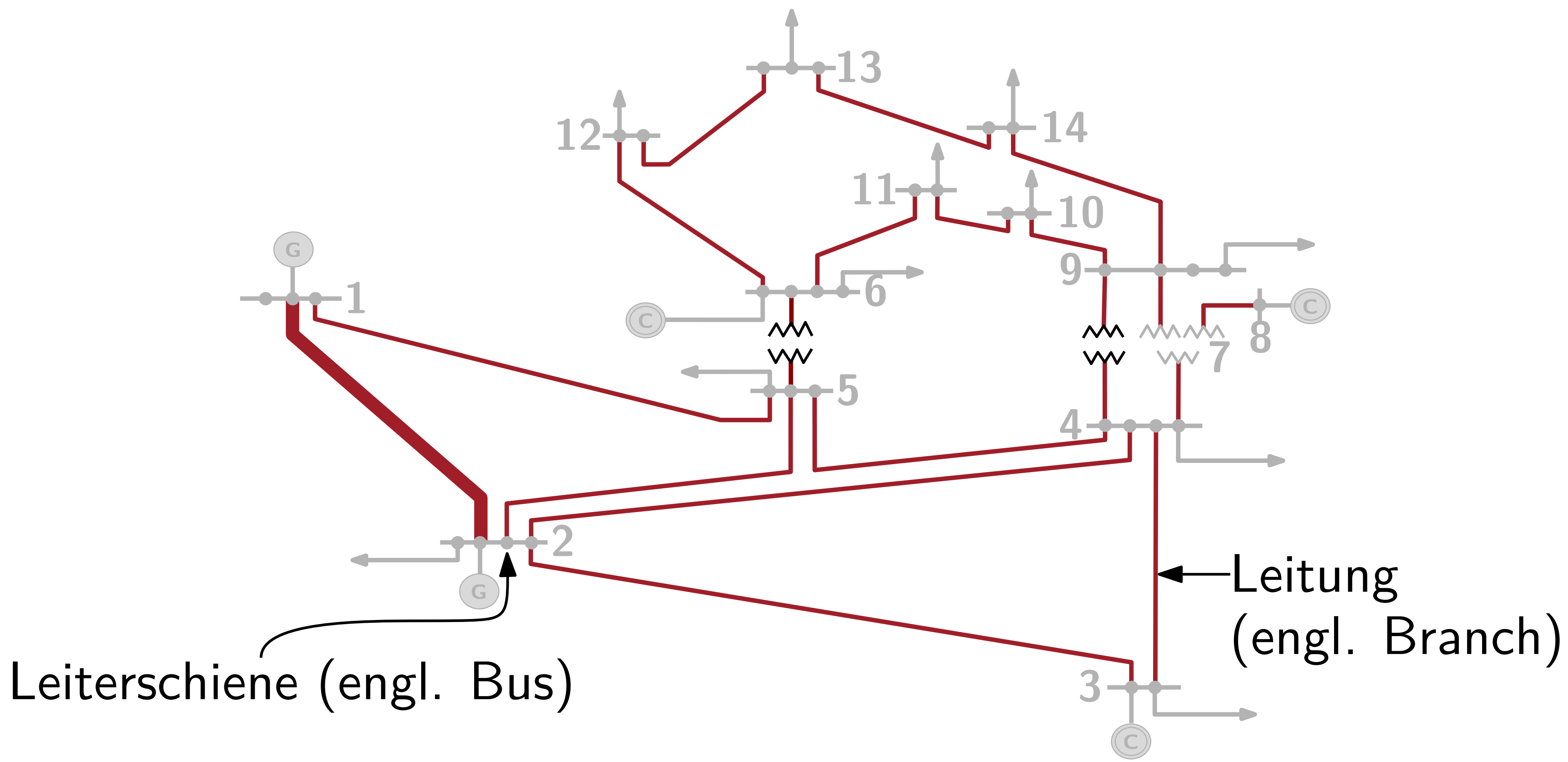


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$



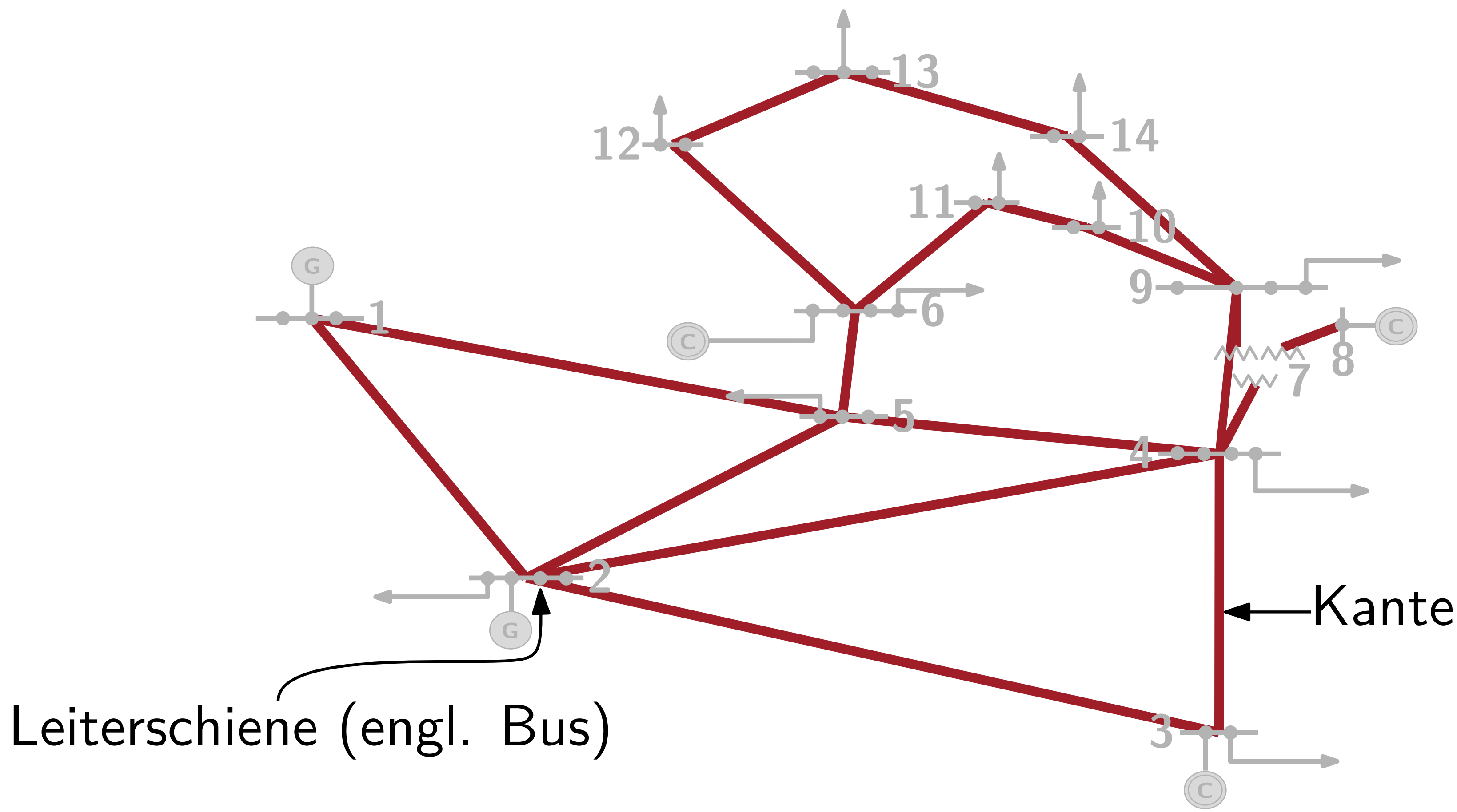
AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

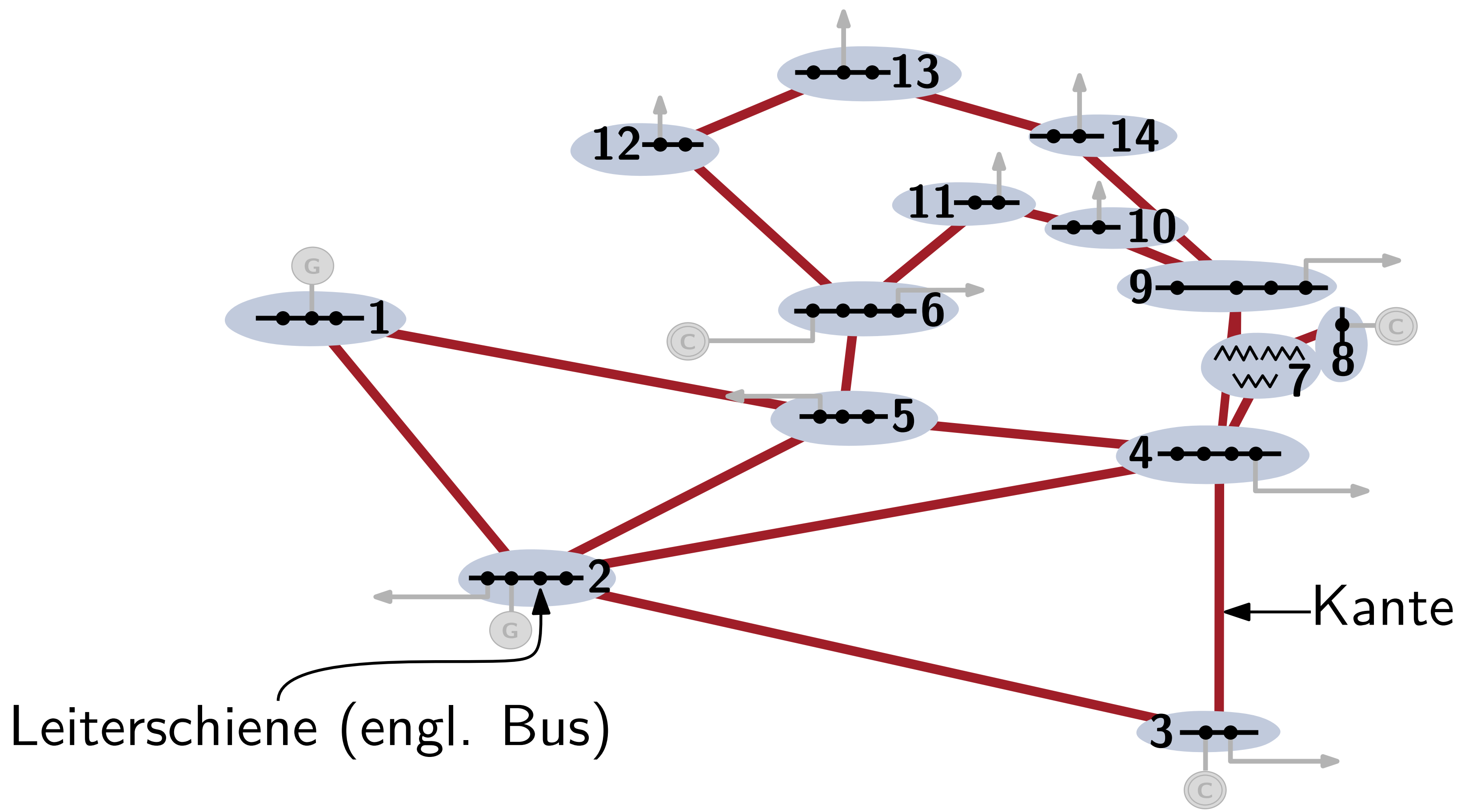


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

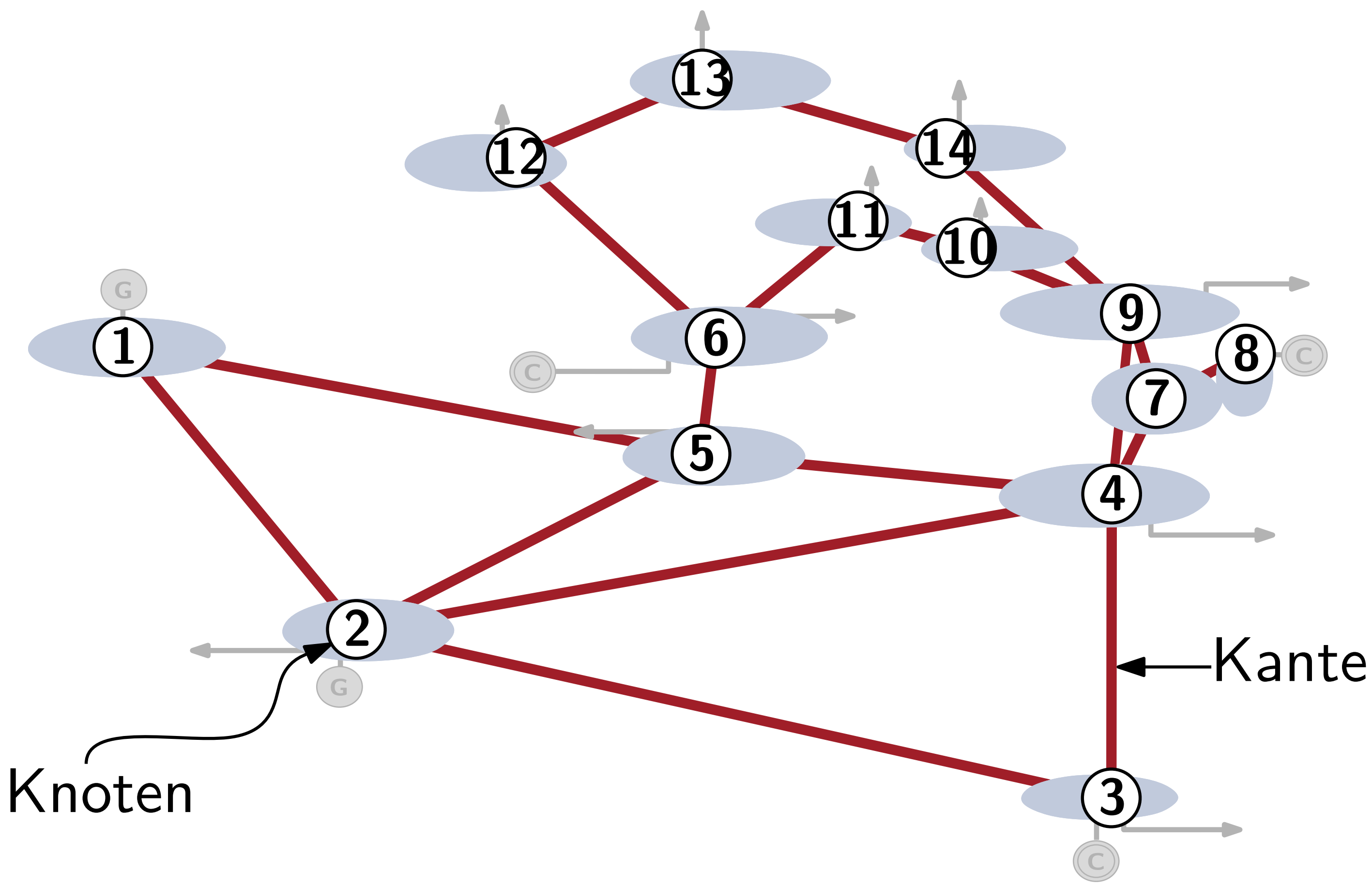


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

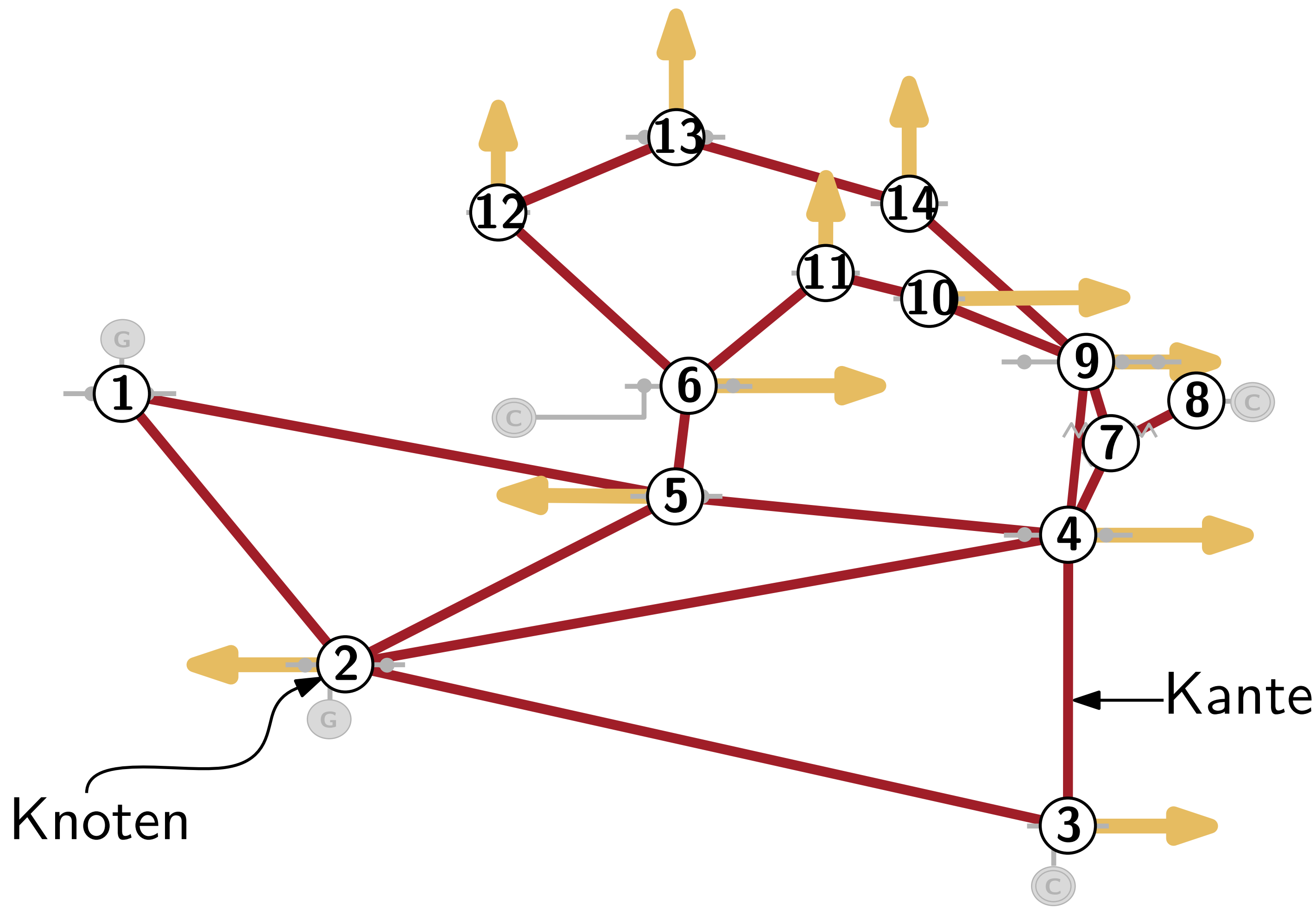


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

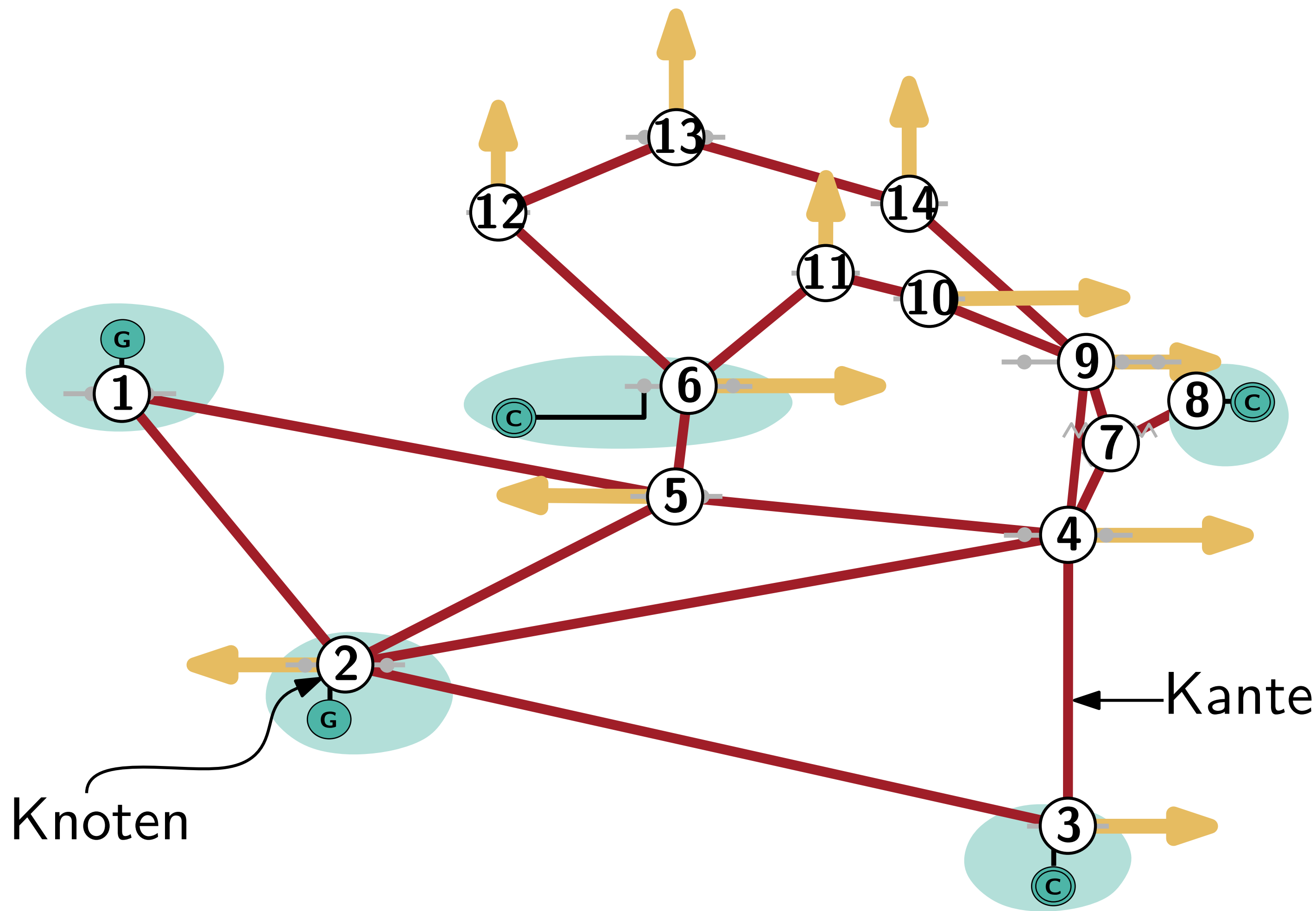


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$

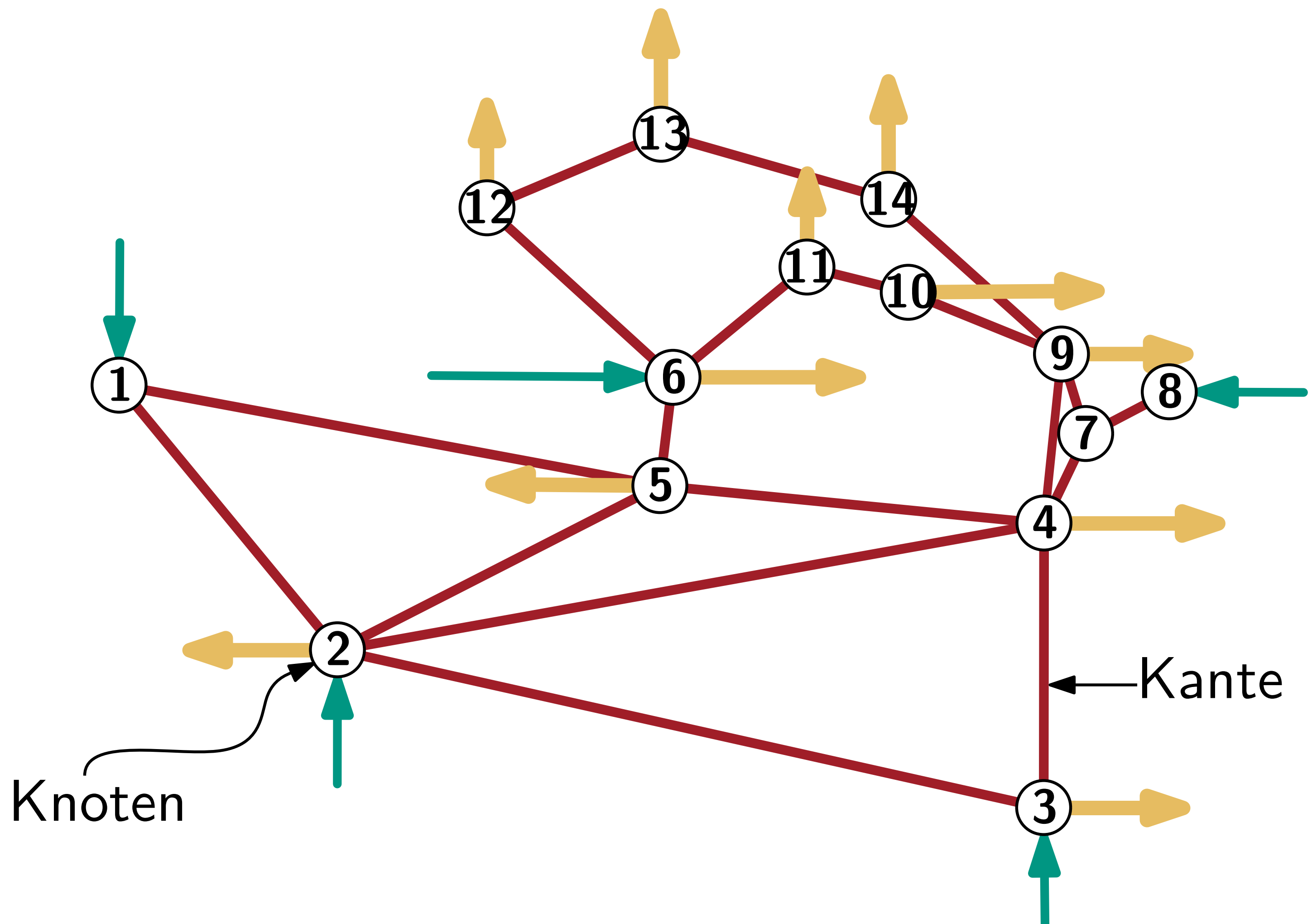


AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Vom Übertragungsnetz zum Graphen

[University of Washington, 1999]

Graph $G = (V, E)$



AEP 14 BUS TEST SYSTEM BUS CODE DIAGRAM

Eingabe

- Sei $G = (V, E)$ ein beliebig gerichteter Graph und $\overleftrightarrow{G} = (V, \overleftrightarrow{E})$ der zugrundeliegende ungerichtete Graph
- Menge von Knoten V (auch Busse genannt) mit Erzeugern $V_G \subseteq V$, Verbrauchern $V_D \subseteq V \setminus V_G$, und Zwischenknoten $V \setminus (V_G \cup V_D)$
- Wir bezeichnen $\overleftrightarrow{E}$ als die darunterliegenden ungerichtete Kantenmenge mit $\overleftrightarrow{e} \in \overleftrightarrow{E}$, sodass $\overleftrightarrow{(u, v)} = \overleftrightarrow{(v, u)}$
- Netzwerk $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b, \underline{p_d})$

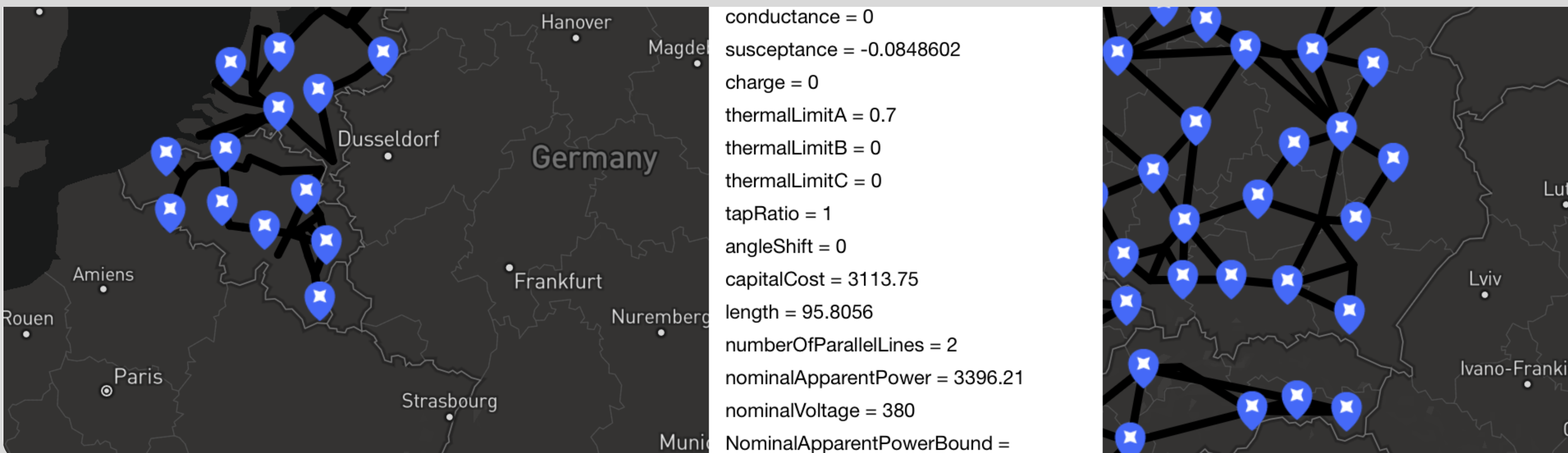
  thermische Leitungsbeschränkungen $\text{cap}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

  Suszeptanzen $b\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

  untere Schranken der Verbraucher $\underline{p_d}\colon V_D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

(Elektrische) Flüsse und deren mathematische Formulierung



Gültige Flüsse

- Ein Fluss ist eine Funktion $f\colon E \cup E^{-1} \to \mathbb{R}$ mit Schiefsymmetrie $f(u,v) = -f(v,u)$ für alle $(u,v) \in E$
- Der Nettofluss $f_{\text{net}}(u) \coloneqq \sum_{\{u,v\} \in \overleftrightarrow{E}} f(u,v)$
- Fluss f erfüllt die folgenden Flusserhaltungseigenschaften, die ähnlich zur Kirchhoff'schen Knotenregel (KCL) sind

$$\begin{aligned} f_{\text{net}}(u) &= 0 && \forall u \in V \setminus (V_G \cup V_D) \\ -\infty \leq f_{\text{net}}(u) &\leq -\underline{p_d} && \forall u \in V_D \\ 0 \leq f_{\text{net}}(u) &\leq \infty && \forall u \in V_G \end{aligned}$$

- Fluss f wird als *gültig* bezeichnet, wenn

$$|f(u,v)| \leq \text{cap}(u,v) \qquad \forall (u,v) \in E$$

- Flusswert $F(\mathcal{N}, f)$ vom Fluss f auf $\mathcal{N}$ ist definiert durch

$$\sum_{u \in V_G} f_{\text{net}}(u)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Das Maximale Fluss Problem (MFP)

- Flusswert $F(\mathcal{N}, f)$ vom Fluss f auf $\mathcal{N}$ ist definiert durch
$$\sum_{u \in V_G} f_{\text{net}}(u)$$
- Der maximale Fluss (MF) besitzt den Wert
$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{MFP}}(\mathcal{N}) = \max F(\mathcal{N}, f),$$
wobei f ein gültiger Fluss ist, wenn

$$\begin{aligned}
f_{\text{net}}(u) &= 0 & \forall u \in V \setminus (V_G \cup V_D) \\
-\infty \leq f_{\text{net}}(u) &\leq -\underline{p_d} & \forall u \in V_D \\
0 \leq f_{\text{net}}(u) &\leq \infty & \forall u \in V_G \\
|f(u, v)| &\leq \mathrm{cap}(u, v) & \forall (u, v) \in E
\end{aligned}$$

Total Unimodulare Matrizen (TUM)

Definition 1 [Total Unimodulare Matrizen]

Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist *total unimodular (TUM)*, wenn jede quadratische Untermatrix von $\mathbf{A}$ eine Determinante von ± 1 oder 0 besitzt.

Hilfssatz 2 [S.39, Wolsey, 1998]

Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist TUM genau dann wenn

- die transponierte Matrix $\mathbf{A}^\intercal$ TUM ist gdw.
- die Matrix $(\mathbf{A}\ I)^\intercal$ TUM ist.

Hilfssatz 3 [Ausreichende Bedingung; S.39, Wolsey, 1998]

Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist *total unimodular (TUM)*, wenn

(a) $a_{ij} \in \{\pm 1, 0\}$ for all i, j,

(b) Jede Spalte beinhaltet maximal zwei nicht 0-Koeffizienten ($\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \leq 2$),

(c) Es existiert eine Partition (M_1, M_2) der Menge M von Zeilen, sodass jede Spalte j zwei nicht 0-Koeffizienten besitzt mit $\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Total Unimodulare Matrizen Beispiele

[S.39, Wolsey, 1998]

- Matrizen, die nicht TUM sind

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matrizen, die TUM sind

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Physikalisch zulässige Flüsse

- Ein zulässiger Fluss vernachlässigt physikalische Gesetzmäßigkeiten
- Die Kirchhoff'sche Maschenregel (KVL) ist eines davon. Diese wird bspw. mittels Potentialen an den Knoten $\theta^v : V \to \mathbb{R}$ formuliert
$$b(u,v) \cdot (\theta^v(v) - \theta^v(u) - \theta^v_{\text{shift}}(u,v)) = f(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$$
$$\underline{\theta^v}(u) \leq \theta^v(u) \leq \overline{\theta^v}(u) \quad \forall u \in V$$
- In unseren Fällen gibt es keine Transformatoren und es gilt damit $\theta^v_{\text{shift}}(u,v) = 0$

Das Maximum Power Flow Problem (MPFP)

Karlsruher Institut für Technologie

- Der maximale Power Flow (MPF) besitzt den Wert
  $$\mathrm{OPT}_{\mathrm{MPFP}}(\mathcal{N}) = \max F(\mathcal{N}, f),$$
  wobei f ein *physikalisch* zulässiger Fluss ist mit

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{net}}(u) &= 0 && \forall u \in V \setminus (V_G \cup V_D) \\
-\infty \leq f_{\mathrm{net}}(u) &\leq -\underline{p_d}(u) && \forall u \in V_D \\
0 \leq f_{\mathrm{net}}(u) &\leq \infty && \forall u \in V_G \\
|f(u,v)| &\leq \mathrm{cap}(u,v) && \forall (u,v) \in E \\
b(u,v) \cdot \left(\theta^v(v) - \theta^v(u) - \theta^v_{\mathrm{shift}}(u,v)\right) &= f(u,v) && \forall (u,v) \in E \\
\underline{\theta^v}(u) \leq \theta^v(u) &\leq \overline{\theta^v}(u) && \forall u \in V
\end{aligned}
$$

Das Maximum Power Flow Problem (MPFP)

- Der maximale Power Flow (MPF) besitzt den Wert

$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{MPFP}}(\mathcal{N}) = \max F(\mathcal{N}, f),$$

wobei f ein *physikalisch* zulässiger Fluss ist mit

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{net}}(u) &= 0 && \forall u \in V \setminus (V_G \cup V_D) \\
-\infty \leq f_{\mathrm{net}}(u) &\leq -\underline{p_d}(u) && \forall u \in V_D \\
0 \leq f_{\mathrm{net}}(u) &\leq \infty && \forall u \in V_G \\
|f(u,v)| &\leq \mathrm{cap}(u,v) && \forall (u,v) \in E \\
b(u,v) \cdot \left(\theta^v(v) - \theta^v(u)\right) &= f(u,v) && \forall (u,v) \in E \\
\underline{\theta^v}(u) \leq \theta^v(u) &\leq \overline{\theta^v}(u) && \forall u \in V
\end{aligned}$$

Problemformulierungen

Direct Current Feasibility Problem $\mathsf{DC-FEAS}(\mathcal{N})$

Instanz: Ein DC-Netzwerk $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b, \underline{p_g}, \overline{p_g}, \underline{p_d}, \overline{p_d})$.

Frage: Existiert ein zulässiger elektrischer Fluss, der die Flusserhaltung am Knoten (KCL) und im Kreis (KVL) einhält?

DC Maximales Leistungsflussproblem $\mathsf{DC}-\mathbf{MPF}(\mathcal{N})$

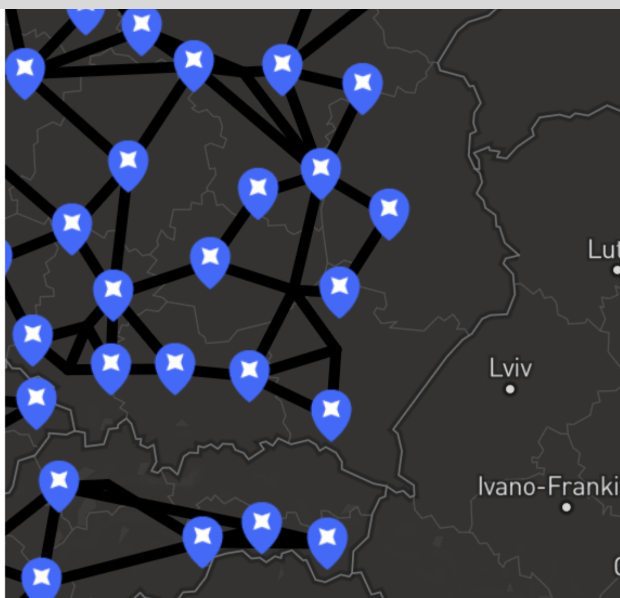
Instanz: Ein Netzwerk $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b, \underline{p_g}, \overline{p_g}, \underline{p_d}, \overline{p_d})$.

Zielfunktion: Finde einen zulässigen elektrischen Fluss f, sodass die Flusswerte $F(\mathcal{N})$ maximal über alle möglichen Flüsse f sind.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Eigenschaften elektrischer Flüsse

conductance = 0
susceptance = -0.0848602
charge = 0
thermalLimitA = 0.7
thermalLimitB = 0
thermalLimitC = 0
tapRatio = 1
angleShift = 0
capitalCost = 3113.75
length = 95.8056
numberOfParallelLines = 2
nominalApparentPower = 3396.21
nominalVoltage = 380
NominalApparentPowerBound =

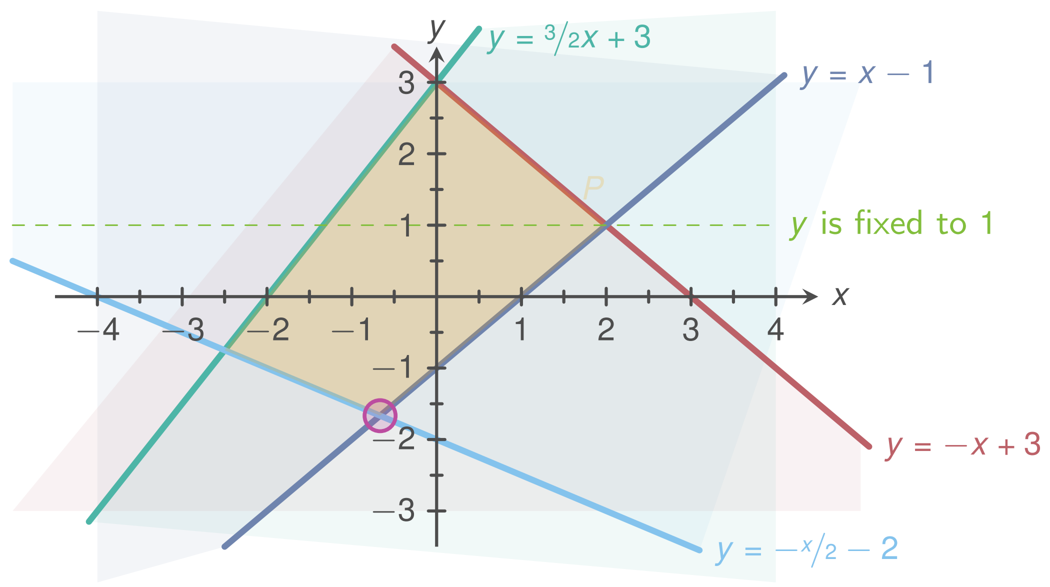


Eindeutigkeit von Leistungsflüssen

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma 4

Es existiert eine eindeutige Lösung für DC-Leistungsflüsse, wenn die Verbräuche exakte Beschränkungen haben.



Skalierung von Leistungsflüssen

Karlsruher Institut für Technologie

- Graphentheoretische Flussalgorithmen nutzen Skalierungstechniken
  1. Kapazitätsskalierung [Edmonds und Karp, 1972]
  2. Überschussskalierung [Ahuja und Orlin, 1989]
- Leistungsflüsse, die den trivialen Leistungsfluss ausschließen ($f \equiv 0$), können hoch und runterskaliert werden durch einen Faktor χ

Lemma 5 [Skalierung]

Jeder nicht-triviale elektrische Fluss $f' : E \to \mathbb{R}_{>0}$ kann zu einem neuen elektrisch zulässigen Fluss f skaliert werden indem man einen Skalierungsfaktor anwendet

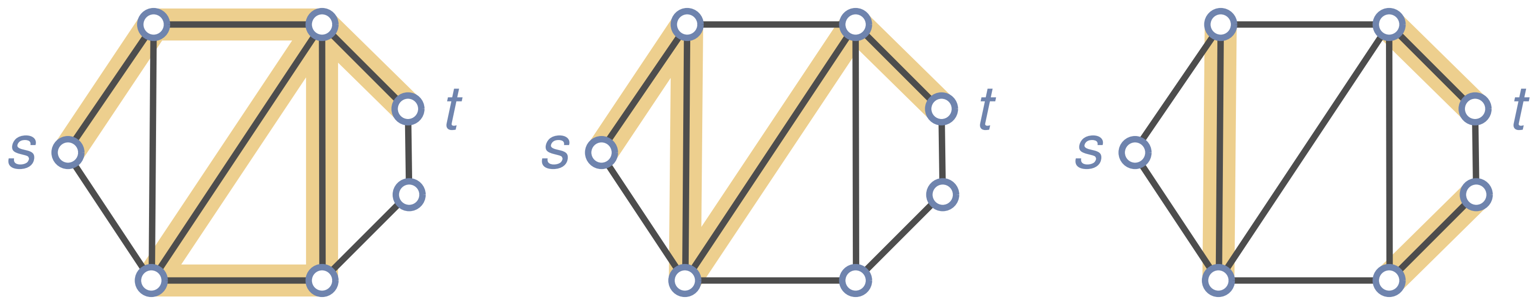
$$0 \leq \chi \leq \min_{e' \in E} \frac{\text{cap}(e')}{f'(e')} =: \overline{\chi} \tag{1}$$

zu $f(e) = f'(e) \cdot \chi$ für alle $e \in E$.

Pfade und Zyklen

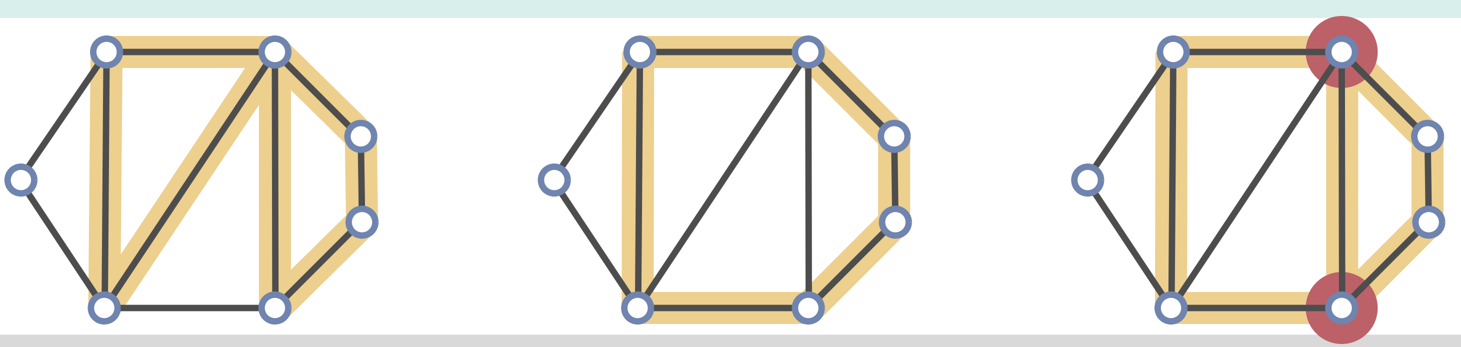
Definition 6 [(einfacher) Pfad]

Ein Pfad $\pi(s,t)$ vom Knoten s zum Knoten t ist eine Sequenz von Kanten $\big((s,v_1),(v_1,v_2),\ldots,(v_{n-1},t)\big)$, wobei zwei aufeinanderfolgende Kanten einen gemeinsamen Knoten besitzen. Wir bezeichnen ein Pfad als *einfach*, wenn alle Knoten im Pfad verschieden sind.



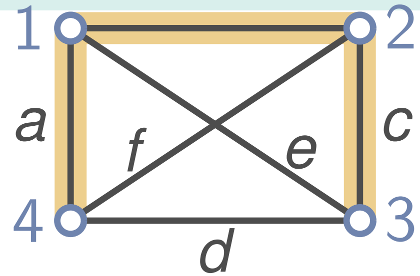
Definition 7 [Zyklus & Kreis]

Ein *Zyklus* c ist ein Pfad $\pi(s,t)$ bei dem $s = t$ ist und alle Knoten graden Grad besitzen. Ein *Kreis* ist ein Zyklus bei dem alle Knoten Grad zwei besitzen.

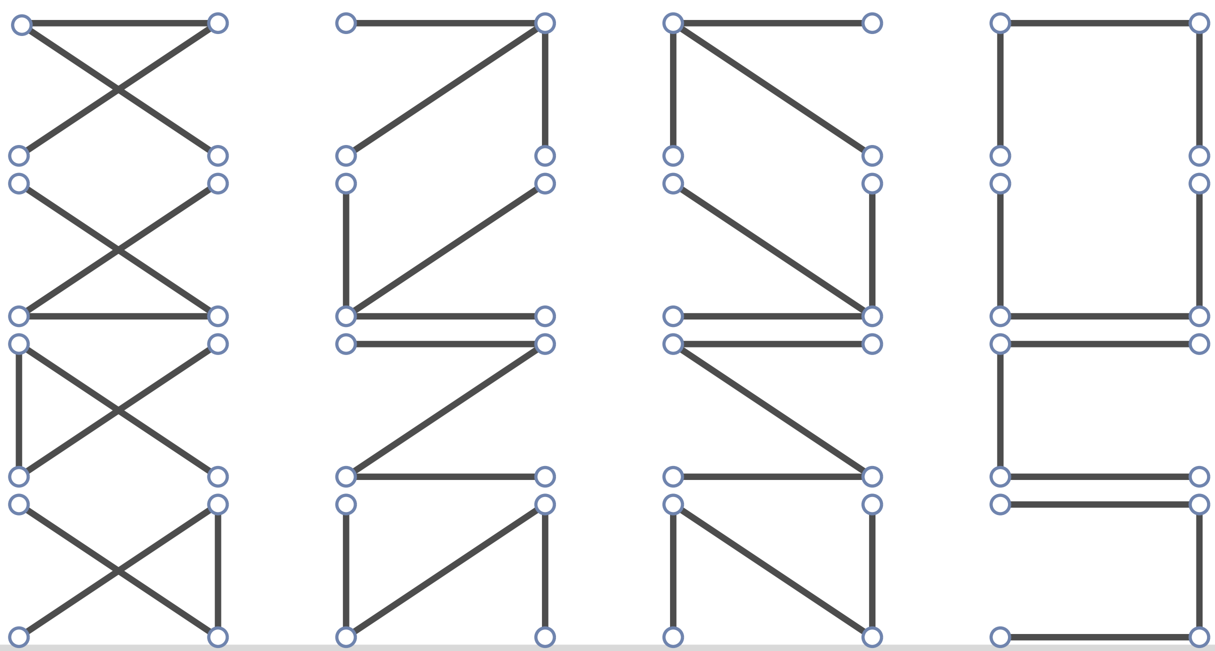


Definition 8 [Aufspannender Baum]

Ein *aufspannender Baum* $T = (V, E')$ ist ein *kreisfreier spannender Teilgraph* eines zusammenhängenden Graphens $G = (V, E)$, der alle Knoten aus G kreisfrei verbindet.



Alle **aufspannenden Bäume** T



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Eigenschaften und Begriffe von Bäumen

- Eine Kante eines Baumes wird als **Zweig** bezeichnet (engl. branch)
- Ein Element des Komplements eines Baumes ist eine **Sehne** (engl. chord)
- Eigenschaften von zusammenhängenden Graphen
  - Anzahl an Zweigen eines aufspannenden Baumes sind $|V| - 1$
  - Anzahl an Sehnen $|E| - (|V| - 1) = |E| - |V| + 1$
- Wälder
  - Anzahl Zweige in einem aufspannenden Wald sind $|V| - k$, wobei k die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ist
  - Anzahl an Sehnen $\mu = |E| - |V| + k$

Ein erster struktureller Algorithmus für DC-Leistungsflüsse

- Der folgende Satz gibt uns einen ersten Algorithmus für DC-Leistungsflüsse
- Es stellt ein erstes strukturelles Ergebnis dar

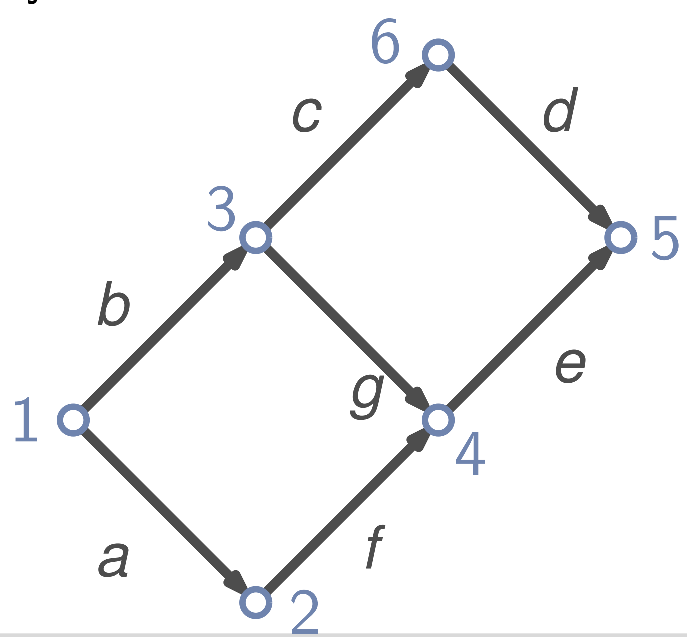
Lemma 9 [S.36, Lemma 1; Shapiro, 1987]

Sei 1 Ohm der Widerstand jeder Kante im Graphen G, sei N die Anzahl aufspannender Bäume und seien $N(s, a \to b, t)$ die aufspannenden Bäume, die die gerichtete Kante (a, b) enthalten. Wir legen nun einen Strom von 1-Ampere zwischen s und t an. Sei nun $i(a, b) = {}^{(N(s,a \to b,t) - N(s,b \to a,t))}/_{N}$. Dann ist $i(a, b)$ der Strom in der Kante (a,b) orientiert von a nach b.

- Wir wenden das Binet-Cauchy Theorem auf die Matrix $\mathbf{Y_n} = \mathbf{I}\ \mathbf{Y_e}\ \mathbf{I}^\mathsf{T}$ an
- $\triangle_n = \det(\mathbf{Y_n}) = \det(\mathbf{I}\ \mathbf{Y_e}\ \mathbf{I}^\mathsf{T}) = \sum_{T \in \mathcal{T}}$ (Baum-Admittanz-Produkt auf T)
- Baum-Admittanz-Produkt $\sum_{(u,w) \in E(T)} \mathbf{Y_{u,w}}$

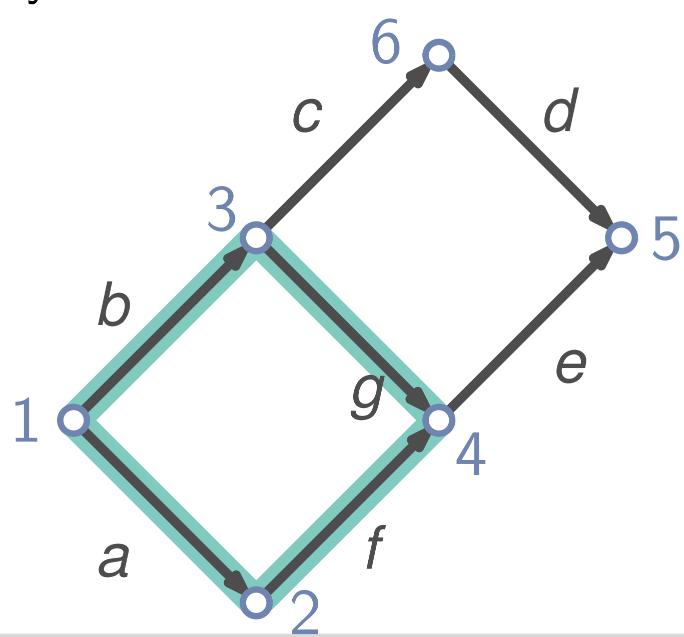
Zyklenraum und -basis

- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\overrightarrow{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden



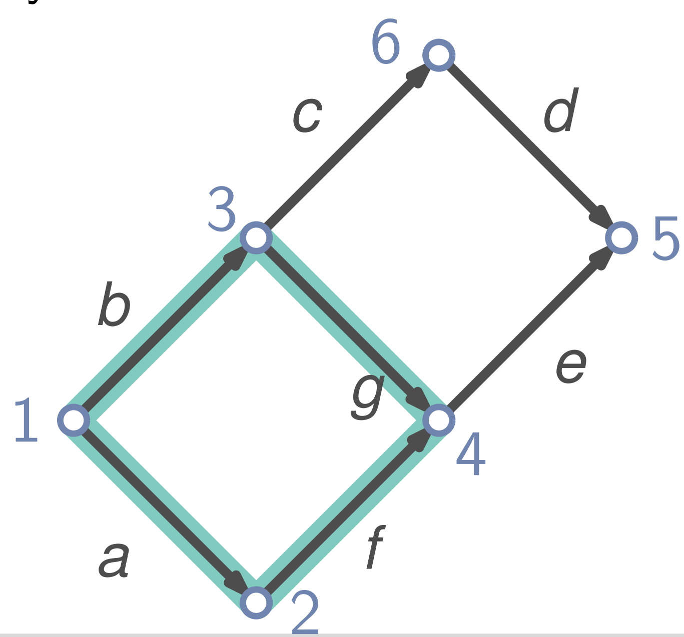
Zyklenraum und -basis

- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\overrightarrow{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden



Zyklenraum und -basis

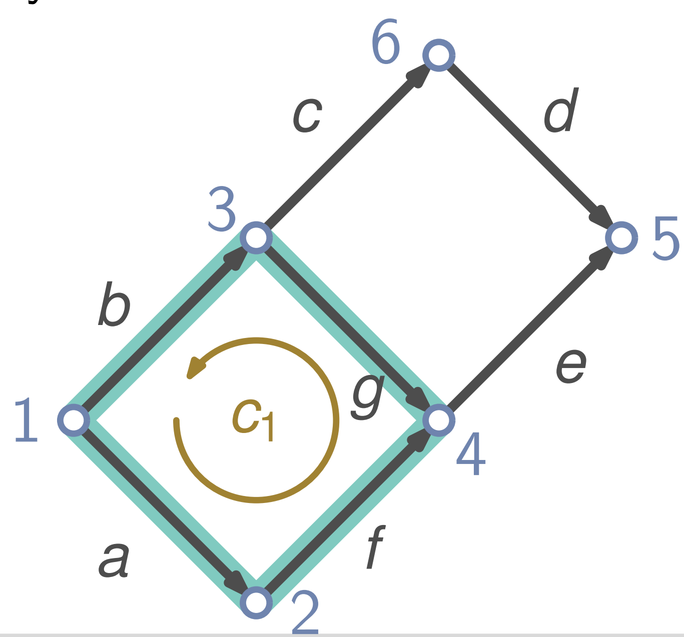
- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\vec{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden



g	e	d	b	a	f	c

Zyklenraum und -basis

- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\overrightarrow{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \dots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden

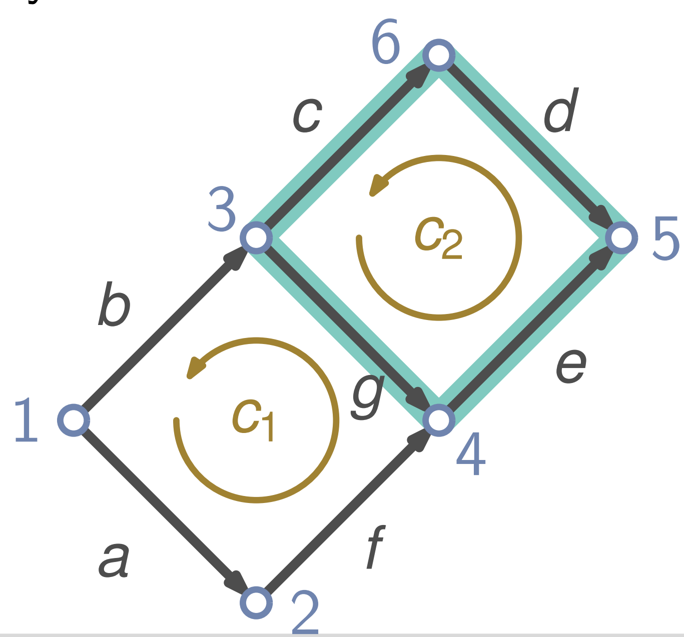


	g	e	d	b	a	f	c
c_1	-1	0	0	-1	1	1	0

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Zyklenraum und -basis

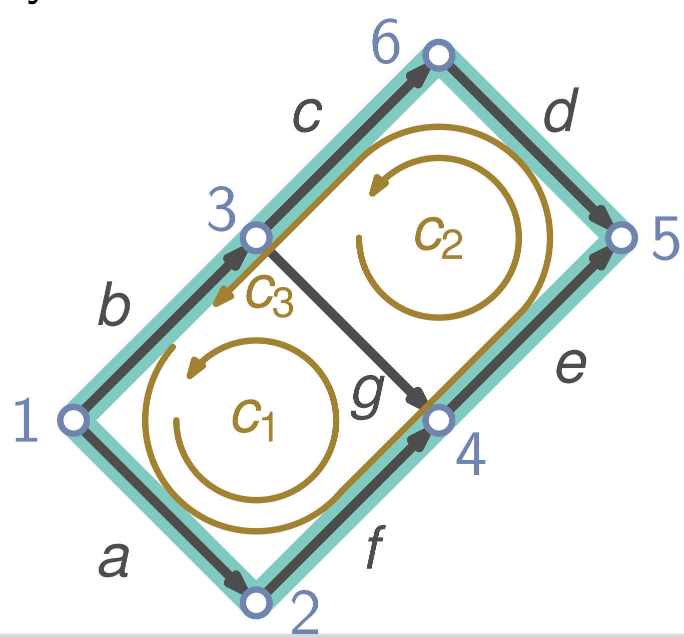
- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\vec{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden



	g	e	d	b	a	f	c
c_1	-1	0	0	-1	1	1	0
c_2	1	1	-1	0	0	0	-1

Zyklenraum und -basis

- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\vec{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden

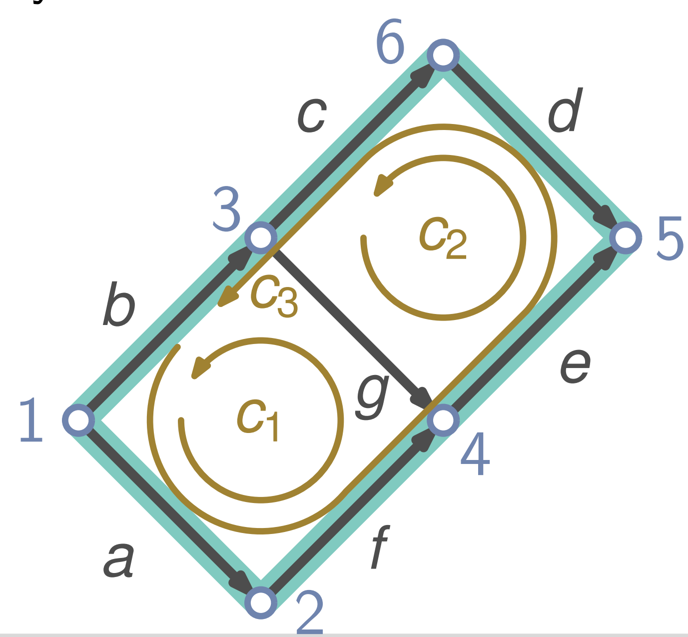


	g	e	d	b	a	f	c
c_1	-1	0	0	-1	1	1	0
c_2	1	1	-1	0	0	0	-1
c_3	0	1	-1	-1	1	1	-1

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Zyklenraum und -basis

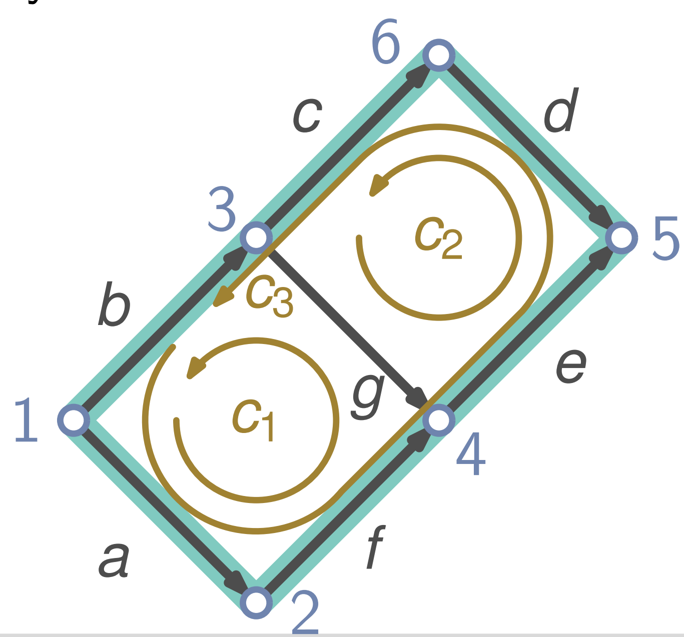
- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\vec{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden



	g	e	d	b	a	f	c	
c_1	-1	0	0	-1	1	1	0	Basis
c_2	1	1	-1	0	0	0	-1	Basis
c_3	0	1	-1	-1	1	1	-1	

Zyklenraum und -basis

- Ein Zyklus $c \in C$ kann als Teilmenge $E(c) \subseteq E(G)$ beschrieben werden
- Wir kodieren nun $E(c)$ als Vektor $\overrightarrow{b} \in \{-1, 0, 1\}^{|E|}$ mit beliebig aber fester Kantenreihenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_{|E|})$
- Der Vektor besitzt den Eintrag 1 (-1), wenn die Kante $e \in E(c)$ in (entgegen) der vordefinierten Kreisrichtung ist und 0 falls $e \notin E(c)$
- Die Menge aller Zyklen aus G spannen den Zyklenraum auf. Eine minimale Anzahl an Zyklenvektoren, die den Zyklenraum aufspannen, wird als Zyklenbasis bezeichnet
- Zyklenvektoren können in einer Zyklenmatrix $\mathbf{B} \in \{-1, 0, 1\}^{|C| \times |E|}$ kodiert werden



	g	e	d	b	a	f	c
c_1	-1	0	0	-1	1	1	0
c_2	1	1	-1	0	0	0	-1
c_3	0	1	-1	-1	1	1	-1

$=: \mathbf{B}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Vektorraumbasis

Definition 11 [Lineare Unabhängigkeit]

Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ sind *linear unabhängig*, wenn kein Vektor als Linearkombination von $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ dargestellt werden kann, d.h., es existiert kein Vektor $\vec{a}$ mit $\vec{a} = b_1 \cdot \vec{a_1} + b_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + b_n \cdot \vec{a_n}$

Definition 10 [Basis]

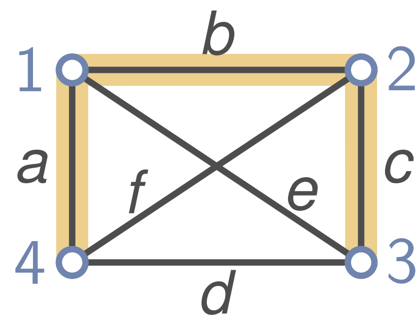
Eine Basis in einem Vektorraum ist eine maximal unabhängige Menge von Vektoren, die ausreicht, um den Vektorraum aufzuspannen.

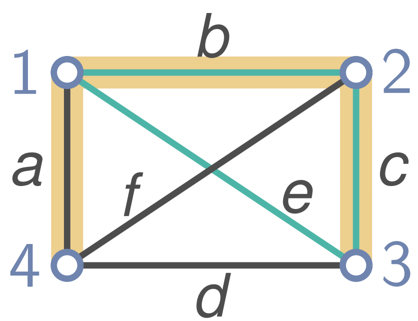
- Es existieren mehrere Basen, die den gleichen Vektorraum aufspannen
- Alle Basen haben die selbe Größe [S.514, Satz 6, Whitney, 1935]

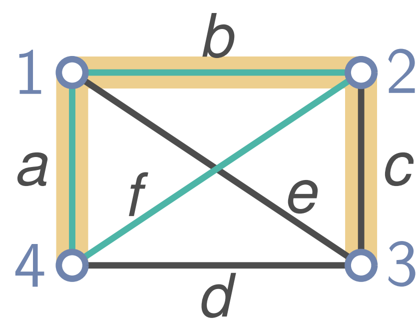
Fundamentale Kreise [Kirchhoff, 1847]

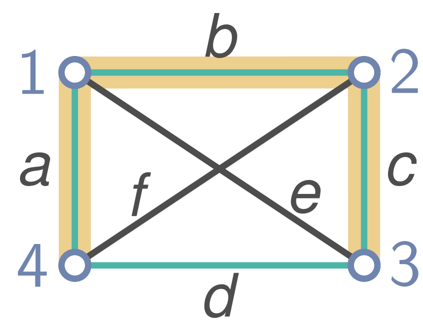
Definition 12 [Fundamentale Kreisbasis]

Fundamentale Kreise eines zusammenhängenden Graphens G für einen aufspannenden Baum T sind die $|E| - |V| + 1$ einfachen Kreise, die durch jede Sehne $\{u, v\} \in E(G) \setminus E(T)$ und den einfachen Pfad $\pi(u, v)$ im aufspannenden Baum T erzeugt werden.









Formulierungen

Karlsruher Institut für Technologie

Knotenbasierte Formulierung		Knoten-/Kreisbasierte (Kirchhoff'sche) Formulierung
$f_{\text{net}}(u) = \sum_{\{u,v\} \in E} f(u,v) = 0$ $-\infty \leq f_{\text{net}}(u) \leq -d$ $0 \leq f_{\text{net}}(u) \leq \infty$	**KCL**	$\mathbf{I}\vec{f} = \vec{0}$
$\theta^v(v) - \theta^v(u) = f(u,v)$	**KVL**	$\mathbf{B}\overrightarrow{\Delta\theta^v} = \vec{0}$ $\underbrace{\left(\mathbf{B} \circ \left(1^{\lvert E \rvert \times 1} \cdot \vec{x}^{\mathsf{T}}\right)\right)}_{=:\mathbf{B}'} \vec{f} = \vec{0}$
$\lvert f(u,v) \rvert \leq \text{cap}(u,v)$		$\lvert \vec{f} \rvert \leq \overrightarrow{\text{cap}}$

I – Inzidenzmatrix
B – Zyklenmatrix

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Struktur der Inzidenz- und Zyklenmatrix

7

5 | 2

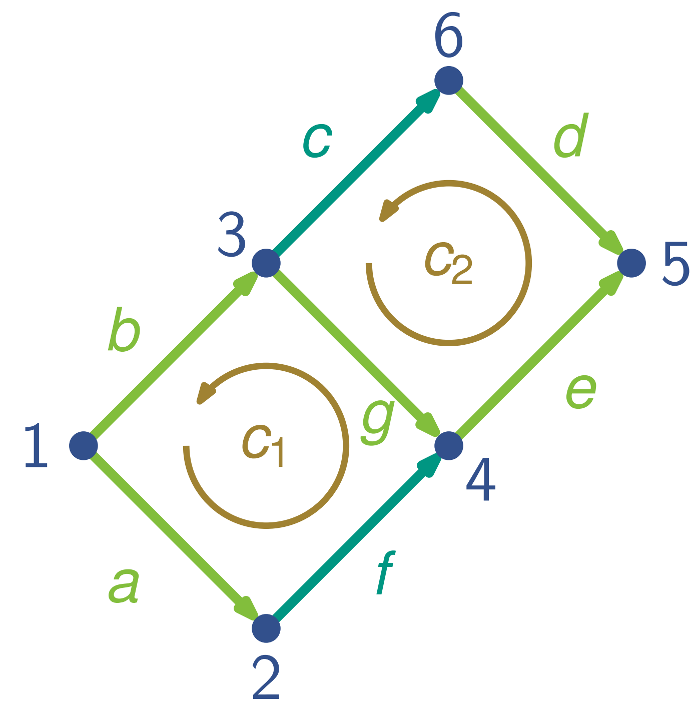
	Aufspannende Bäume					Sehnen	
	g	e	d	b	a	f	c
~~3~~	~~−1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~−1~~
4	1	−1	0	0	0	1	0
5	0	1	1	0	0	0	0
6	0	0	−1	0	0	0	1
1	0	0	0	−1	−1	0	0
2	0	0	0	0	1	−1	0
c_1	−1	0	0	−1	1	1	0
c_2	1	1	−1	0	0	0	1

5

2

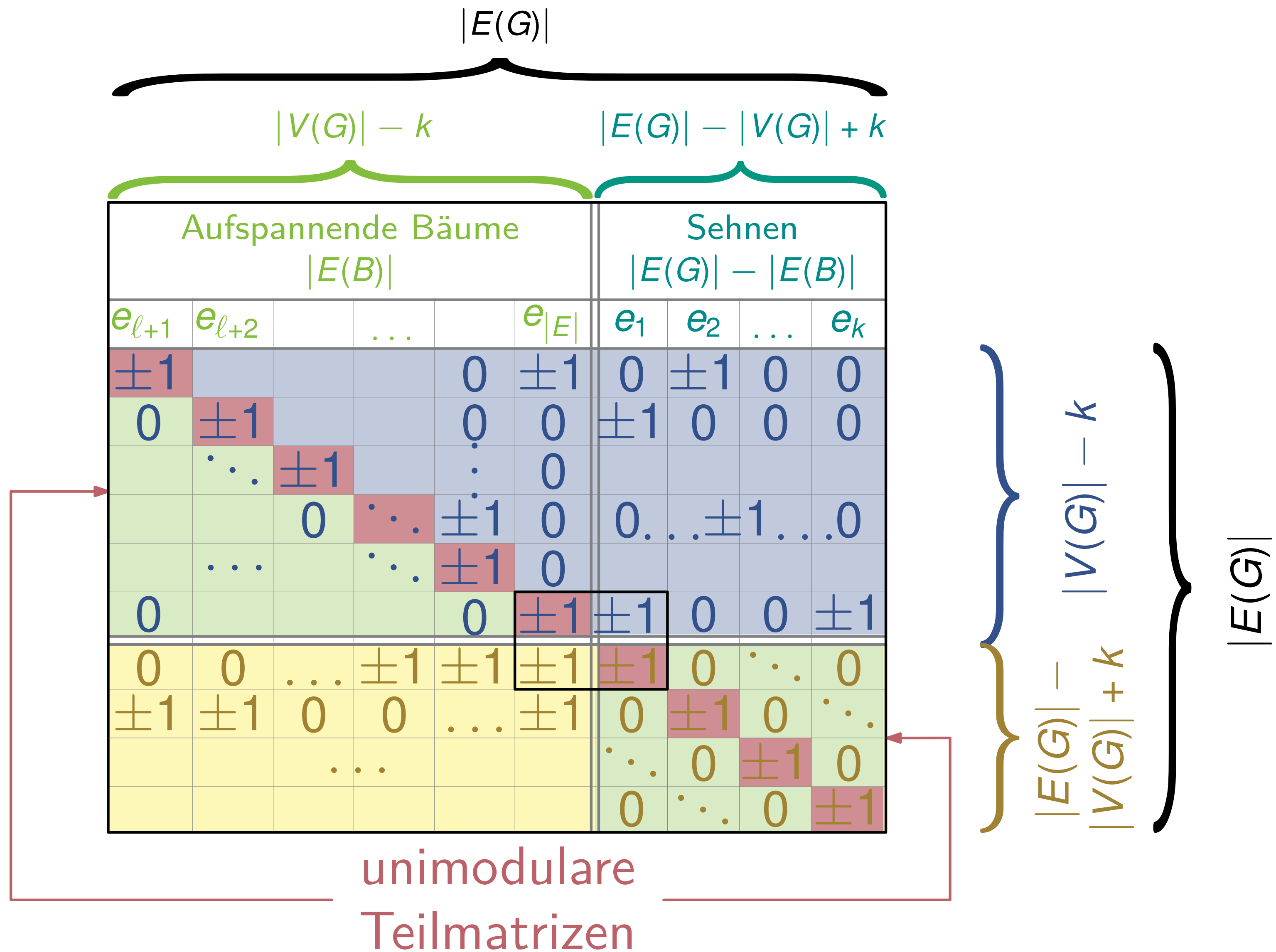
7

unimodulare Untermatrizen



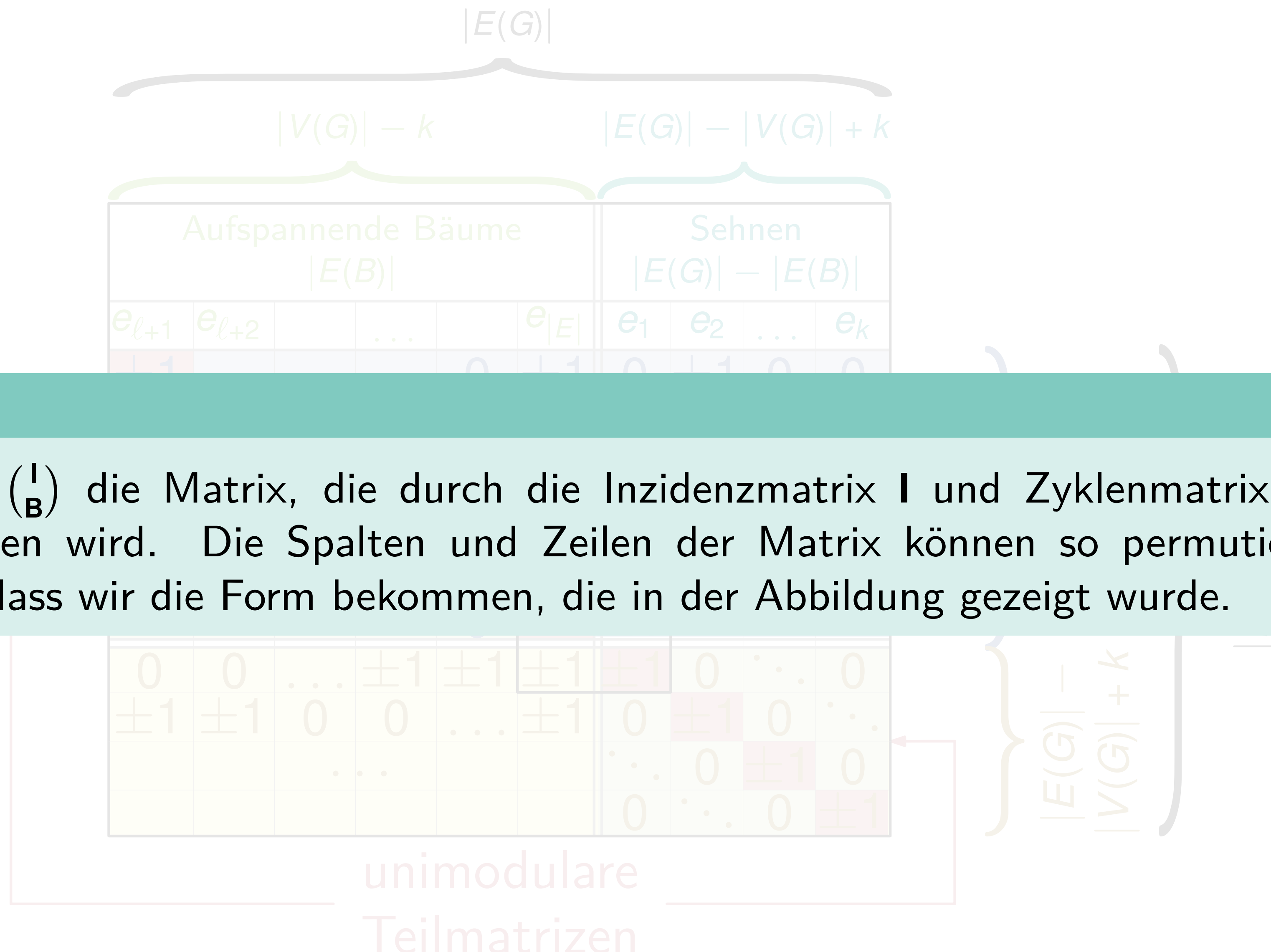
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Allgemeine Struktur



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

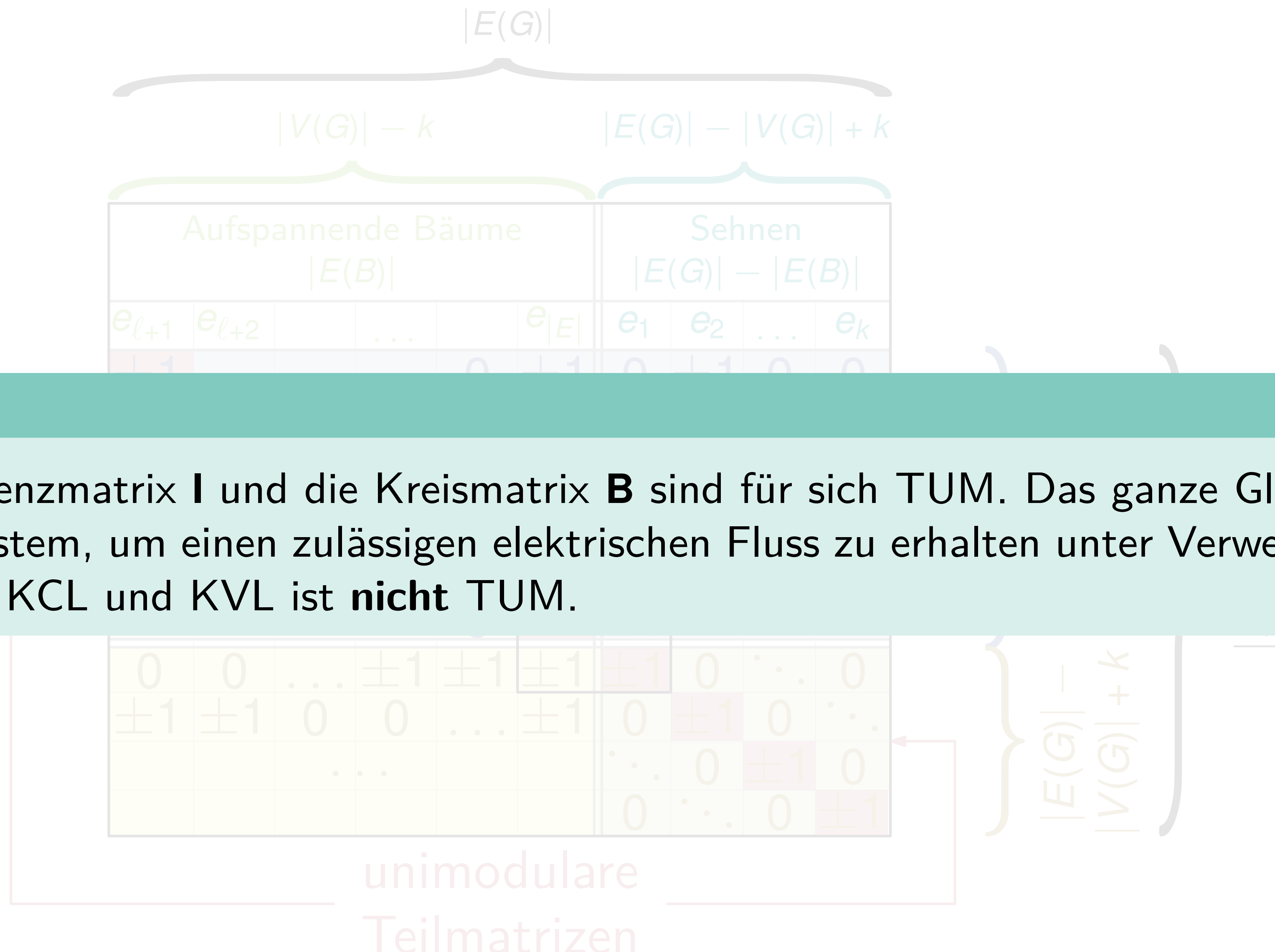
Allgemeine Struktur



Lemma 13

Sei $\mathbf{A} = \binom{\mathbf{I}}{\mathbf{B}}$ die Matrix, die durch die Inzidenzmatrix $\mathbf{I}$ und Zyklenmatrix $\mathbf{B}$ beschrieben wird. Die Spalten und Zeilen der Matrix können so permutiert werden, dass wir die Form bekommen, die in der Abbildung gezeigt wurde.

Allgemeine Struktur



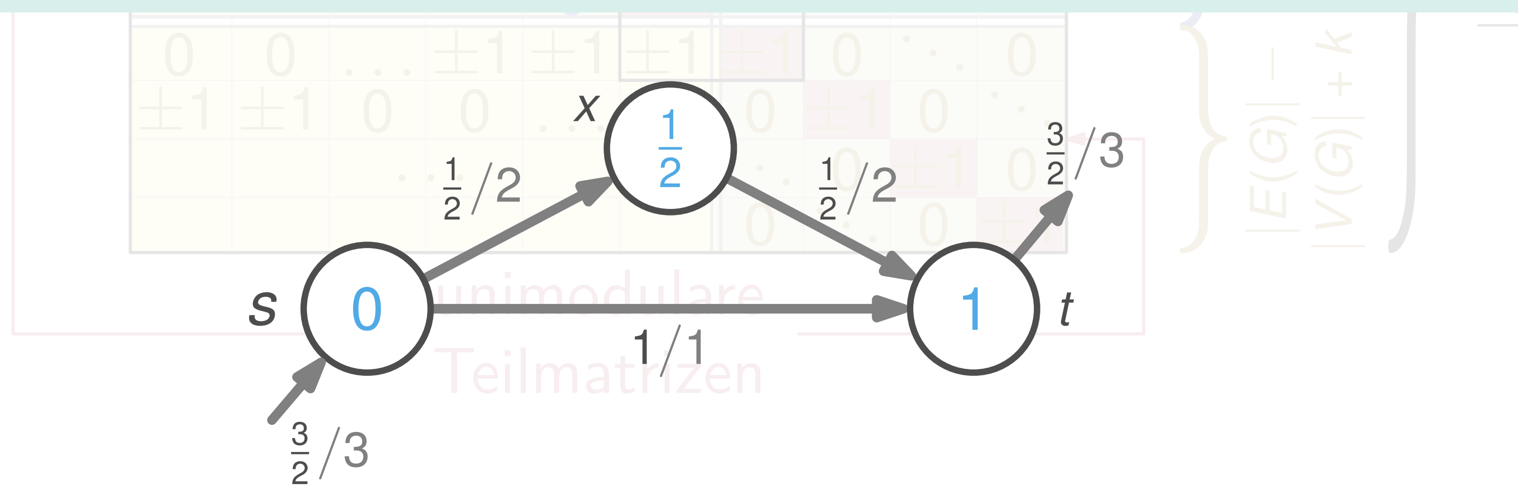
Lemma 14

Die Inzidenzmatrix **I** und die Kreismatrix **B** sind für sich TUM. Das ganze Gleichungssystem, um einen zulässigen elektrischen Fluss zu erhalten unter Verwendung der KCL und KVL ist **nicht** TUM.

Allgemeine Struktur

Lemma 14

Die Inzidenzmatrix **I** und die Kreismatrix **B** sind für sich TUM. Das ganze Gleichungssystem, um einen zulässigen elektrischen Fluss zu erhalten unter Verwendung der KCL und KVL ist **nicht** TUM.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ganzzahlige Elektrische Flüsse

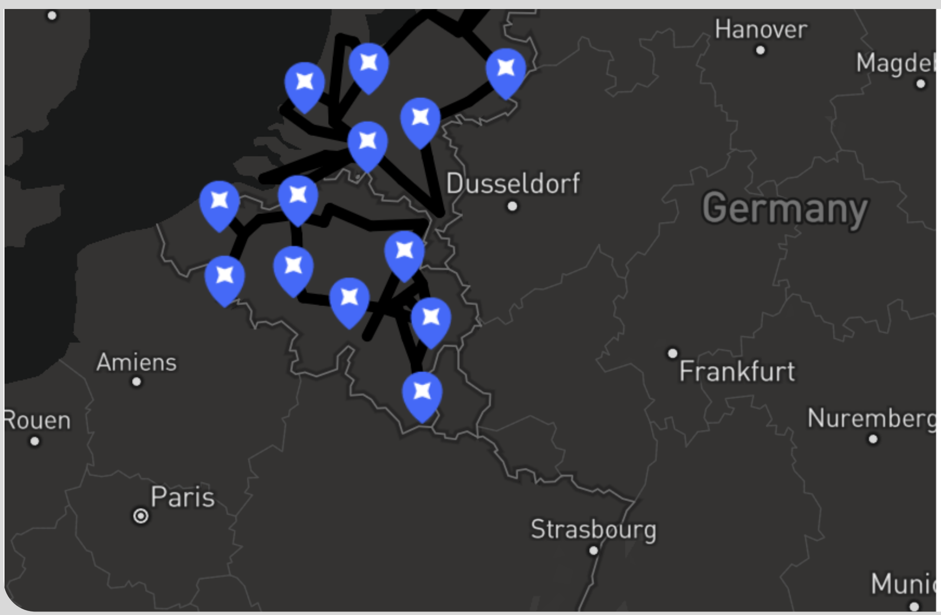
Definition 15 [Rationales Polytope; S.61, Schrijver, 2003]

Ein lineares Ungleichungssystem der Form $\{\vec{f} \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \mathbf{A}\vec{f} \leq \vec{p_\mathbf{A}}\}$, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}^{|V| \times |E|}$ und $\vec{p_\mathbf{A}} \in \mathbb{Q}^{|V|}$, wird als *rationales lineares Ungleichungssystem* bezeichnet. Ein rationales System von linearen Ungleichungen erzeugt ein rationales Polytope. Letzteres bedeutet, dass alle Knoten des Polytope auf rationalen Koordinaten liegen. So ein rationales Polytope repräsentiert die konvexe Hülle einer endlichen Menge von rationalen Vektoren.

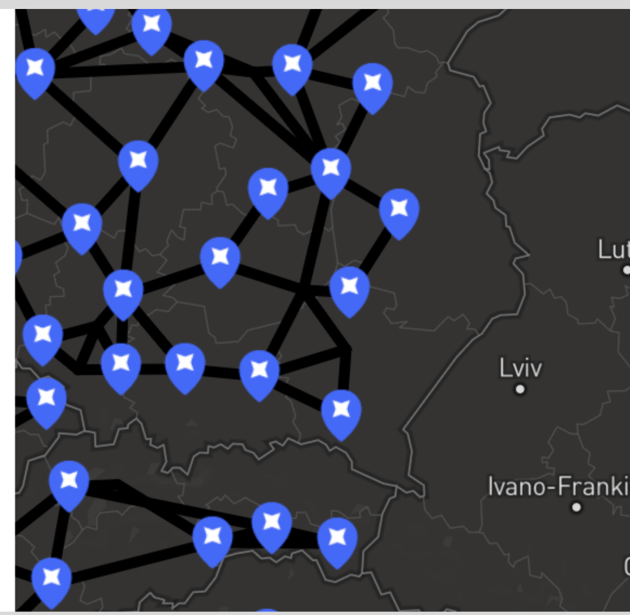
Satz 16 [Ganzzahlige Elektrische Flüsse; S.73, Theorem 4.15, Wegner, 2019]

Sei f ein (nichttrivialer) elektrische Fluss mit $f \in \mathbb{Q}$, dann existiert ein nichttrivialer ganzzahliger elektrischer Fluss, der durch geeignetes skalieren erreicht werden kann.

Minimale Zyklenbasen



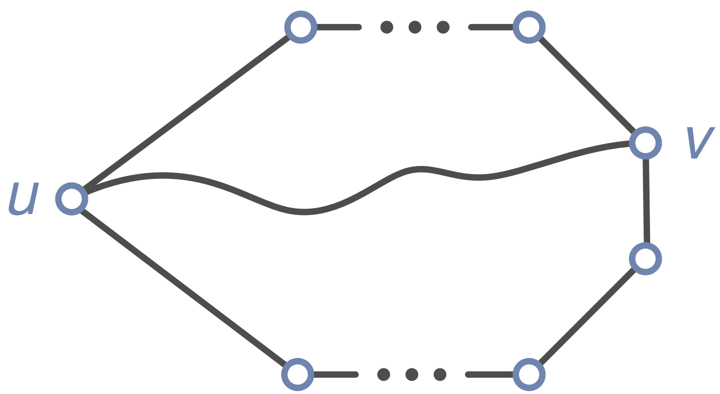
conductance = 0
susceptance = -0.0848602
charge = 0
thermalLimitA = 0.7
thermalLimitB = 0
thermalLimitC = 0
tapRatio = 1
angleShift = 0
capitalCost = 3113.75
length = 95.8056
numberOfParallelLines = 2
nominalApparentPower = 3396.21
nominalVoltage = 380
NominalApparentPowerBound =



Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

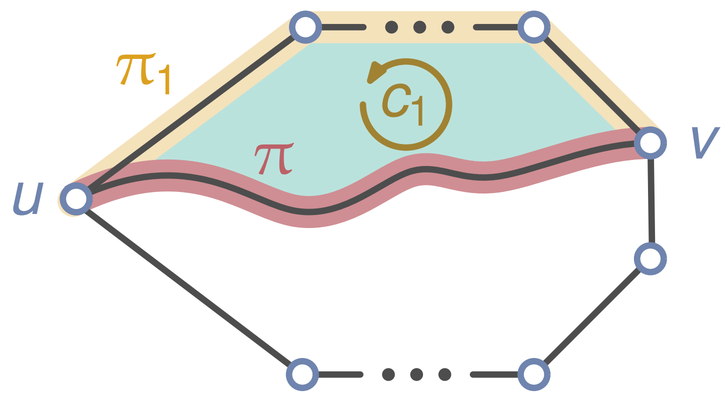
Seien $u, v \in V(G)$, $\mathbf{B}$ eine Zyklenbasis von G und $\pi\ (u,v)$ ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u, v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

Seien $u, v \in V(G)$, $\mathbf{B}$ eine Zyklenbasis von G und $\pi\ (u,v)$ ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u,v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



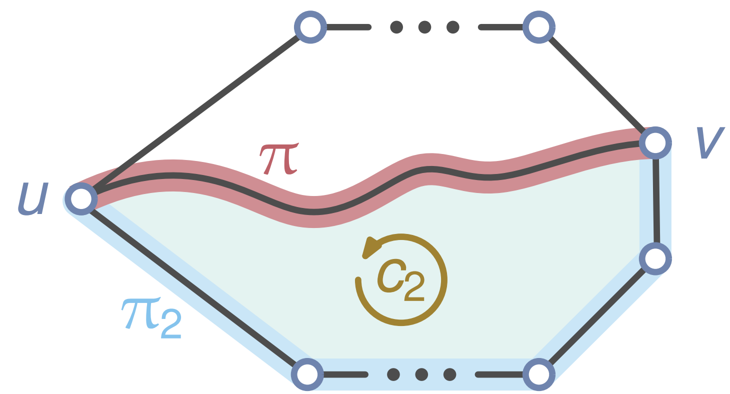
$c_1 = \pi - \pi_1$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

Seien $u, v \in V(G)$, **B** eine Zyklenbasis von G und π (u,v) ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u,v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



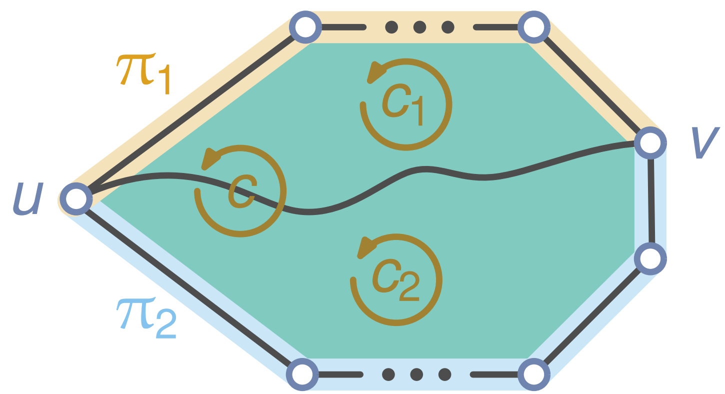
$$c_1 = \pi - \pi_1$$
$$c_2 = -\pi + \pi_2$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

Seien $u, v \in V(G)$, **B** eine Zyklenbasis von G und π (u,v) ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u,v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



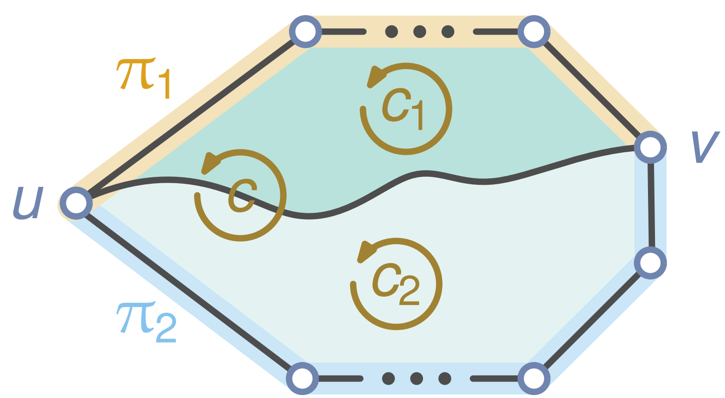
$$c_1 = \pi - \pi_1$$
$$c_2 = -\pi + \pi_2$$
$$c = c_1 + c_2$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

Seien $u, v \in V(G)$, **B** eine Zyklenbasis von G und $\pi\ (u,v)$ ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u, v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



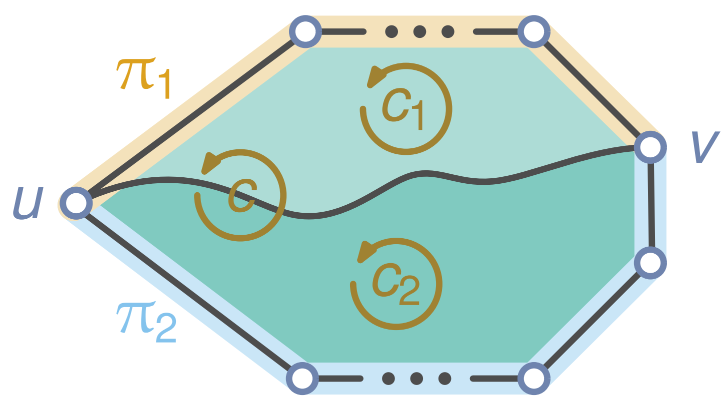
$$c_1 = \pi - \pi_1$$
$$c_2 = -\pi + \pi_2$$
$$c = c_1 + c_2$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

Seien $u, v \in V(G)$, $\mathbf{B}$ eine Zyklenbasis von G und $\pi\ (u,v)$ ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u, v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.

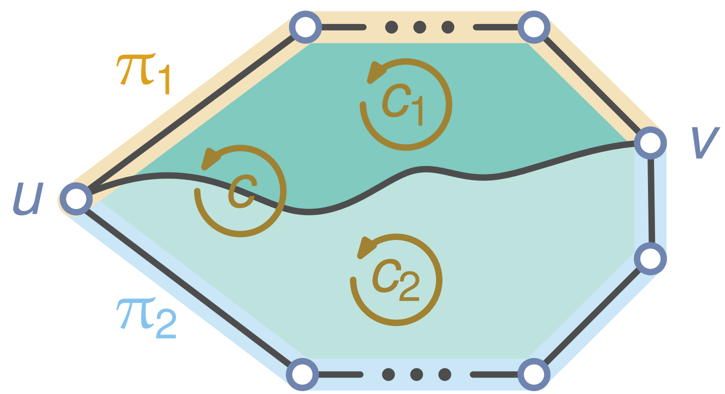


$$c_1 = \pi - \pi_1$$
$$c_2 = -\pi + \pi_2$$
$$c = c_1 + c_2$$

Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

Seien $u, v \in V(G)$, **B** eine Zyklenbasis von G und π (u,v) ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u, v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



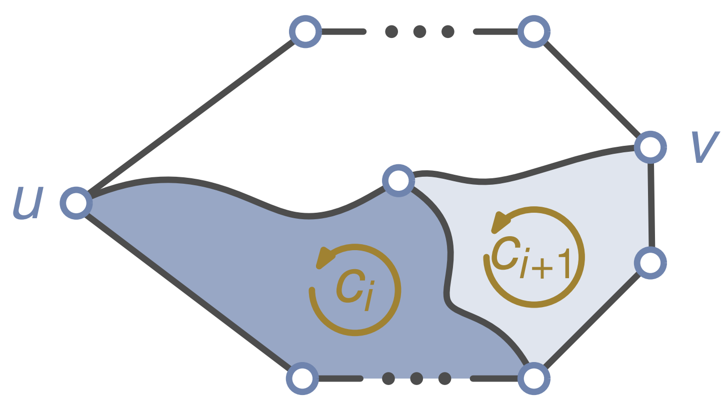
$$C_1 = \pi - \pi_1$$
$$C_2 = -\pi + \pi_2$$
$$C = C_1 + C_2$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

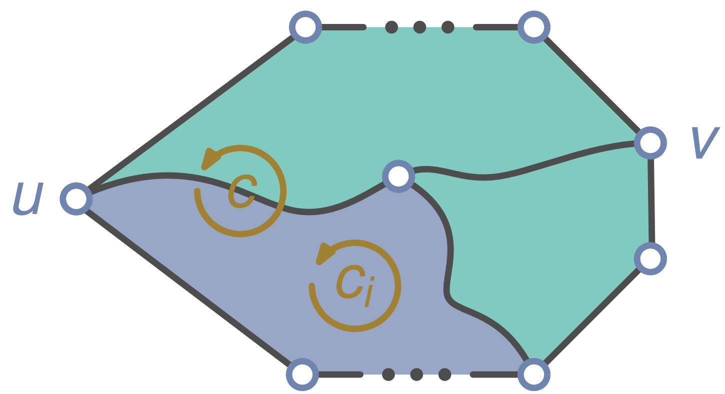
Seien $u, v \in V(G)$, $\mathbf{B}$ eine Zyklenbasis von G und $\pi\ (u,v)$ ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u, v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

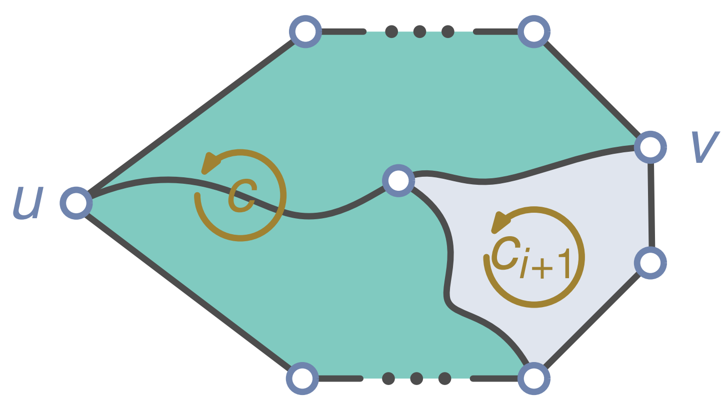
Seien $u, v \in V(G)$, $\mathbf{B}$ eine Zyklenbasis von G und $\pi\ (u,v)$ ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u,v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



Hortons Algorithmus

Satz 17 [S.359; Horton, 1987]

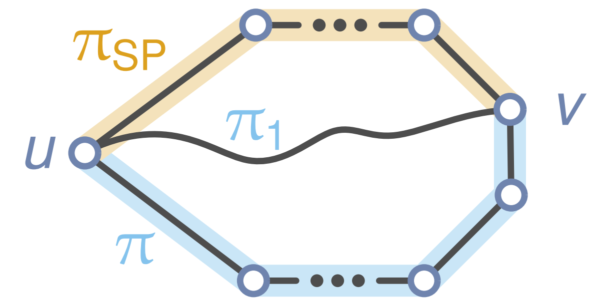
Seien $u, v \in V(G)$, $\mathbf{B}$ eine Zyklenbasis von G und $\pi\ (u,v)$ ein Pfad. Damit kann jeder Kreis $c \in \mathbf{B}$, der u und v enthält ausgetauscht werden durch einen Kreis, der entweder den Pfad $\pi(u, v)$ enthält, oder einen Kreis, der einen der beiden Knoten $u, v \in V$ ausschließt.



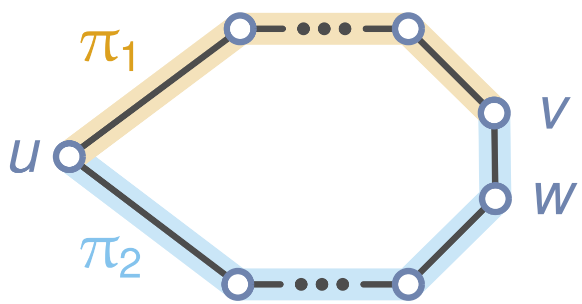
Hortons Algorithmus

Logische Folge 18 [S.359; Horton, 1987]

Sei **B** eine minimale Zyklenbasis, und $\pi_{SP}(u, v)$ ein eindeutiger kürzester Pfad von u nach v, dann enthält jeder Kreis aus **B**, der u und v enthält auch den Pfad $\pi_{SP}(u, v)$.



$$
\begin{aligned}
w(C_i) &\leq w(\pi_{SP}) + w(\pi_i) \\
&< w(\pi_1) + w(\pi_2) \\
&< w(C)
\end{aligned}
$$



$$d(u, v) = w(\pi_1) \vee d(u, v) = w(\pi_2)$$

$$C = \pi_1 + \{v, w\} + \pi_2$$

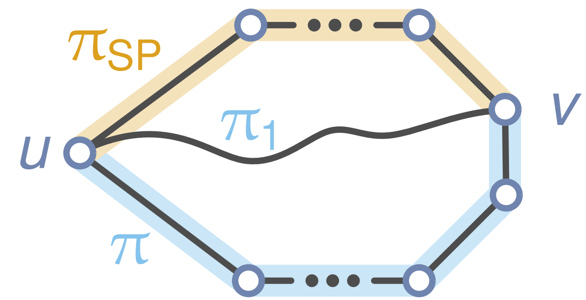
Satz 19 [S.359; Horton, 1987]

Sei u ein Knoten des Kreises c in einer minimalen Zyklenbasis **B**. Dann existiert eine Kante $\{v, w\} \in E(C)$, sodass Kreis c den kürzesten Weg $\pi_{SP}(u, v)$ und $\pi_{SP}(u, w)$ enthält, sowie die Kante $\{v, w\}$.

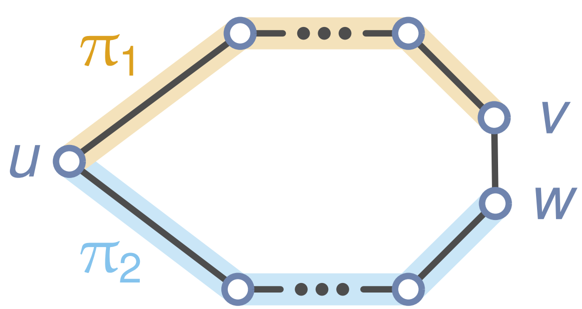
Hortons Algorithmus

Logische Folge 18 [S.359; Horton, 1987]

Sei **B** eine minimale Zyklenbasis, und $\pi_{SP}(u, v)$ ein eindeutiger kürzester Pfad von u nach v, dann enthält jeder Kreis aus **B**, der u und v enthält auch den Pfad $\pi_{SP}(u, v)$.



$$\begin{aligned} w(C_i) &\leq w(\pi_{SP}) + w(\pi_i) \\ &< w(\pi_1) + w(\pi_2) \\ &< w(C) \end{aligned}$$



$$d(u, v) = w(\pi_1) \vee d(u, v) = w(\pi_2)$$

$$C = \pi_1 + \{v, w\} + \pi_2$$

Satz 19 [S.359; Horton, 1987]

Sei u ein Knoten des Kreises c in einer minimalen Zyklenbasis **B**. Dann existiert eine Kante $\{v, w\} \in E(C)$, sodass Kreis c den kürzesten Weg $\pi_{SP}(u, v)$ und $\pi_{SP}(u, w)$ enthält, sowie die Kante $\{v, w\}$.

Hortons Algorithmus

Data: A network $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b)$.
Result: Minimale Zyklenbasis.

$\mathbf{B} = ()$;
$\mathbf{A}^\star = \texttt{APSP}(\mathbf{A}\ (\mathcal{N}))$; ▷ Adjazenzmatrix Multiplikation $\mathbf{A}^{|V|-1}$ (Transitiver Abschluss)
forall $u \in V$ **and** $\{v, w\} \in E(G)$ **with** $w \neq u \neq v \neq w$ **do**
    $c = \mathbf{A}^\star_{u,v} + \mathbf{A}^\star_{u,w} + \{v, w\}$;
    C.append(c);
sort(C);
while $\dim(\mathbf{B}) < (|E| - |V| + 1)$ **do** ▷ Jede Basis **B** ist gleich groß
    $c = C$.pop_front();
    if $0 == \dim(\ker\left((\mathbf{B}\ c)^{\mathbf{T}}\right))$ **then** ▷ Überprüfe lineare Unabhängigkeit
        $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ c\end{pmatrix}$;
return B ; ▷ Kreisbasis

Hortons Algorithmus

Data: A network $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b)$.
Result: Minimale Zyklenbasis.

$\mathbf{B} = ()$;

$\mathbf{A}^\star = \texttt{APSP}(\mathbf{A}\ (\mathcal{N}))$; ▷ Adjazenzmatrix Multiplikation $\mathbf{A}^{|V|-1}$ (Transitiver Abschluss) $\mathcal{O}(|V|^3)$

forall $u \in V$ **and** $\{v, w\} \in E(G)$ **with** $w \neq u \neq v \neq w$ **do**

  $c = \mathbf{A}^\star_{u,v} + \mathbf{A}^\star_{u,w} + \{v, w\}$;

  C.append(c);

sort(C);

while $\dim(\mathbf{B}) < (|E| - |V| + 1)$ **do** ▷ Jede Basis **B** ist gleich groß

  $c = C$.pop_front();

  if $0 == \dim(\ker((\mathbf{B}\ c)^{\mathbf{T}}))$ **then** ▷ Überprüfe lineare Unabhängigkeit

    $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ c \end{pmatrix}$;

return B ; ▷ Kreisbasis

Hortons Algorithmus

Data: A network $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b)$.
Result: Minimale Zyklenbasis.

$\mathbf{B} = ()$;
$\mathbf{A}^\star = \texttt{APSP}(\mathbf{A}\ (\mathcal{N}))$; ▷ Adjazenzmatrix Multiplikation $\mathbf{A}^{|V|-1}$ (Transitiver Abschluss) $\mathcal{O}(|V|^3)$
forall $u \in V$ **and** $\{v, w\} \in E(G)$ **with** $w \neq u \neq v \neq w$ **do**
  $c = \mathbf{A}^\star_{u,v} + \mathbf{A}^\star_{u,w} + \{v, w\}$; $\mathcal{O}(|E||V|^2)$
  $C.\text{append}(c)$;
$\texttt{sort}(C)$;
while $\dim(\mathbf{B}) < (|E| - |V| + 1)$ **do** ▷ Jede Basis **B** ist gleich groß
  $c = C.\texttt{pop\_front}()$;
  if $0 == \dim(\ker((\mathbf{B}\ c)^{\mathbf{T}}))$ **then** ▷ Überprüfe lineare Unabhängigkeit
    $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ c\end{pmatrix}$;
return $\mathbf{B}$; ▷ Kreisbasis

Hortons Algorithmus

Data: A network $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b)$.
Result: Minimale Zyklenbasis.

$\mathbf{B} = ()$;
$\mathbf{A}^\star$ = APSP($\mathbf{A}$ $(\mathcal{N})$) ; ▷ Adjazenzmatrix Multiplikation $\mathbf{A}^{|V|-1}$ (Transitiver Abschluss) — $\mathcal{O}(|V|^3)$
forall $u \in V$ **and** $\{v, w\} \in E(G)$ **with** $w \neq u \neq v \neq w$ **do**
  $c = \mathbf{A}^\star_{u,v} + \mathbf{A}^\star_{u,w} + \{v, w\}$; — $\mathcal{O}(|E||V|^2)$
  C.append(c);
sort(C); — $\mathcal{O}(|C| \log(|C|))$
while $\dim(\mathbf{B}) < (|E| - |V| + 1)$ **do** ▷ Jede Basis **B** ist gleich groß
  $c = C$.pop_front();
  if $0 == \dim(\ker\left((\mathbf{B}\ c)^{\mathsf{T}}\right))$ **then** ▷ Überprüfe lineare Unabhängigkeit
    $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ c\end{pmatrix}$;
return **B** ; ▷ Kreisbasis

Hortons Algorithmus

Karlsruher Institut für Technologie

Data: A network $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \text{cap}, b)$.
Result: Minimale Zyklenbasis.

$\mathbf{B} = ()$;

$\mathbf{A}^\star = \texttt{APSP}(\mathbf{A}\ (\mathcal{N}))$; ▷ Adjazenzmatrix Multiplikation $\mathbf{A}^{|V|-1}$ (Transitiver Abschluss) — $\mathcal{O}(|V|^3)$

forall $u \in V$ **and** $\{v, w\} \in E(G)$ **with** $w \neq u \neq v \neq w$ **do** — $\mathcal{O}(|E||V|^2)$
  $c = \mathbf{A}^\star_{u,v} + \mathbf{A}^\star_{u,w} + \{v, w\}$;
  C.append(c);

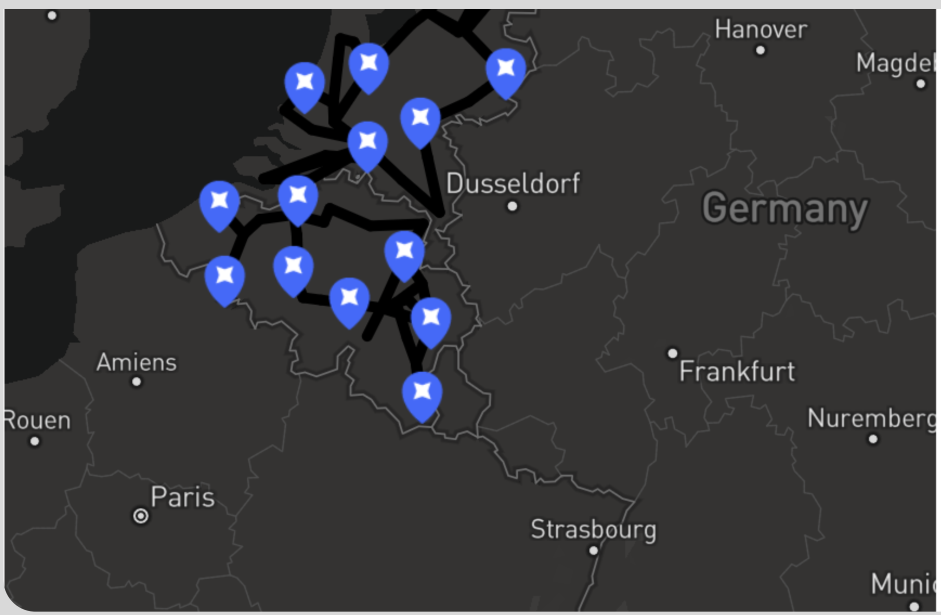
$\texttt{sort}(C)$; — $\mathcal{O}(|C| \log(|C|))$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{while } \dim(\mathbf{B}) < (|E| - |V| + 1) \textbf{ do} \quad \triangleright \text{ Jede Basis } \mathbf{B} \text{ ist gleich groß} \\ \quad c = C.\texttt{pop\_front}(); \\ \quad \textbf{if } 0 == \dim(\ker((\mathbf{B}\ c)^{\mathsf{T}})) \textbf{ then} \quad \triangleright \text{ Überprüfe lineare Unabhängigkeit} \\ \quad\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ c \end{pmatrix}; \end{array}\right\} \mathcal{O}(\ell|V||E|)$$

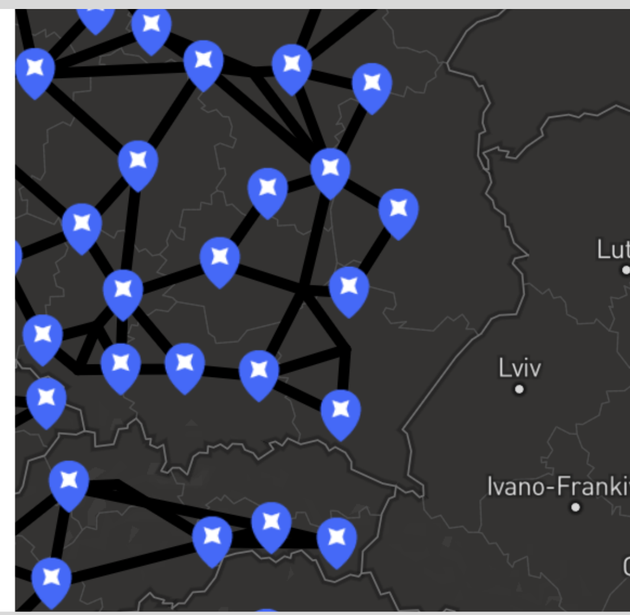
return $\mathbf{B}$; ▷ Kreisbasis

ℓ ist die Anzahl an Schleifendurchläufen, d.h., $\mathcal{O}(|V||E|)$

Dualität in Graphen und elektrischen Flüssen



conductance = 0
susceptance = -0.0848602
charge = 0
thermalLimitA = 0.7
thermalLimitB = 0
thermalLimitC = 0
tapRatio = 1
angleShift = 0
capitalCost = 3113.75
length = 95.8056
numberOfParallelLines = 2
nominalApparentPower = 3396.21
nominalVoltage = 380
NominalApparentPowerBound =



Primale und Duale Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

Satz 20 [S.522, Satz 23; Whitney, 1935]

Sei G ein eingebetteter planarer primaler Graph mit einem dualen Graphen $G^\star$. Die Graphen G und $G^\star$ sind dual genau dann wenn es eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$ zwischen ihren Kanten gibt, sodass die Basen in dem einen den Basen im Komplement des anderen entsprechen.

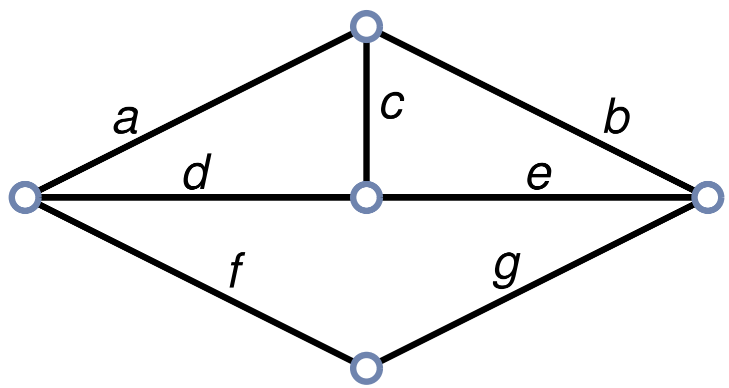
Primale und Duale Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

Satz 20 [S.522, Satz 23; Whitney, 1935]

Sei G ein eingebetteter planarer primaler Graph mit einem dualen Graphen $G^\star$. Die Graphen G und $G^\star$ sind dual genau dann wenn es eine Bijektion $\mu_{\text{dual}}: E(G) \to E(G^\star)$ zwischen ihren Kanten gibt, sodass die Basen in dem einen den Basen im Komplement des anderen entsprechen.

Primalgraph G

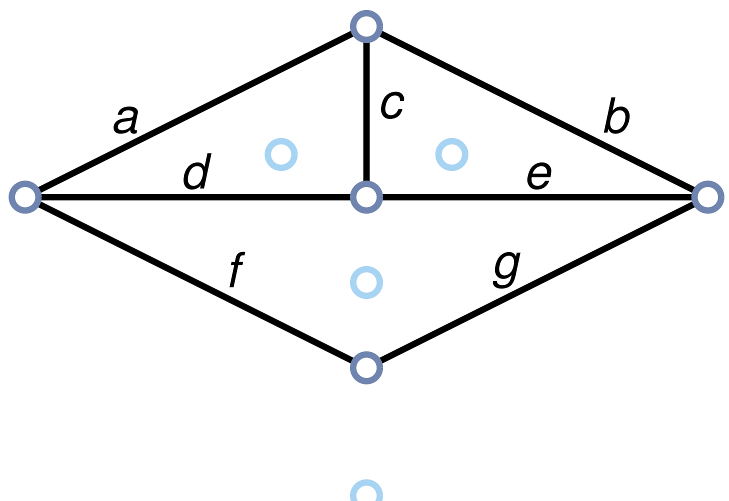


Primale und Duale Graphen

Satz 20 [S.522, Satz 23; Whitney, 1935]

Sei G ein eingebetteter planarer primaler Graph mit einem dualen Graphen $G^\star$. Die Graphen G und $G^\star$ sind dual genau dann wenn es eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$ zwischen ihren Kanten gibt, sodass die Basen in dem einen den Basen im Komplement des anderen entsprechen.

Primalgraph G



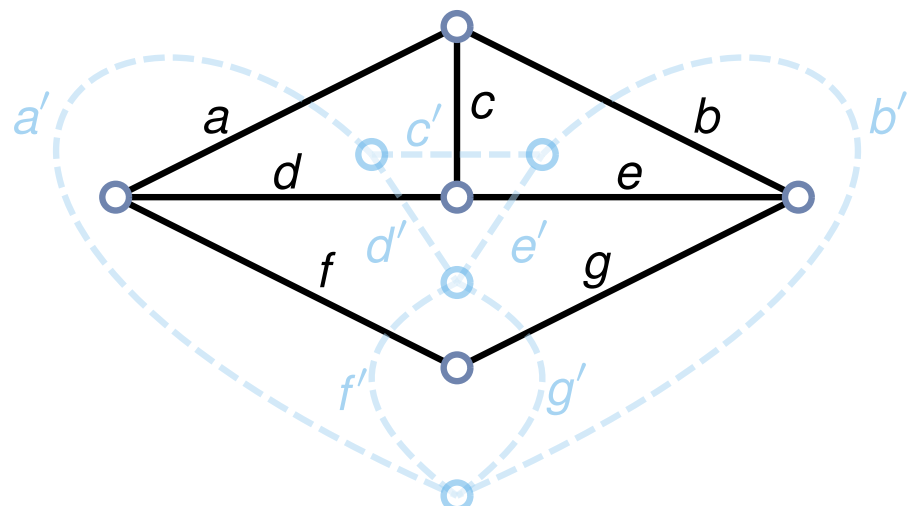
Primale und Duale Graphen

Satz 20 [S.522, Satz 23; Whitney, 1935]

Sei G ein eingebetteter planarer primaler Graph mit einem dualen Graphen $G^\star$. Die Graphen G und $G^\star$ sind dual genau dann wenn es eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$ zwischen ihren Kanten gibt, sodass die Basen in dem einen den Basen im Komplement des anderen entsprechen.

Primalgraph G

Dualgraph $G^\star$



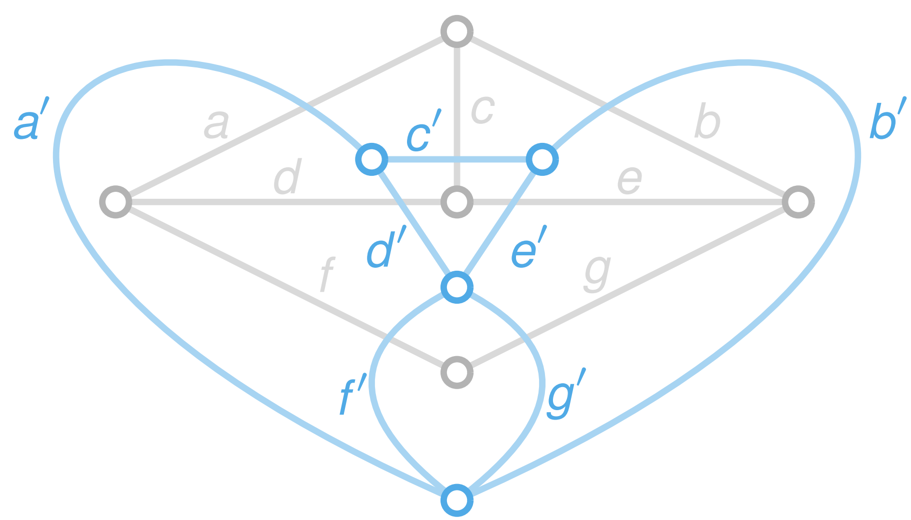
Primale und Duale Graphen

Satz 20 [S.522, Satz 23; Whitney, 1935]

Sei G ein eingebetteter planarer primaler Graph mit einem dualen Graphen $G^\star$. Die Graphen G und $G^\star$ sind dual genau dann wenn es eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$ zwischen ihren Kanten gibt, sodass die Basen in dem einen den Basen im Komplement des anderen entsprechen.

Primalgraph G

Dualgraph $G^\star$



Primale und Duale Graphen

Satz 20 [S.522, Satz 23; Whitney, 1935]

Sei G ein eingebetteter planarer primaler Graph mit einem dualen Graphen $G^\star$. Die Graphen G und $G^\star$ sind dual genau dann wenn es eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$ zwischen ihren Kanten gibt, sodass die Basen in dem einen den Basen im Komplement des anderen entsprechen.

Logische Folge 21 [S.85, Korollar 4-24; Seshu und Reed, 1961]

Wenn G und $G^\star$ duale Graphen sind, die Inzidenzmatrix der beiden Graphen ist eine Zyklusmatrix des anderen (mit entsprechendem Rank, und jede Zeile repräsentiert einen Zyklus); das bedeutet

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{B}_2 \text{ and } \mathbf{I}_2 = \mathbf{B}_1.$$

Umformulierung des Leistungsflussproblemes

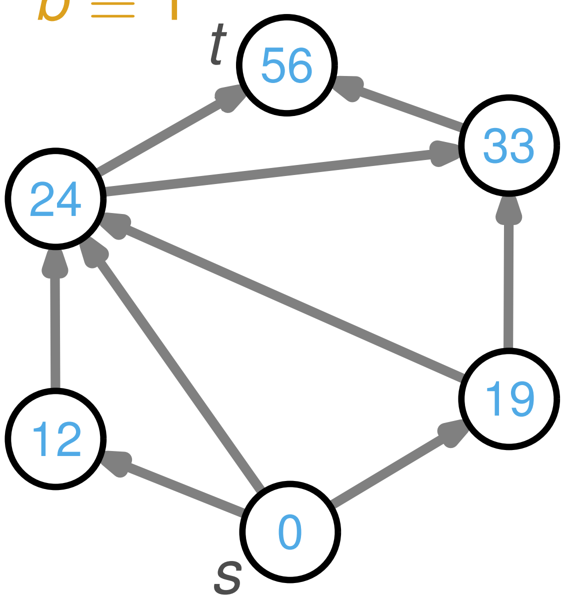
PLANARER s-t (MAXIMALER) DC-LEISTUNGSFLUSS

Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star} : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\text{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$

$b \equiv 1$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Umformulierung des Leistungsflussproblemes

Karlsruher Institut für Technologie

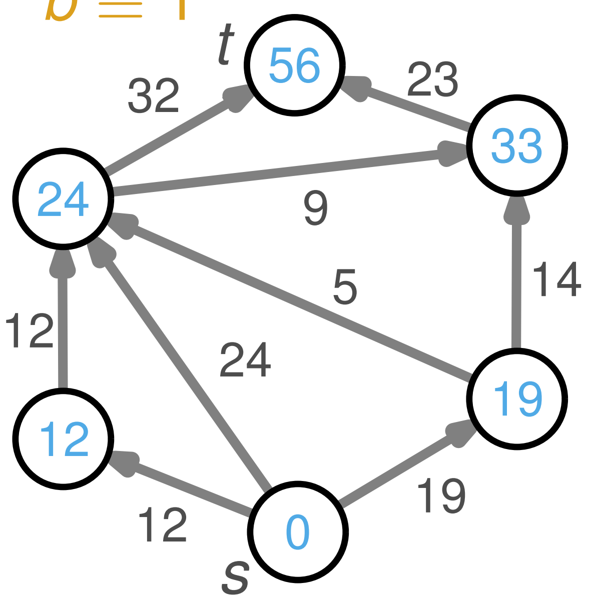
PLANARER s-t (MAXIMALER) DC-LEISTUNGSFLUSS

Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star} : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\text{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$

$b \equiv 1$



Umformulierung des Leistungsflussproblemes

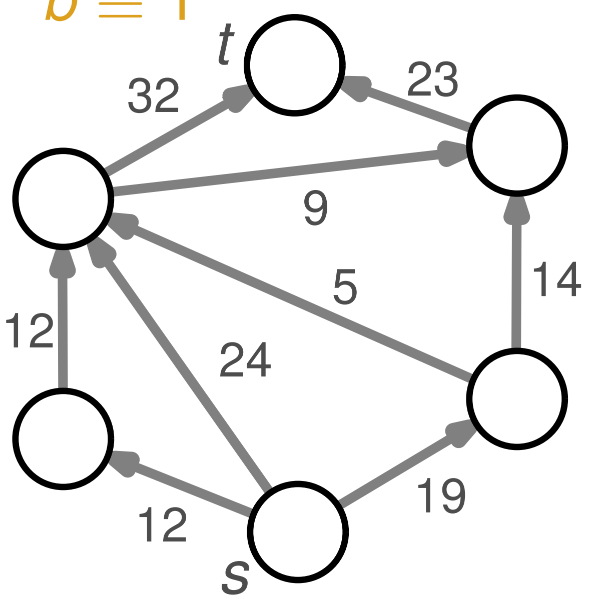
Planarer s-t (Maximaler) DC-Leistungsfluss

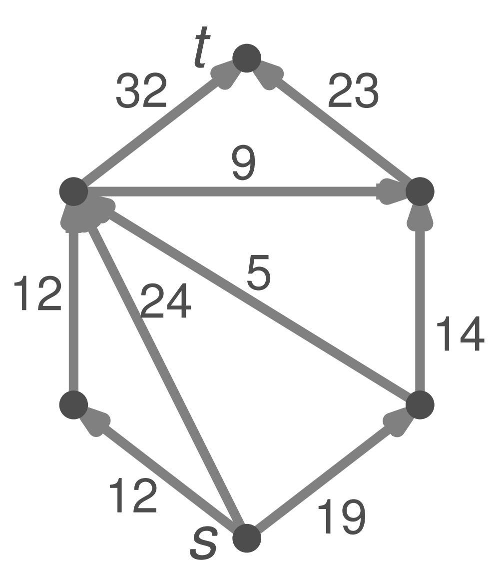
Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star} : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\text{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$

$b \equiv 1$





Umformulierung des Leistungsflussproblemes

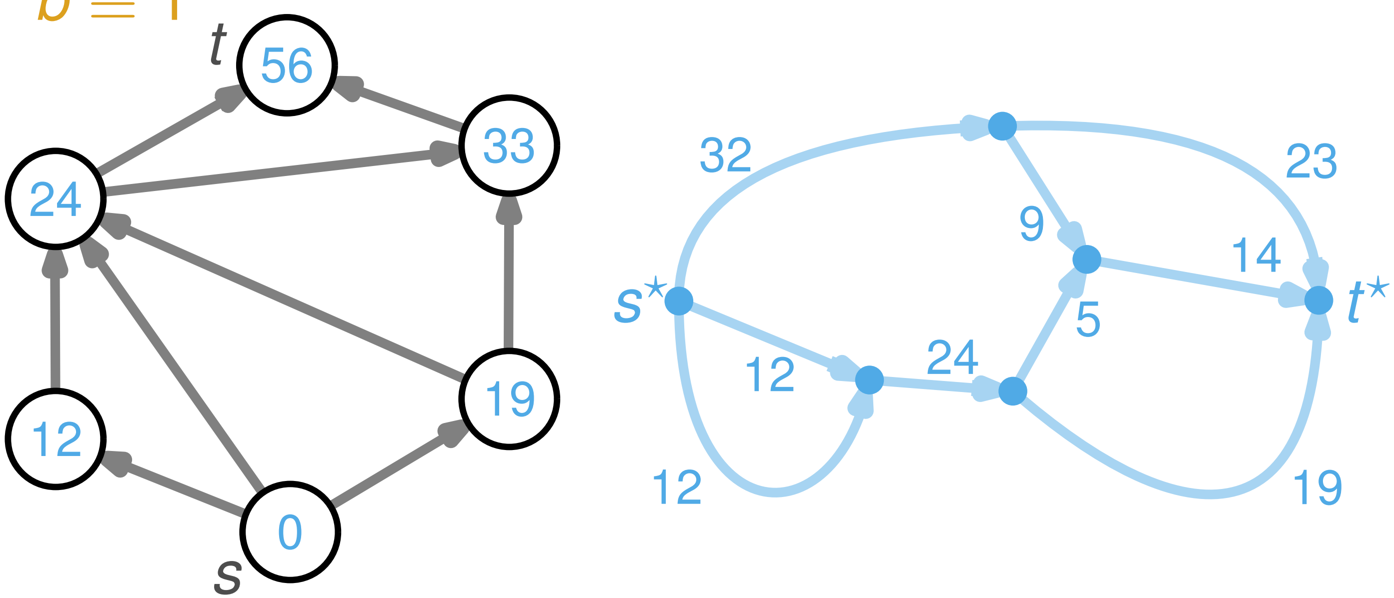
Planarer s-t (Maximaler) DC-Leistungsfluss

Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\mathrm{dual}} : E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star} : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\mathrm{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$

$b \equiv 1$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Umformulierung des Leistungsflussproblemes

Karlsruher Institut für Technologie

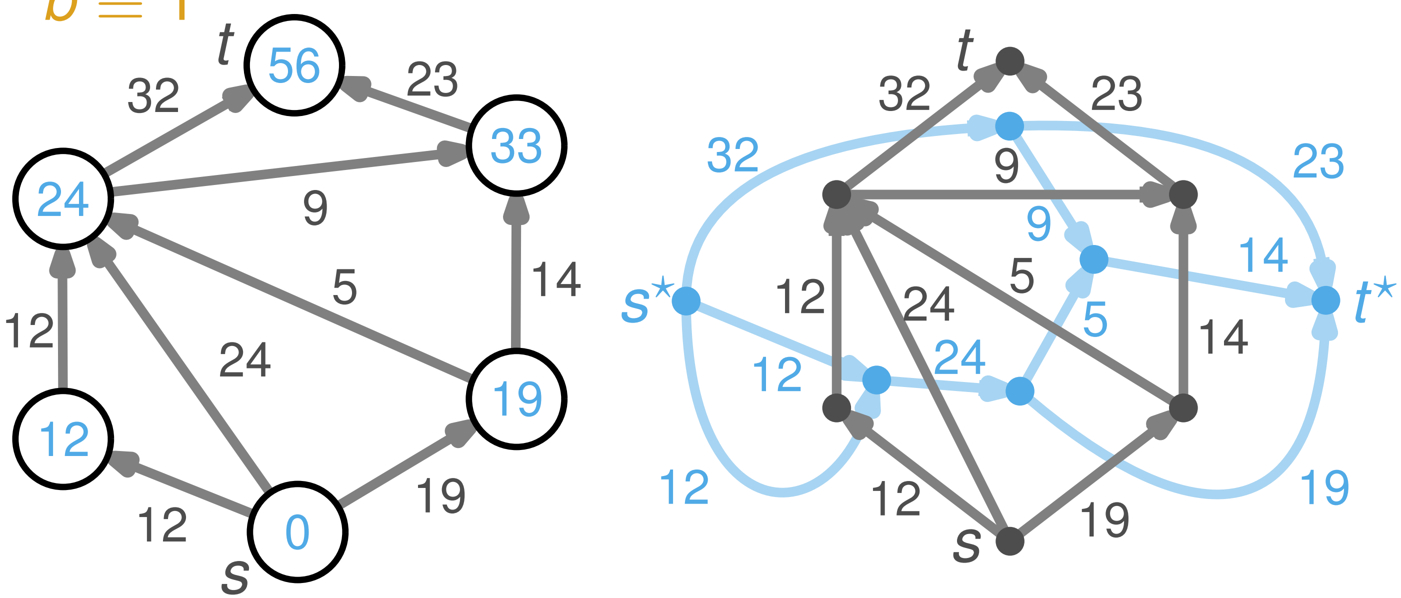
PLANARER s-t (MAXIMALER) DC-LEISTUNGSFLUSS

Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\text{dual}}: E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star}: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\text{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$

$b \equiv 1$



Umformulierung des Leistungsflussproblemes

Karlsruher Institut für Technologie

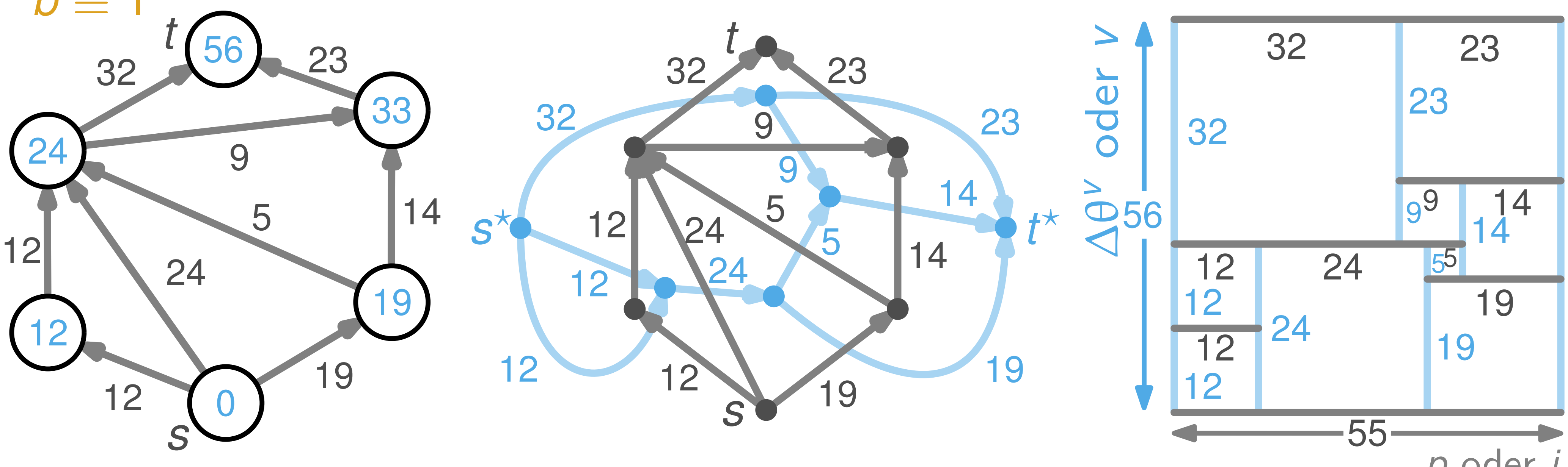
Planarer s-t (Maximaler) DC-Leistungsfluss

Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\text{dual}}\colon E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star} \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\text{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$

$b \equiv 1$



[Felsner, 2013]

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Umformulierung des Leistungsflussproblemes

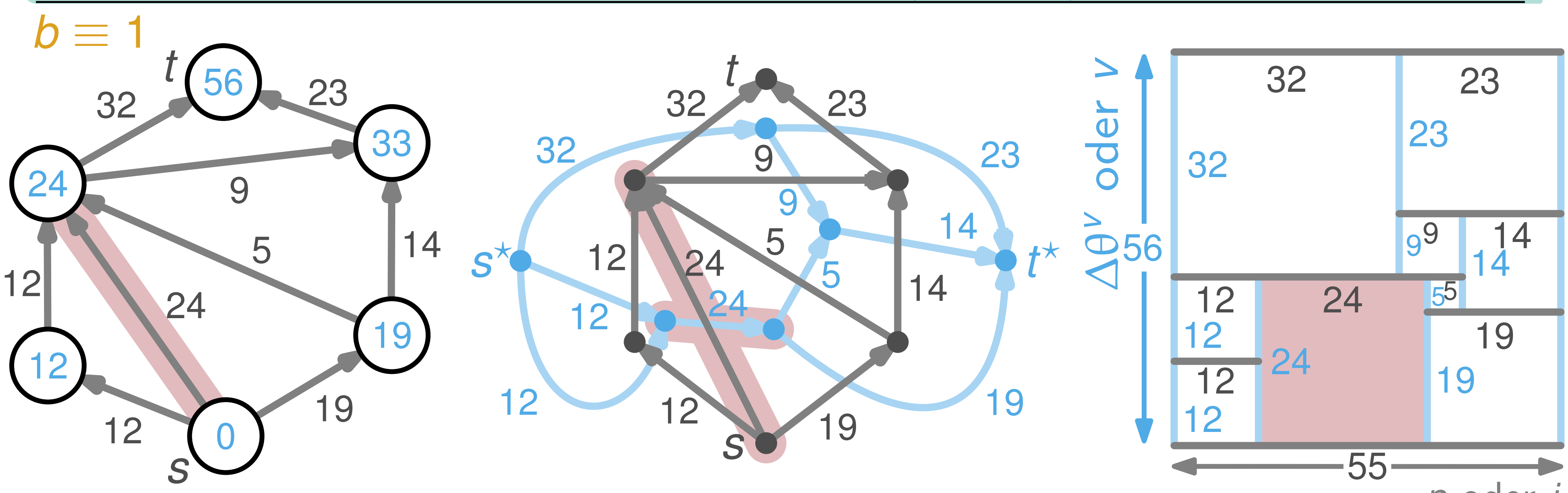
Karlsruher Institut für Technologie

Planarer s-t (Maximaler) DC-Leistungsfluss

Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\mathrm{dual}}\colon E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\mathrm{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$



[Felsner, 2013]

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Umformulierung des Leistungsflussproblemes

PLANARER s-t (MAXIMALER) DC-LEISTUNGSFLUSS

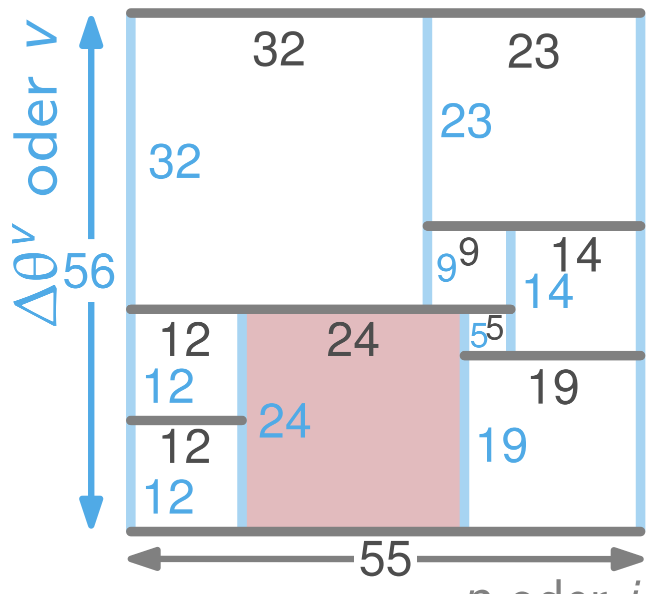
Instanz: Ein planarer s-t-Graph G, sein Dualgraph $G^\star$ und eine Bijektion $\mu_{\text{dual}} \colon E(G) \to E(G^\star)$.

Zielfunktion: Finde zulässige Flüsse $f_G, f_{G^\star}$: $E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in G und $G^\star$, sodass für jede Kante $e \in E(G)$ gilt

$$f_G(e) = f_{G^\star}\left(\mu_{\text{dual}}(e)\right) \cdot b(e).$$

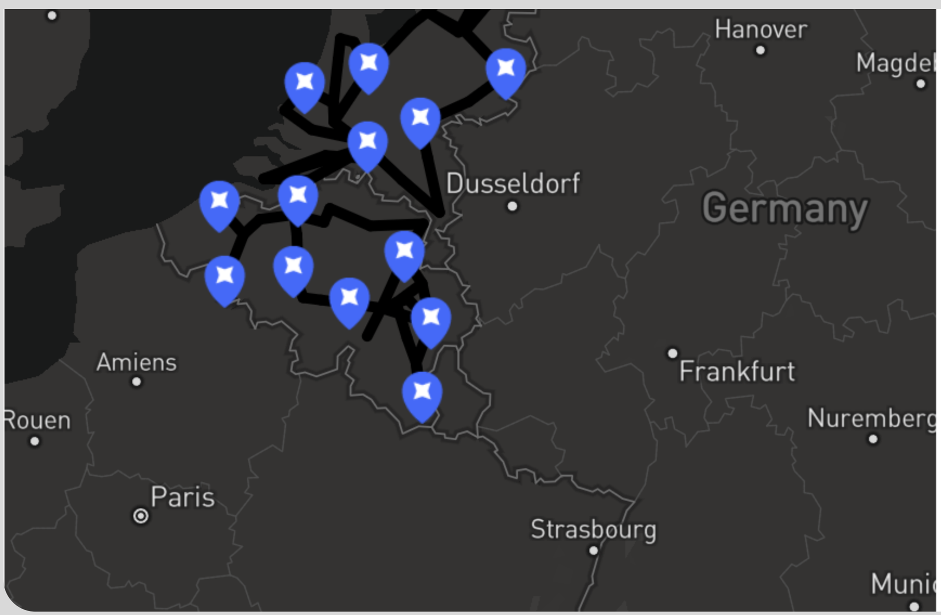
$b \equiv 1$

- Die zwei Graphen modellieren einen quadratischen Zusammenhang
- $p = v \cdot i$

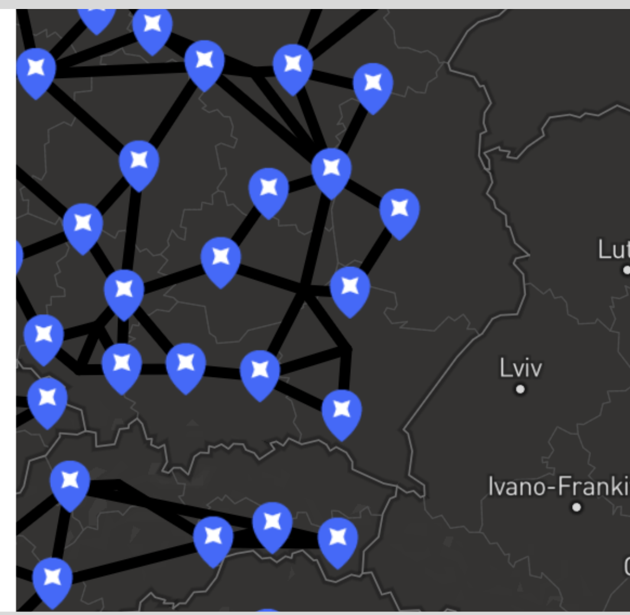


[Felsner, 2013]

DC FEAS als Minimumkostenflussproblem



conductance = 0
susceptance = -0.0848602
charge = 0
thermalLimitA = 0.7
thermalLimitB = 0
thermalLimitC = 0
tapRatio = 1
angleShift = 0
capitalCost = 3113.75
length = 95.8056
numberOfParallelLines = 2
nominalApparentPower = 3396.21
nominalVoltage = 380
NominalApparentPowerBound =



DC FEAS als Minimumkostenflussproblem

- Das DC FEAS kann auch als Minimumkostenfluss formuliert werden

$$\min \underbrace{\sum_{e \in E} f(e)^2 / b(e)}_{=: g(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|}))}$$

- Unter Einhaltung der Flusserhaltung mit Überschuß $x(u)$ am Knoten $u \in V$

$$\underbrace{x(u) - \sum_{u\colon \{u,v\} \in E} f(u,v)}_{=: h(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|}))} = 0$$

- Entspricht einem Optimierungsproblem mit mehren Veränderlichen und Nebenbedingungen (Lagrange Multiplikatoren)

$$\Lambda\big(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|}), \lambda_1, \ldots, \lambda_{|V|}\big) := g(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|})) + \sum_{u \in V} \lambda_u \big(h_u(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|}))\big)$$

$$\Lambda\colon \mathbb{R}^{|E|} \times \mathbb{R}^{|V|} \to \mathbb{R}$$

$$\big(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|}), \lambda_1, \ldots, \lambda_{|V|}\big) \mapsto \sum_{e \in E} f(e)^2 / b(e) - \sum_{u \in V} \lambda_u \cdot \big(x(u) - \sum_{v\colon \{u,v\} \in E} f(u,v)\big)$$

DC FEAS als Minimumkostenfluss

- Entspricht einem Optimierungsproblem mit mehren Veränderlichen und einer Nebenbedingung (Lagrange Multiplikatoren)

$$\Lambda\left(f(e_1),\dots,f(e_{|E|}),\lambda_1,\dots,\lambda_{|V|}\right) \coloneqq g(f(e_1),\dots,f(e_{|E|})) + \sum_{u\in V}\lambda_u\left(h_u(f(e_1),\dots,f(e_{|E|}))\right)$$

$$\Lambda\colon \mathbb{R}^{|E|}\times\mathbb{R}^{|V|}\to\mathbb{R}$$

$$\left(f(e_1),\dots,f(e_{|E|}),\lambda_1,\dots,\lambda_{|V|}\right)\mapsto \sum_{e\in E} f(e)^2/b(e) - \sum_{u\in V}\lambda_u\cdot\left(x(u)-\sum_{v\colon\{u,v\}\in E} f(u,v)\right)$$

- Jacobi-Matrix

$$J_\Lambda(f(e_1),\dots,f(e_{|E|}),\lambda_1,\dots,\lambda_{|V|}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Lambda}{\partial f(e_1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial f(e_{|E|})} \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_{|V|}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2f(e_1)}{b(e_1)} - \lambda_{e_1 v_1} + \lambda_{e_1 v_2} \\ \vdots \\ \frac{2f(e_{|E|})}{b(e_{|E|})} - \lambda_{e_{|E|} v_1} + \lambda_{e_{|E|} v_2} \\ -x(v_1) + \sum_{u\colon\{v_1,u\}\in E} f(v_1,u) \\ \vdots \\ -x(v_{|V|}) + \sum_{u\colon\{v_{|V|},u\}\in E} f(v_{|V|},u) \end{pmatrix}$$

- Hesse-Matrix

$$H_\Lambda(f(e_1),\dots,f(e_{|E|}),\lambda_1,\dots,\lambda_{|V|}) = \left(\begin{array}{c|c} 1^{|E|\times 1}\cdot\left(2/b(e)\right)_{e\in E} & (-1)\cdot\mathbf{I}^\mathsf{T} \\ \hline (-1)\cdot\mathbf{I} & 0 \end{array}\right)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Algorithmen für das Minimumkostenfluss-problem mit quadratischer Zielfunktion

- Flusswert $F(\mathcal{N}, f)$ vom Fluss f auf $\mathcal{N}$ ist definiert durch
$$\sum_{u \in V_G} f_{\text{net}}(u)$$
- Der Minimum-Cost Fluss (MCF) besitzt den Wert
$$\text{OPT}_{\text{MCFP}}(\mathcal{N}) = \min \sum_{e \in E} \gamma(f(e)),$$
wobei $\gamma(f(e)) = {f(e)^2}/{b(e)}$ die Kantenkosten sind (Verlustleistung) und f ein gültiger Fluss ist, wenn

$$\begin{aligned}
f_{\text{net}}(u) &= 0 && \forall u \in V \setminus (V_G \cup V_D) \\
-\infty \leq f_{\text{net}}(u) &\leq -\underline{p_d} && \forall u \in V_D \\
0 \leq f_{\text{net}}(u) &\leq \infty && \forall u \in V_G \\
|f(u,v)| &\leq \text{cap}(u,v) && \forall (u,v) \in E
\end{aligned}$$

MCFP Überblick

Karlsruher Institut für Technologie

Lineares MCFP

Out-of-Kilter-Algorithm, 1967
Cycle-Cancelling Algorithm, 1967
Edmonds & Karp, 1972
Successive Shortest Path Algorithm
Tardos, 1985
Network Simplex Algorithm, 2009

Konvex Separierbares MCFP

Minoux, 1984

Végh, 2016 (quadratisch)

Minoux

Annahmen

- Netzwerk $\mathcal{N}$ ist frei von Kapazitäten, d.h. $\underline{\text{cap}}(e) = 0, \overline{\text{cap}}(e) = \infty$ für alle $e \in E$
- Residualnetzwerk $G_f = (V, E_f)$ with $E_f = E \cup \{(v, u) \notin E : (u, v) \in E \wedge f(u, v) \geq 0\}$
- Kostenfunktion $\gamma_e(f(e))$

Abbruchkriterium

Definition 22 [Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung]

$$\nabla \Lambda\big(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|}), \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell, \lambda_1, \ldots, \lambda_{|V|}\big)$$

Ein zulässiger Fluss f ist optimal genau dann wenn G_f keine *negativen* Zyklen bezogen auf die Metrik $\gamma'_e(f(e))$ mit $e \in E_f$ enthält.

Minoux

Karlsruher Institut für Technologie

Annahmen

- Netzwerk $\mathcal{N}$ ist frei von Kapazitäten, d.h. $\underline{\mathrm{cap}}(e) = 0, \overline{\mathrm{cap}}(e) = \infty$ für alle $e \in E$
- Residualnetzwerk $G_f = (V, E_f)$ with $E_f = E \cup \{(v,u) \notin E \colon (u,v) \in E \wedge f(u,v) \geq 0\}$
- Kostenfunktion $\gamma_e(f(e))$

Abbruchkriterium

Definition 22 [Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung]

$$\nabla\Lambda\big(f(e_1), \ldots, f(e_{|E|}), \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell, \lambda_1, \ldots, \lambda_{|V|}\big)$$

Ein zulässiger Fluss f ist optimal genau dann wenn G_f keine *negativen* Zyklen bezogen auf die Metrik $\gamma'_e(f(e))$ mit $e \in E_f$ enthält.

$$\Leftrightarrow$$

$$\theta^v(v) - \theta^v(u) \leq \frac{\partial\gamma_{(u,v)}(f(u,v))}{\partial f(u,v)} \qquad \forall (u,v) \in E$$

Minoux

Karlsruher Institut für Technologie

Annahmen

- Netzwerk $\mathcal{N}$ ist frei von Kapazitäten, d.h. $\underline{\text{cap}}(e) = 0, \overline{\text{cap}}(e) = \infty$ für alle $e \in E$
- Residualnetzwerk $G_f = (V, E_f)$ with $E_f = E \cup \{(v,u) \notin E : (u,v) \in E \wedge f(u,v) \geq 0\}$
- Kostenfunktion $\gamma_e(f(e))$

Abbruchkriterium

Definition 23 [Lagrange-Bedingung]

$$\nabla\Lambda\big(f(e_1),\dots,f(e_{|E|}),\lambda_1,\dots,\lambda_{|V|}\big) = J_\Lambda(f(e_1),\dots,f(e_{|E|}),\lambda_1,\dots,\lambda_{|V|})$$

Ein zulässiger Fluss f ist optimal genau dann wenn E_f keine Kreise *ungleich 0* enthält bezüglich $\gamma'(f(e))$.

$$\Leftrightarrow$$

$$\theta^v(v) - \theta^v(u) = \frac{\partial\gamma_{(u,v)}(f(u,v))}{\partial f(u,v)} \qquad \forall (u,v) \in E$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Minoux

Skalierungsfaktor Δ

- Relaxierung mittels Δ
- Skalierungsfaktor wird um $1/2$ angepasst in jeder Phase
- Fluss ist in Abhängigkeit von Δ
- Je mehr $\Delta \rightarrow 0$ je näher kommen wir einer zulässigen Lösung

Invariant [Relaxierung]

Der Fluss $f(e) \geq 0$ für alle $e \in E$, sodass keine negativen Kostenkreise in Bezug auf die Metrik $\gamma'_e(f(e) + \Delta)$.

Verletzungen der Flusserhaltung

- Flüsse dürfen einen Überschuß von $\pm\Delta$ am Knoten besitzen

Minoux Algorithmus für DC FEAS

Data: Ein Netzwerk $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \underline{\mathrm{cap}} \equiv 0, \overline{\mathrm{cap}} \equiv \infty, b)$, und Kantenkosten $\gamma_e = f(e)^2/b(e)$.
Result: Minimum-Cost Flow f.

$f \equiv 0$;
$\Delta = \max_{v \in V} |f_{\mathrm{net}}(v)|$;
$\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta$; $\forall e \in E_f$;
while true **do**
  while $\exists u, v \in V\colon f_{\mathrm{net}}(u) \geq \Delta \wedge f_{\mathrm{net}}(v) \leq -\Delta$ **do** ▷ Solange Knoten mit Überschuß existieren
    $\pi_{SP} = \mathrm{SP}(G_f, \gamma, u, v)$;
    $f(e) = f(e) + \Delta$; $\forall e \in E_f(\pi_{SP})$;
    $\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta$; $\forall e \in E_f(\pi_{SP})$; ▷ Aktualisierung der Kosten
  if $f_{\mathrm{net}}(u) = 0 \quad \forall u \in V \wedge \Delta\theta^V(u, v) == \gamma_{(u,v)}(f(u, v)) \quad \forall (u, v) \in E$ **then** Optimalitätsbedingung
    break;
  $\Delta = \Delta/2$; ▷ Skalierungsphase
  $\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta$; $\forall e \in E_f$; ▷ Aktualisierung der Kosten mit neuem Delta
  $E' = \left\{(u, v) \in E \mid \Delta\theta^V(e) \geq \frac{\partial \gamma_e(f(e)+\Delta)}{\partial f(e)} \vee \Delta\theta^V(e) \leq \frac{\partial \gamma_e(f(e)-\Delta)}{\partial f(e)}\right\}$;
  if $E' \neq \emptyset$ **then**
    $f(e) = \frac{\Delta\theta^V(e)b(e) - 2\Delta}{2}$; $\forall e \in E'$; ▷ Aktualisierung der Flüsse
return f, γ'; ▷ Kreisbasis

Minoux Algorithmus für DC FEAS

Data: Ein Netzwerk $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \underline{cap} \equiv 0, \overline{cap} \equiv \infty, b)$, und Kantenkosten $\gamma_e = f(e)^2/b(e)$.
Result: Minimum-Cost Flow f.

$f \equiv 0$;
$\Delta = \max_{v \in V} |f_{net}(v)|$;
$\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta$; $\quad \forall e \in E_f$;
while true **do**
  while $\exists u, v \in V\colon f_{net}(u) \geq \Delta \wedge f_{net}(v) \leq -\Delta$ **do** ▷ Solange Knoten mit Überschuß existieren
    $\pi_{SP} = \mathrm{SP}(G_f, \gamma, u, v)$;
    $f(e) = f(e) + \Delta$; $\quad \forall e \in E_f(\pi_{SP})$;
    $\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta$; $\quad \forall e \in E_f(\pi_{SP})$; ▷ Aktualisierung der Kosten
  if $f_{net}(u) = 0 \quad \forall u \in V \wedge \Delta\theta^V(u,v) == \gamma_{(u,v)}(f(u,v)) \quad \forall (u,v) \in E$ **then** Optimalitätsbedingung
    break;
  $\Delta = \Delta/2$; ▷ Skalierungsphase
  $\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta$; $\quad \forall e \in E_f$; ▷ Aktualisierung der Kosten mit neuem Delta
  $$E' = \left\{(u,v) \in E \mid \Delta\theta^V(e) \geq \frac{\partial \gamma_e(f(e)+\Delta)}{\partial f(e)} \vee \Delta\theta^V(e) \leq \frac{\partial \gamma_e(f(e)-\Delta)}{\partial f(e)}\right\};$$
  if $E' \neq \emptyset$ **then**
    $f(e) = \dfrac{\Delta\theta^V(e) b(e) - 2\Delta}{2}$; $\quad \forall e \in E'$; ▷ Aktualisierung der Flüsse
return f, γ'; ▷ Kreisbasis

$\rightarrow$ ähnlich KCL-Konflikt-Auflösung

Minoux Algorithmus für DC FEAS

Karlsruher Institut für Technologie

Data: Ein Netzwerk $\mathcal{N} = (G, V_G, V_D, \underline{\text{cap}} \equiv 0, \overline{\text{cap}} \equiv \infty, b)$, und Kantenkosten $\gamma_e = f(e)^2/b(e)$.
Result: Minimum-Cost Flow f.

$f \equiv 0$;
$\Delta = \max_{v \in V} |f_{\text{net}}(v)|$;
$\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta; \quad \forall e \in E_f$;
while true **do**
  while $\exists u, v \in V\colon f_{\text{net}}(u) \geq \Delta \wedge f_{\text{net}}(v) \leq -\Delta$ **do** ▷ Solange Knoten mit Überschuß existieren
    $\pi_{\text{SP}} = \text{SP}(G_f, \gamma, u, v)$;
    $f(e) = f(e) + \Delta; \quad \forall e \in E_f(\pi_{\text{SP}})$;
    $\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta; \quad \forall e \in E_f(\pi_{\text{SP}})$; ▷ Aktualisierung der Kosten
  if $f_{\text{net}}(u) = 0 \quad \forall u \in V \wedge \Delta\theta^V(u,v) == \gamma_{(u,v)}(f(u,v)) \quad \forall (u,v) \in E$ **then** Optimalitätsbedingung
    break;
  $\Delta = \Delta/2$; ▷ Skalierungsphase
  $\gamma'_e = 2 \cdot f(e) + 2 \cdot \Delta; \quad \forall e \in E_f$; ▷ Aktualisierung der Kosten mit neuem Delta
  $E' = \left\{(u,v) \in E \mid \Delta\theta^V(e) \geq \frac{\partial \gamma_e(f(e)+\Delta)}{\partial f(e)} \vee \Delta\theta^V(e) \leq \frac{\partial \gamma_e(f(e)-\Delta)}{\partial f(e)}\right\}$;
  if $E' \neq \emptyset$ **then**
    $f(e) = \frac{\Delta\theta^V(e)b(e) - 2\Delta}{2}; \quad \forall e \in E'$; ▷ Aktualisierung der Flüsse
return f, γ'; ▷ Kreisbasis

$\rightarrow$ ähnlich KCL-Konflikt-Auflösung
$\rightarrow$ ähnlich KVL-Konflikt-Auflösung

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

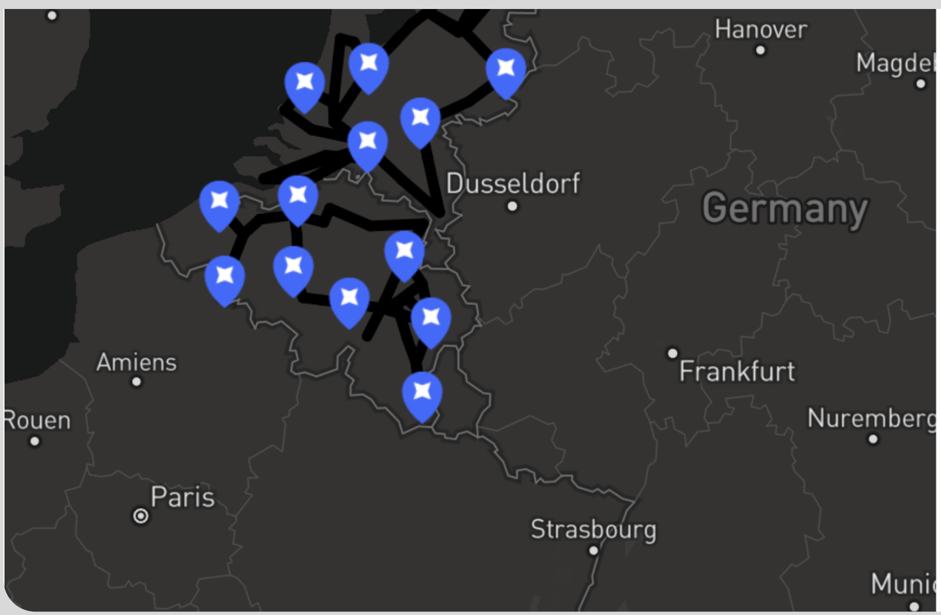
Referenzen

1. *Power systems test case archive.* University of Washington, Departement of Electrical Engineering, 1999. https://labs.ece.uw.edu/pstca/, Accessed: 2017-11-14.
2. R. K. Ahuja and James B. Orlin *A Fast and Simple Algorithm for the Maximum Flow Problem.* Journal on Operations Research, 37(5):748–759. DOI: 10.1287/opre.37.5.748, 1989.
3. Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sherali *Linear Programming and Network Flows.* John Wiley & Sons, 2011.
4. Eugene Peter Durbin and David M. Kroenke *The Out-of-kilter Algorithm: A Primer.* RAND CORP SANTA MONICA CA, 1967.
5. Jack Edmonds and Richard M. Karp *Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems.* Journal ACM, 19(2):248–264. DOI: 10.1145/321694.321699, 1972.
6. Andrew V. Goldberg, Éva Tardos, and Robert E. Tarjan *Network Flow Algorithms.* Paths, Flows, and VLSI-Layout, Springer, 1990.
7. J. D. Horton *A Polynomial-Time Algorithm to Find the Shortest Cycle Basis of a Graph.* SIAM Journal on Computing, 16(2):358–366. DOI: 10.1137/0216026, 1987.
8. Gustav Robert Kirchhoff *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird.* Annalen der Physik, 148(12):497–508. DOI: 10.1002/andp.18471481202, 1847.
9. M. Minoux *Solving Integer Minimum Cost Flows with Separable Convex Cost Objective Polynomially.* Netflow at Pisa, 237–239, 1986.

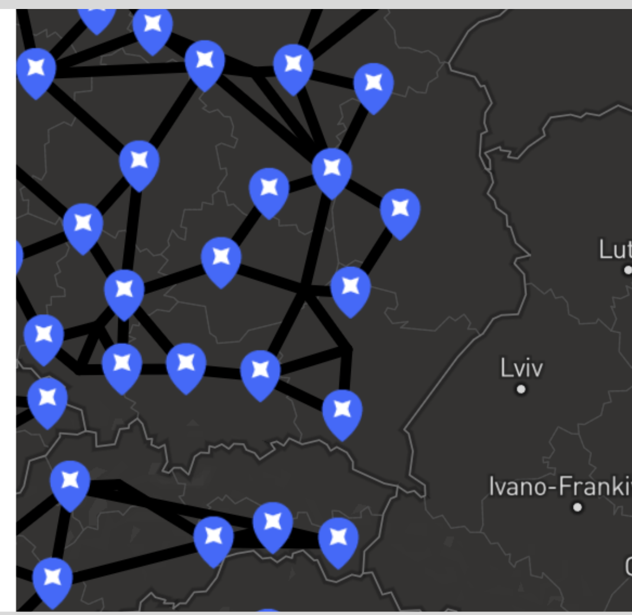
Referenzen

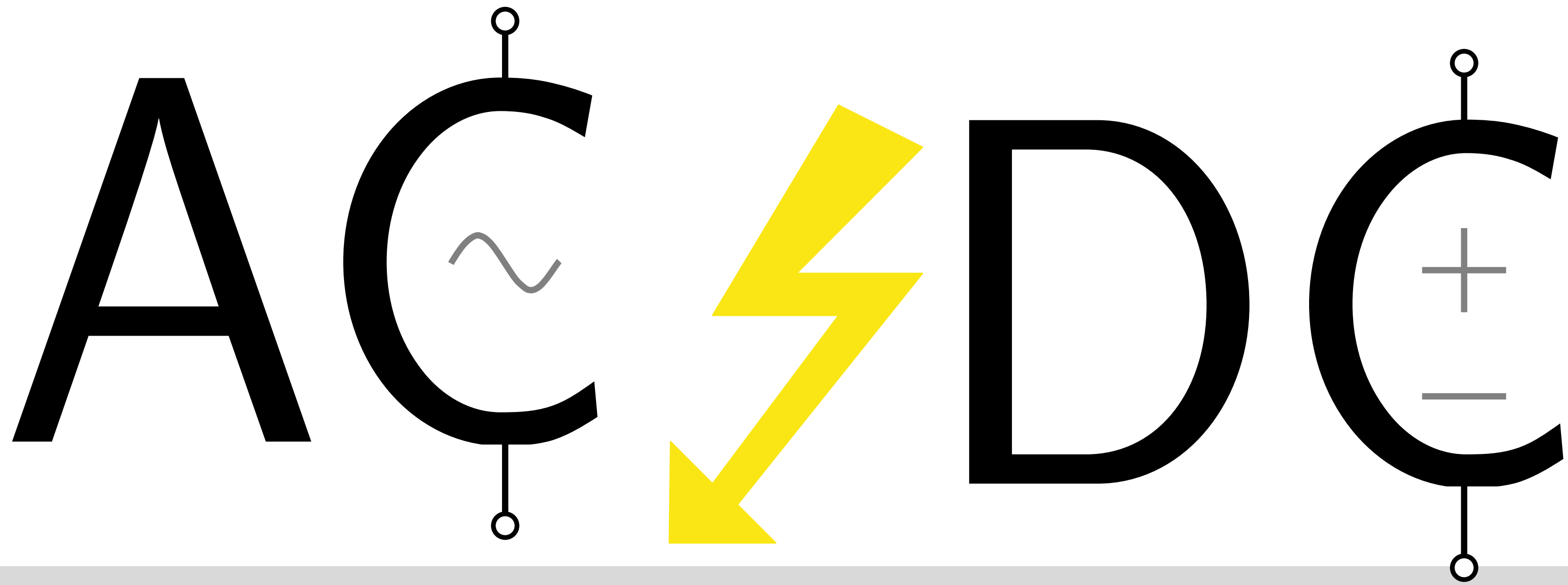
10. Sundaram Seshu and Myril B. Reed *Linear Graphs and Electrical Networks.* Addison-Wesley Publishing Company, 1961.
11. Éva Tardos *A Strongly Polynomial Minimum Cost Circulation Algorithm.* Combinatorica, 5(3):247–255, 1985.
12. László A. Végh *A Strongly Polynomial Algorithm for a Class of Minimum-Cost Flow Problems with Separable Convex Objectives.* SIAM Journal on Computing, 45(5):1729–1761, 2016.
13. Hassler Whitney *On the Abstract Properties of Linear Dependence.* American Journal of Mathematics, 57(3):509–533. DOI: 10.2307/2371182, 1935.
14. Laurence A. Wolsey *Integer Programming.* Band 52 von Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons. ISBN: 9780471283669, 1998.

Appendix

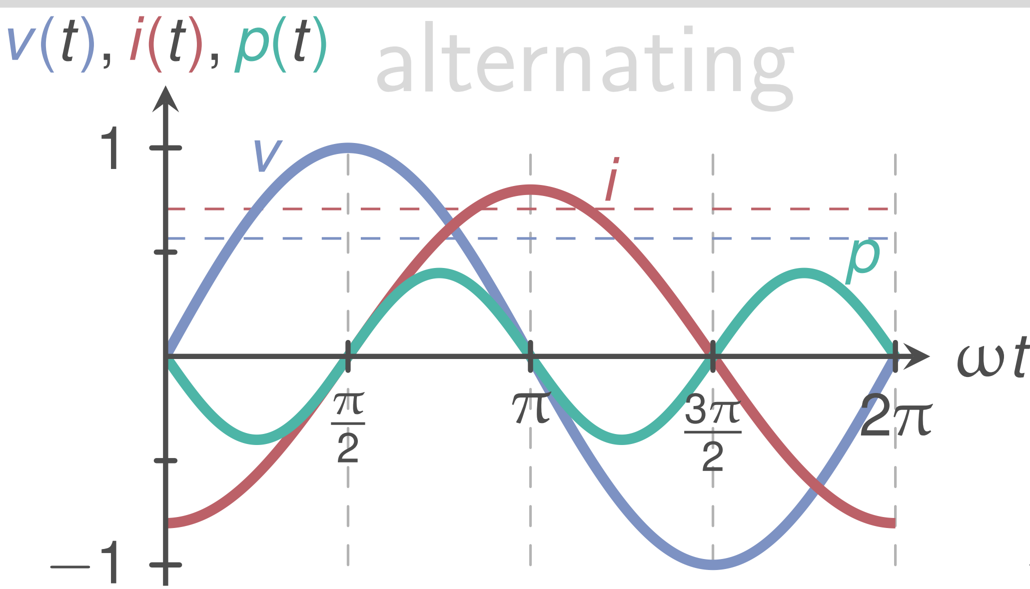


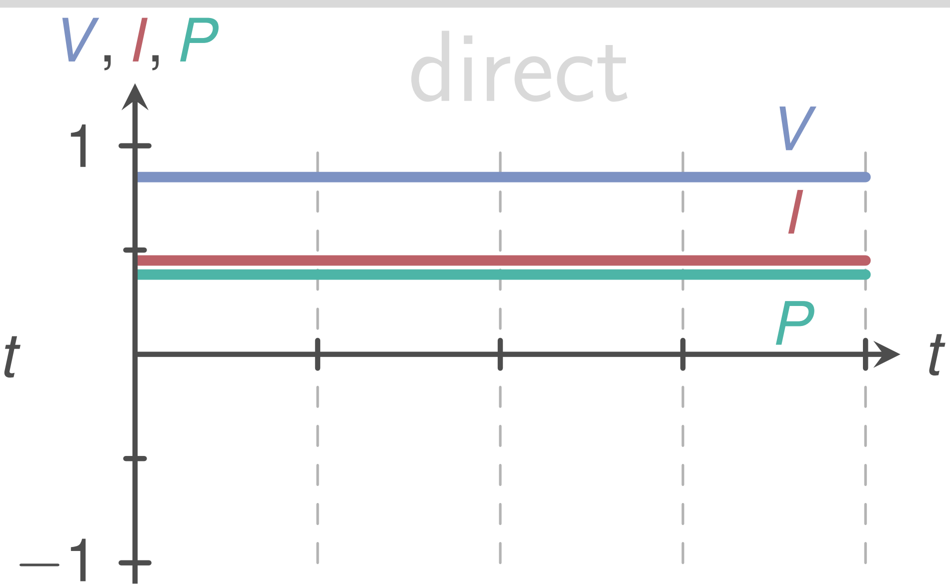
conductance = 0
susceptance = -0.0848602
charge = 0
thermalLimitA = 0.7
thermalLimitB = 0
thermalLimitC = 0
tapRatio = 1
angleShift = 0
capitalCost = 3113.75
length = 95.8056
numberOfParallelLines = 2
nominalApparentPower = 3396.21
nominalVoltage = 380
NominalApparentPowerBound =





Leistungsflussmodellierungen





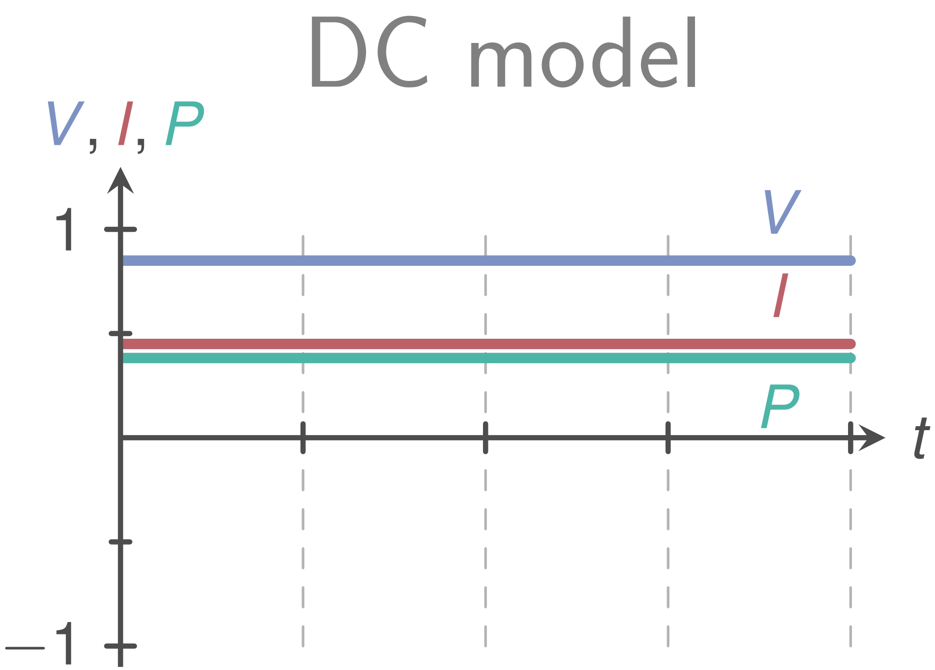
Modellierung

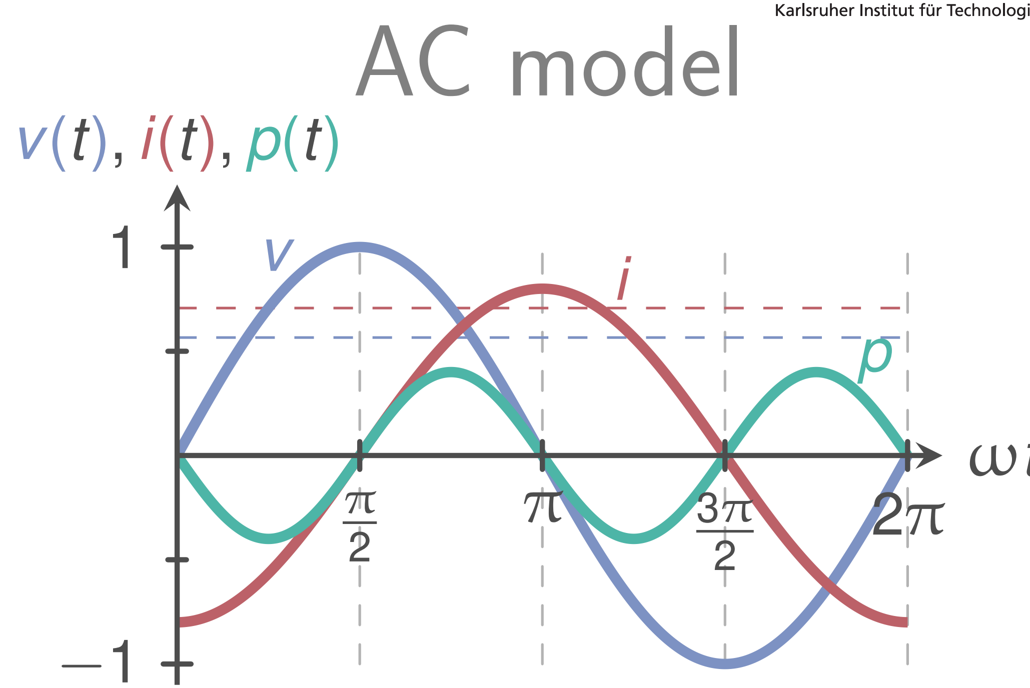
Karlsruher Institut für Technologie

- steady-state Modell typisch für die Analyse des Leistungsflusses (engl. power flow; kurz PF)
- alle Größen werden in per unit (p.u.) ausgedrückt
- komplexe Winkel werden in Rad ausgedrückt
- Offline-Quellen und Kanten werden entfernt
- Kanten, Transformatoren und Phasenschieber werden im üblichen Leitungsmodell (engl. branch model) mit dem π-Übertragungsleitungsmodell (engl. π transmission line model) dargestellt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

AC- vs. DC-Umwandlung des Flusses





- gleiche Polarität
- linear
- konvex
- die meisten digitalen Geräte nutzen DC
- erlaubt die Verbindung von verschiedenen AC Systemen

- periodisch ändernde Polarität
- komplex
- nichtkonvex
- die meisten Haushalte nutzen AC
- AC Spannungslevelumwandlung einfacher ⇒ einfacher zu verteilen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

AC- vs. DC-Umwandlung des Flusses

Karlsruher Institut für Technologie

Constraints	Polar PQV	Rectangular PQV	Rectangular IV
Network	Nicht-lineare Gleichungen mit quadratischen Termen, sin und cos Funktionen ✗	Quadratische Gleichungen	Lineare Einschränkungen ✓
Voltage angle differences	linear ✓	Nichtkonvex (arctan) ✗	Linear (mit zusätzlichen Einschränkungen) ✓
Vertices	linear ✓	Nichtkonvex quadratische Ungleichungen ✗	Lokal quadratisch, einige sind nichtkonvex, einige konvex ✗

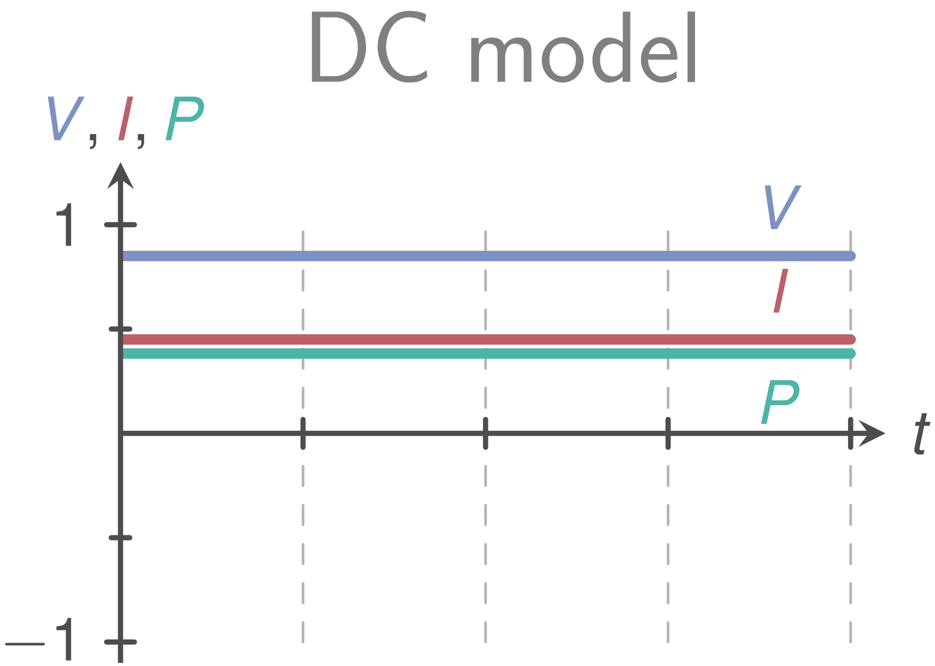
AC- vs. DC-Umwandlung des Flusses

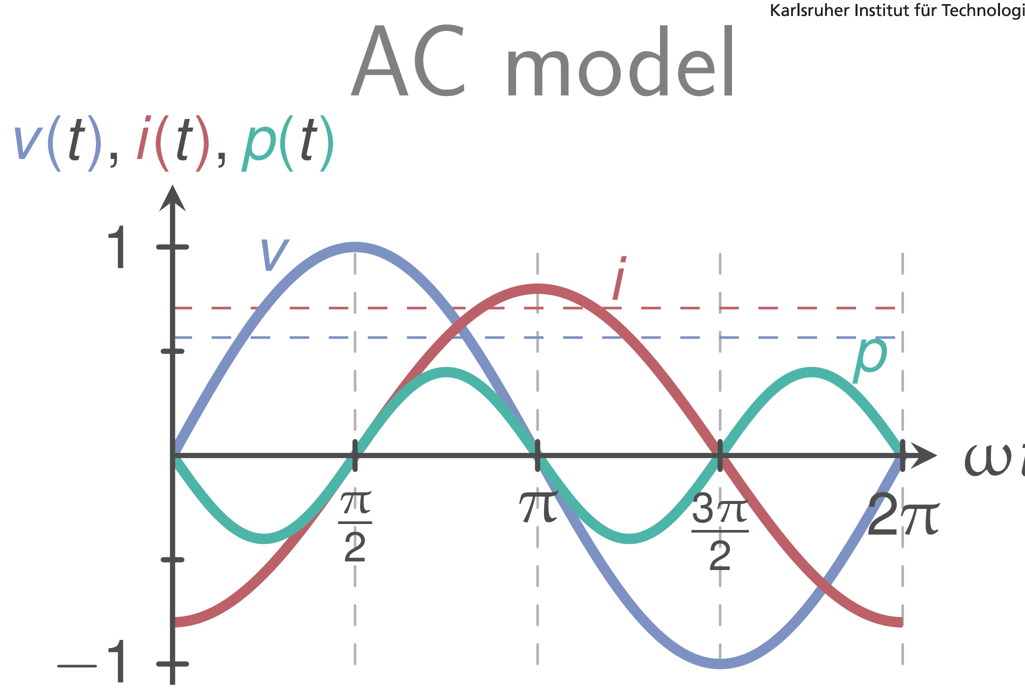
[FERC, O'Neill et al., 2012]

Constraints	Polar PQV	Rectangular PQV	Rectangular IV
angle differences	Nicht-lineare Gleichungen mit … linear ✓	Quadratische … (arctan) ✗	… Einschränkungen) ✓
Vertices	linear ✓	Nichtkonvex quadratische Ungleichungen ✗	Lokal quadratisch, einige sind nichtkonvex, einige konvex ✗

AC-Flusserhaltung ist ein **Unterproblem** von den meisten elektrischen Netzen.
AC-Flusserhaltung ist bereits **NP-schwer** auf **Bäumen**.
[Lehmann et al., 2015]
→**Linearisierte AC**-Flusserhaltung ist **einfach** zu lösen.

AC- vs. DC-Umwandlung des Flusses



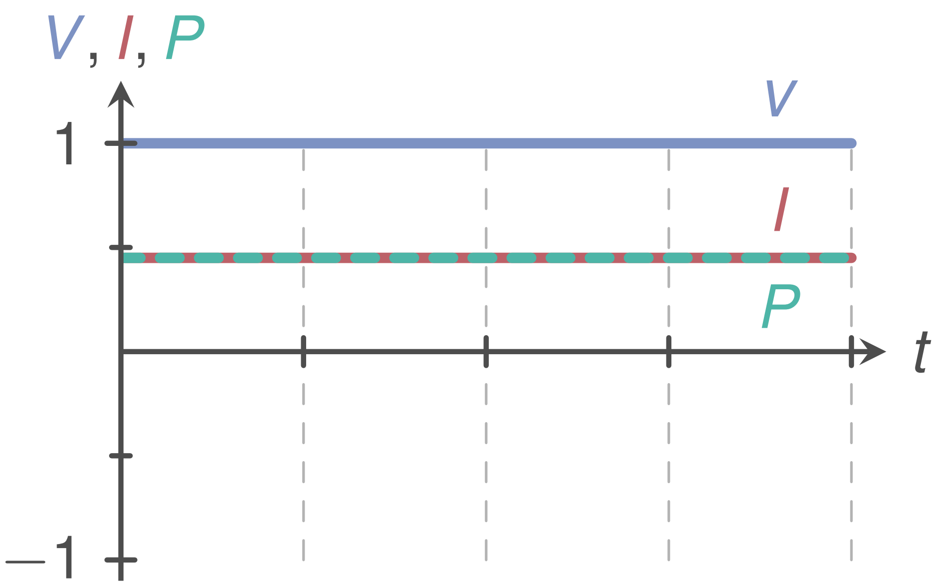


- keine schnellen und robusten Lösungstechniken
- AC model muss wöchentlich gelöst werden; alle 8 h, und 2 h; alle 15 min, 5 min, 1 min, und 30 sec

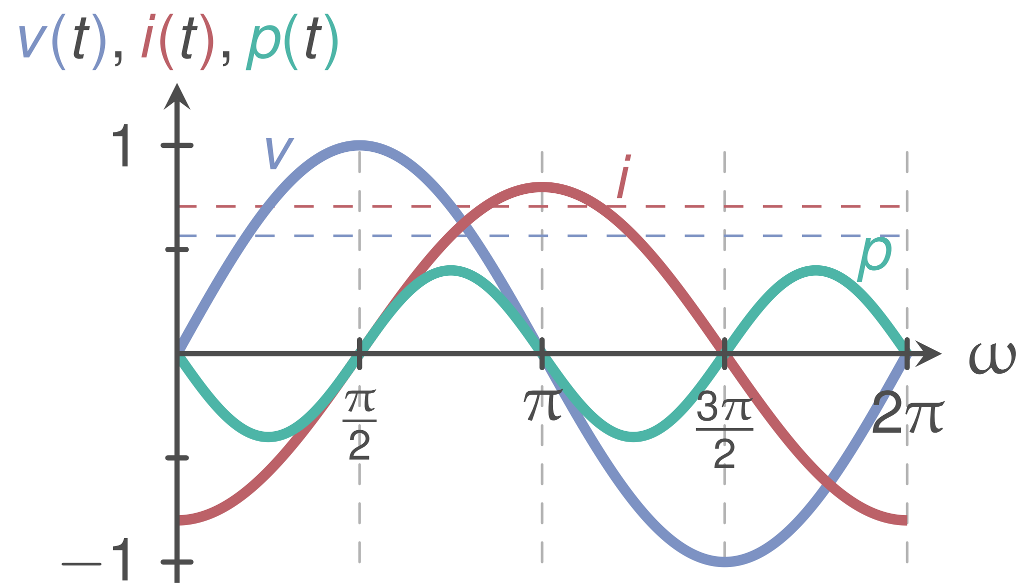
$\Rightarrow$ unterschiedliche Modellvereinfachungen

AC- vs. DC-Umwandlung des Flusses

linearized AC model



AC model



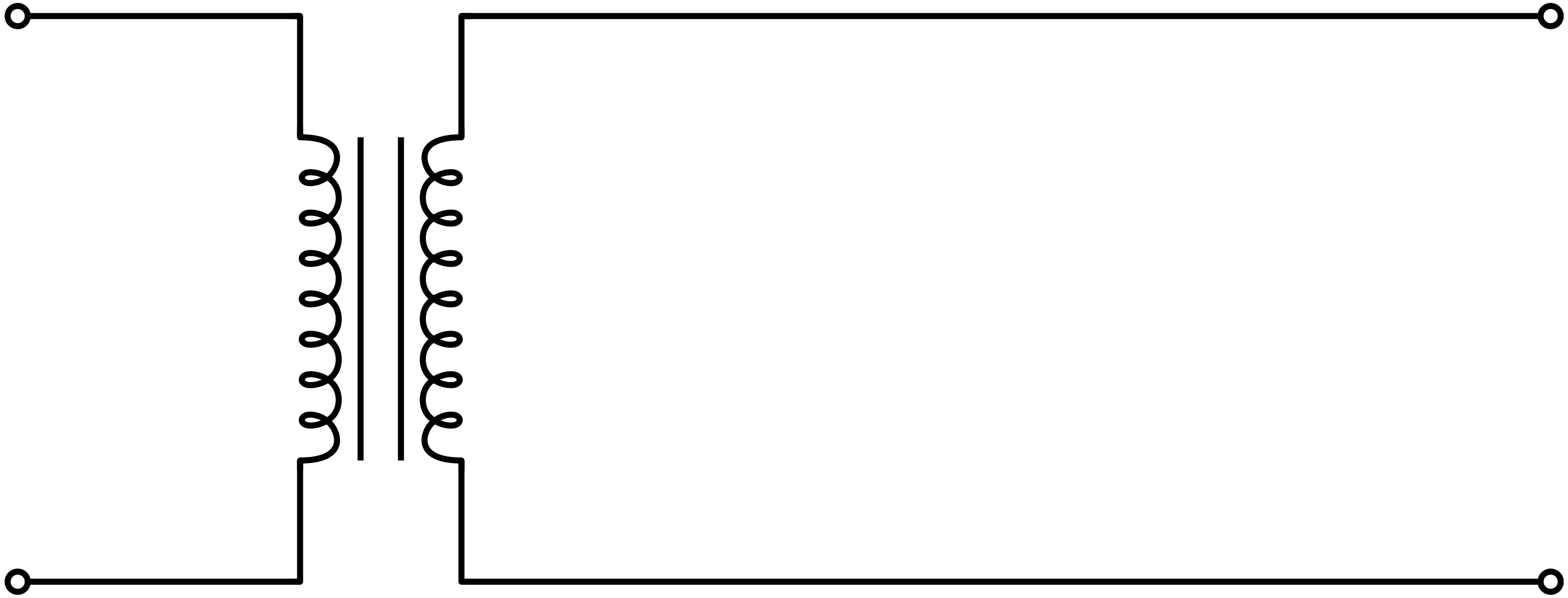
- Normalisierung des Systems
- Vernachlässigung von Widerstand, Blindleistung und anderen Elementen
- lineares Gleichungssystem

- keine schnellen und robusten Lösungstechniken
- AC model muss wöchentlich gelöst werden; alle 8 h, und 2 h; alle 15 min, 5 min, 1 min, und 30 sec

$\Rightarrow$ unterschiedliche Modellvereinfachungen

Leitungsmodell

Modellierung der Kante $e = (u, w)$

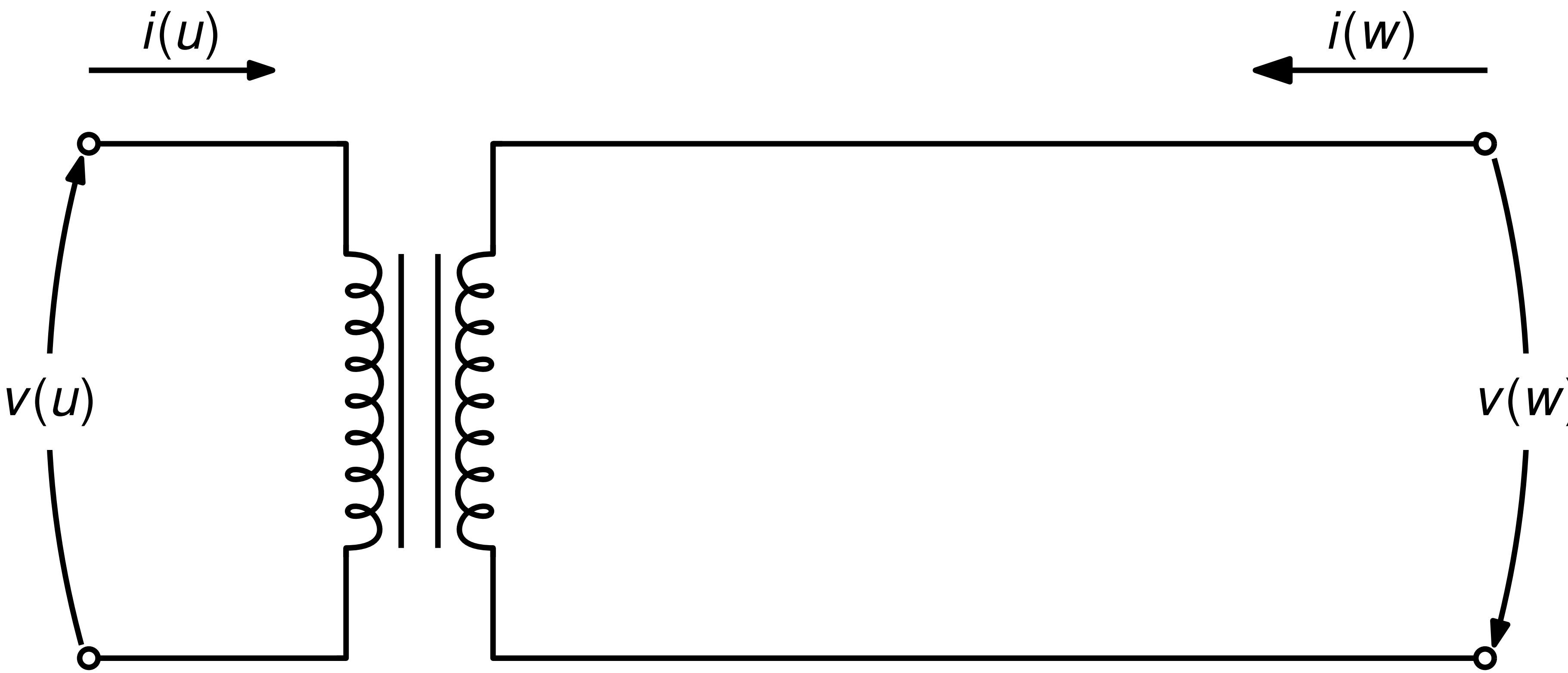


Leitungsmodell

Modellierung der Kante $e = (u, w)$

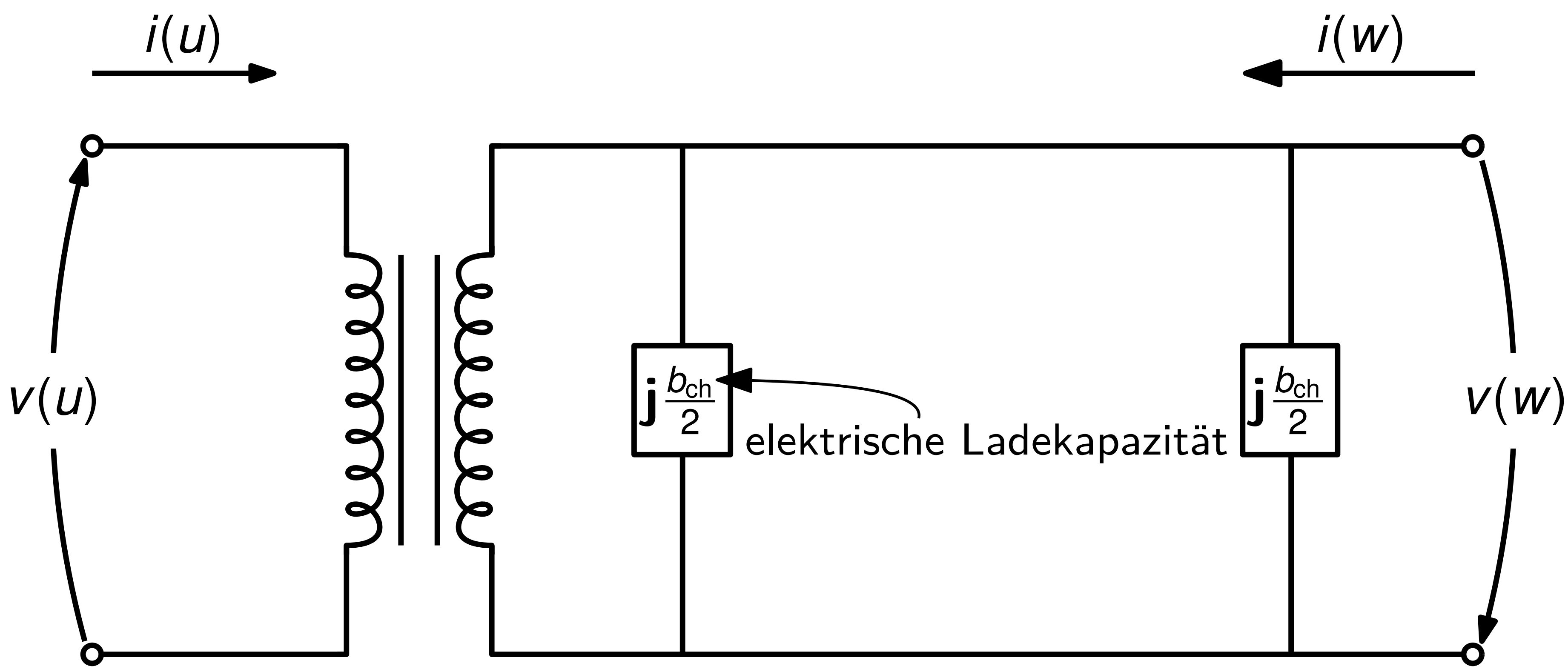
Leitungsmodell

Modellierung der Kante $\mathbf{e} = (u, w)$



Leitungsmodell

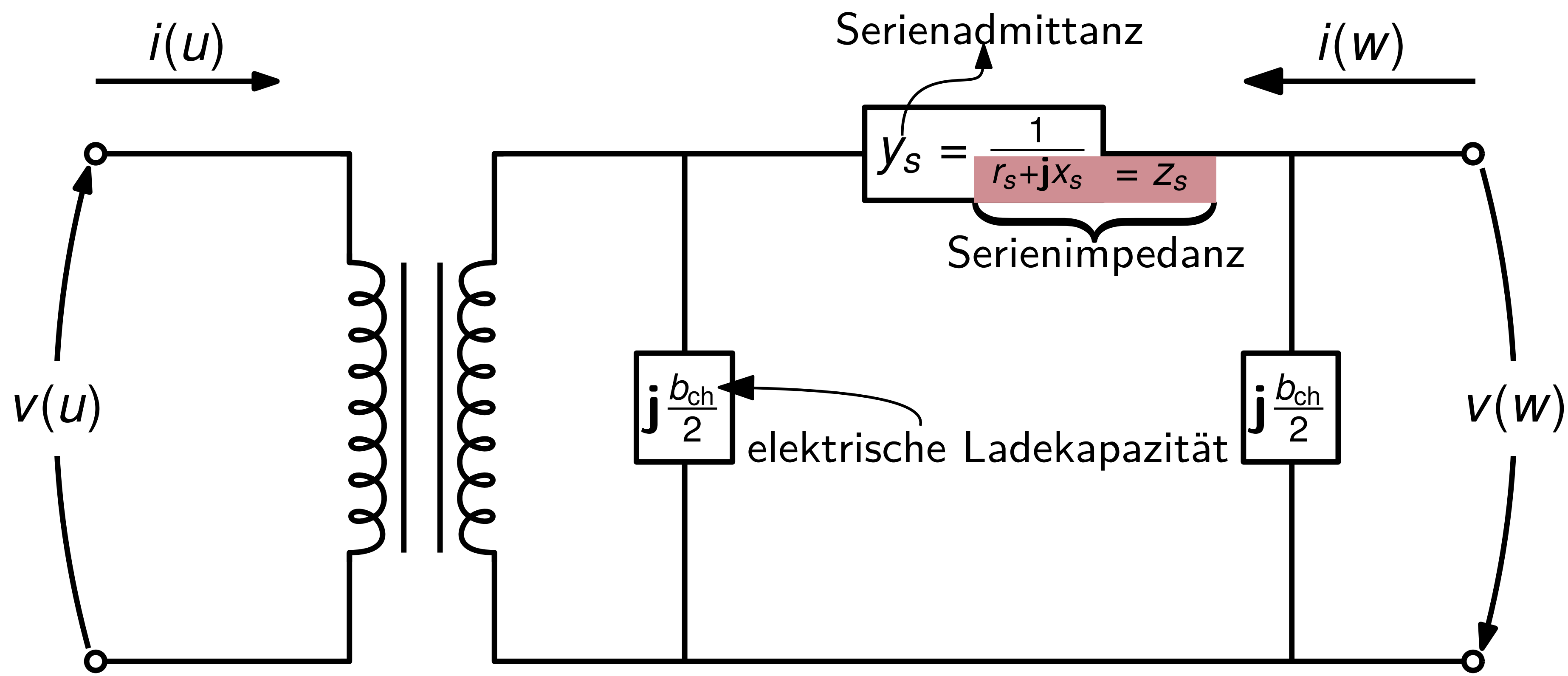
Modellierung der Kante $\mathbf{e} = (u, w)$



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

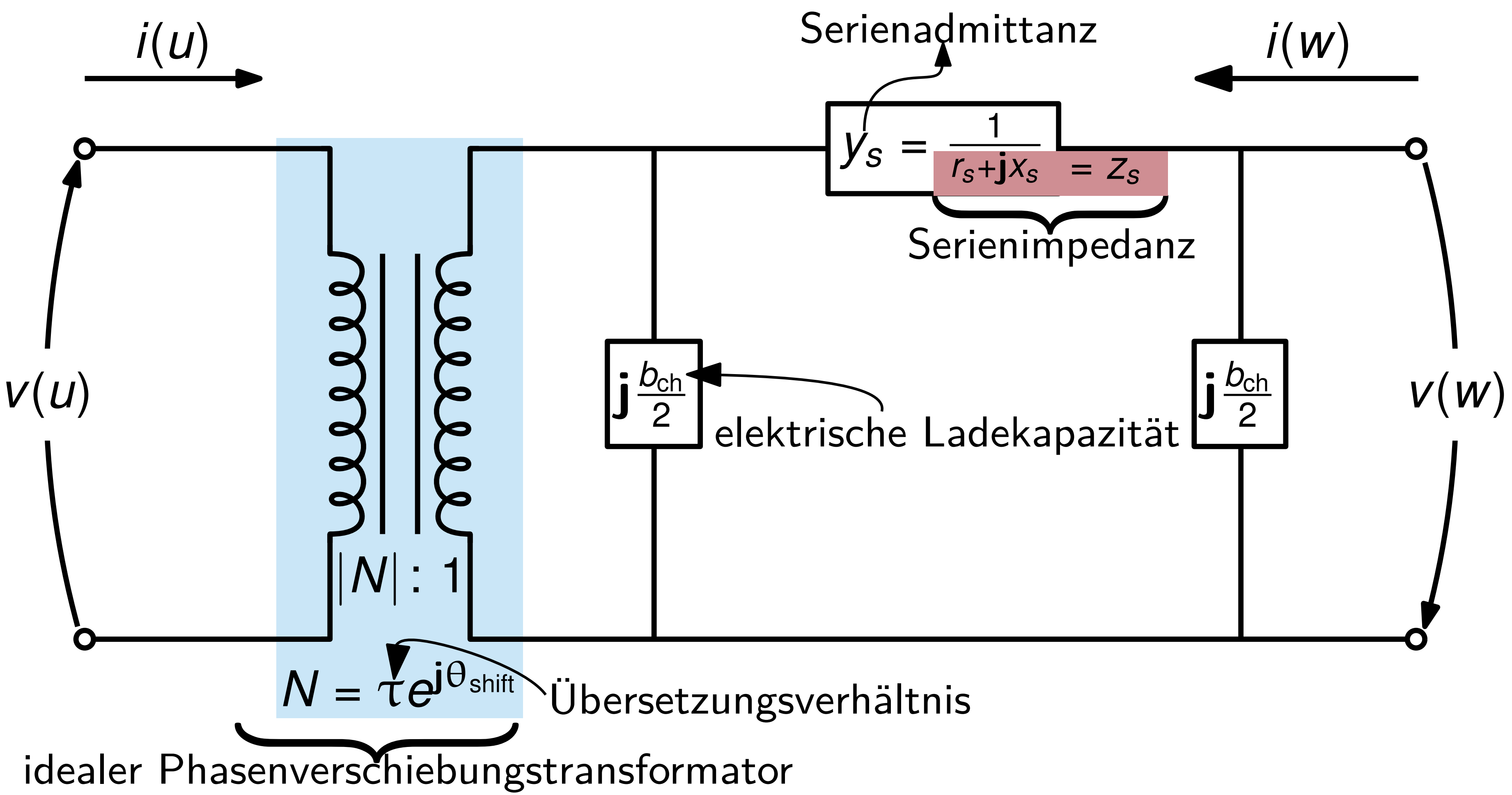
Leitungsmodell

Modellierung der Kante $\mathbf{e} = (u, w)$



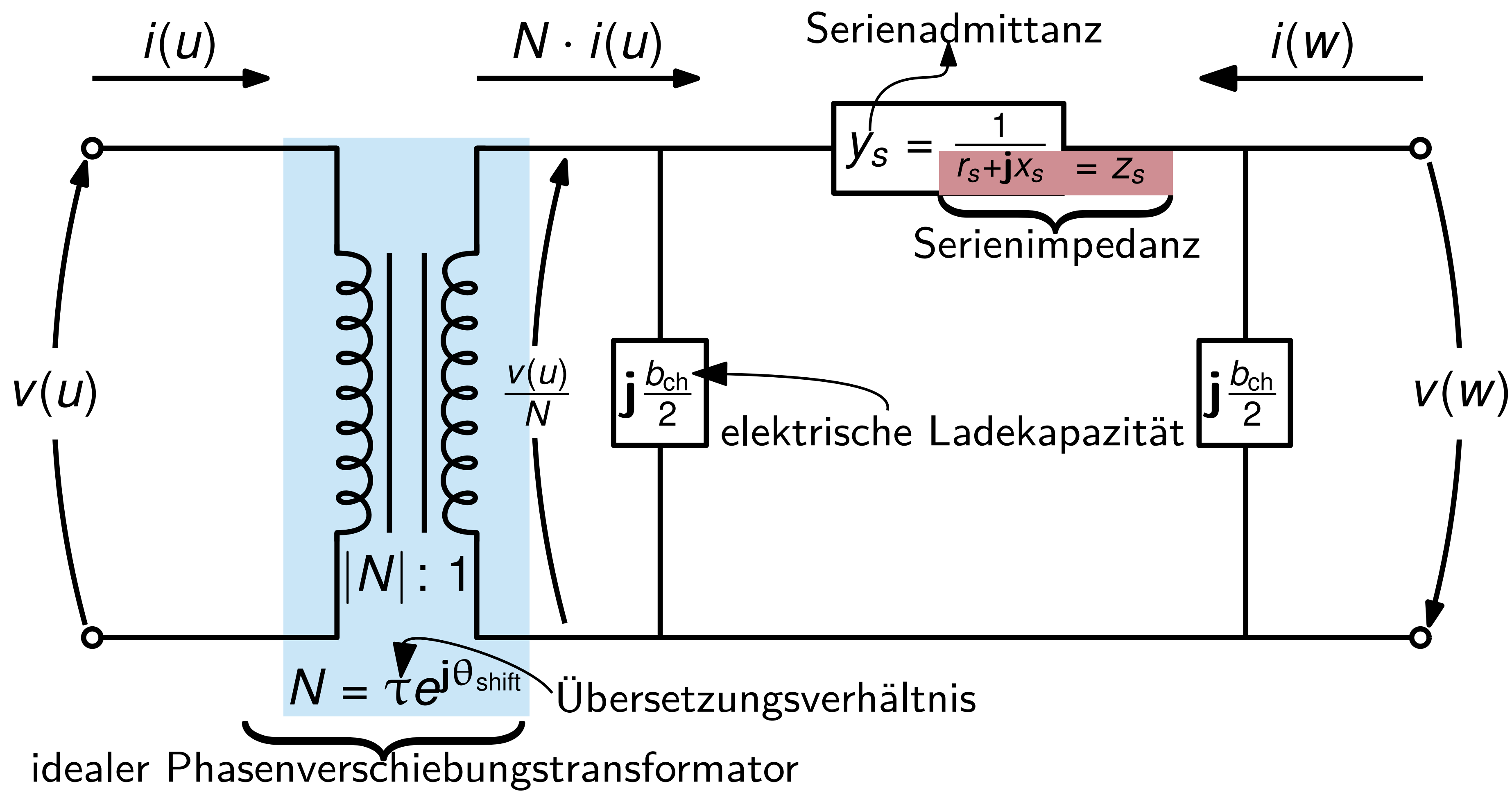
Leitungsmodell

Modellierung der Kante $\mathbf{e} = (u, w)$



Leitungsmodell

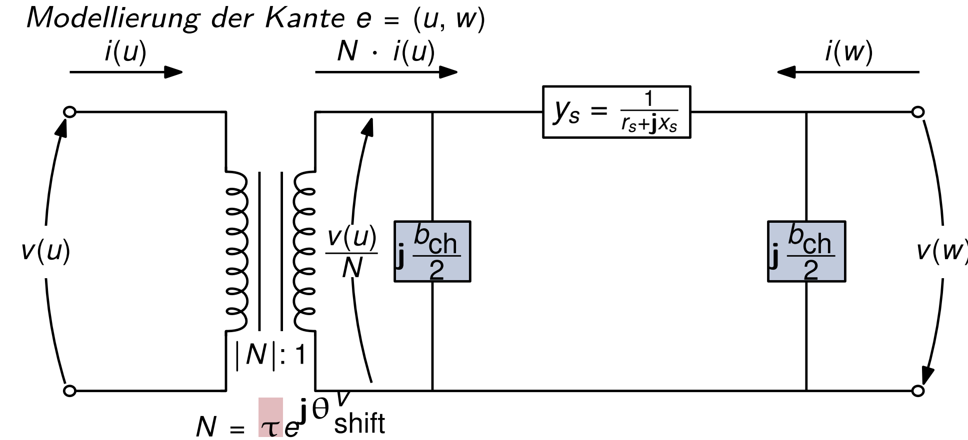
Modellierung der Kante $e = (u, w)$



AC Modellierung

- komplexe Stromeinspeisung

$$\begin{bmatrix} i(u) \\ i(w) \end{bmatrix} = Y_{(u,w)} \begin{bmatrix} v(u) \\ v(w) \end{bmatrix}$$



- Kantenadmittanzmatrix

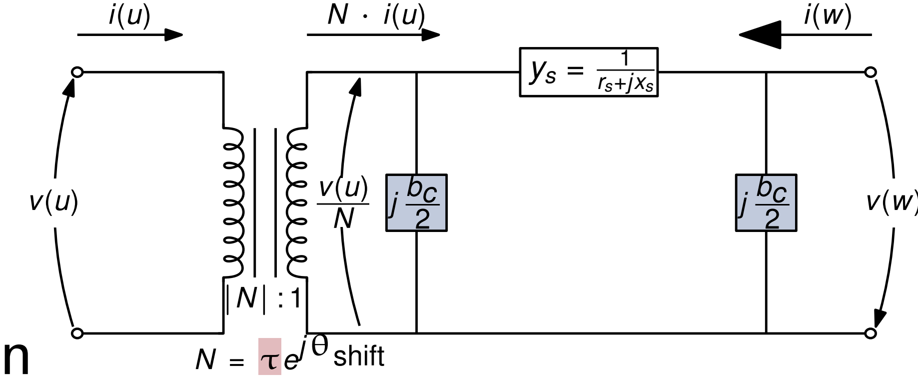
$$Y_{(u,w)} = \begin{bmatrix} \overbrace{\left(y_s + j\frac{b_{\text{ch}}}{2}\right)\frac{1}{\tau^2}}^{y_{(u,u)}} & \overbrace{-y_s \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}^{y_{(u,w)}} \\ \underbrace{-y_s \frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}_{y_{(w,u)}} & \underbrace{y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}}_{y_{(w,w)}} \end{bmatrix}$$

- Einspeisung am Quellknoten $u \in V_G$ (negativ) oder Verbrauch am Senkeknoten $u \in V_D$ (positiv)

$$s(u) = p(u) + \mathbf{j}q(u)$$

AC-Vereinfachung → DC-Modell

Modellierung der Kante $e = (u, w)$



- Leitungen werden als verlustfrei angenommen

⇒ Vernachlässigbarkeit des Leitungswiderstandes r_s und der elektrischen Ladekapazität b_c $\quad y_s = \frac{1}{r_s + \mathbf{j}x_s} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s} \quad r_s, b_{\text{ch}} \approx 0$

- Knotenspannungen nah der 1 p.u.

$$v(u) \approx e^{\mathbf{j}\theta^v(u)}$$

$\Delta\theta^v$) Spannungswinkeldifferenzen $\Delta\theta^v$ an Kanten klein genug

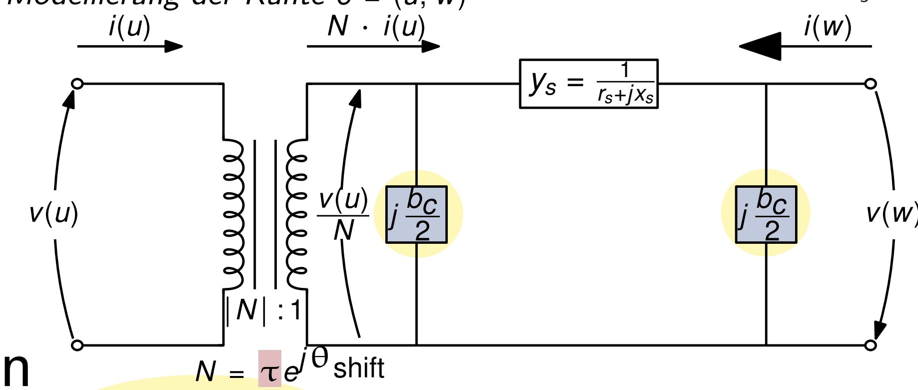
$$\sin(\theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}) \approx \theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}$$

- Kantenadmittanzmatrix (auch -scheinleitwert)

$$Y_{(u,w)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_{(u,u)} & y_{(u,w)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \left(y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}\right)\frac{1}{\tau^2} & -y_s \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -y_s \frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} y_{(w,u)} & y_{(w,w)} \end{array} \end{array} \approx \frac{1}{jx_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & 1 \end{bmatrix}$$

AC-Vereinfachung → DC-Modell

Modellierung der Kante $e = (u, w)$



$r_s, b_{ch} \approx 0$

- Leitungen werden als verlustfrei angenommen

⇒ Vernachlässigbarkeit des Leitungswiderstandes r_s und der elektrischen Ladekapazität b_c $\quad y_s = \frac{1}{r_s + \mathbf{j}x_s} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}$

- Knotenspannungen nah der 1 p.u.

$$v(u) \approx e^{\mathbf{j}\theta^v(u)}$$

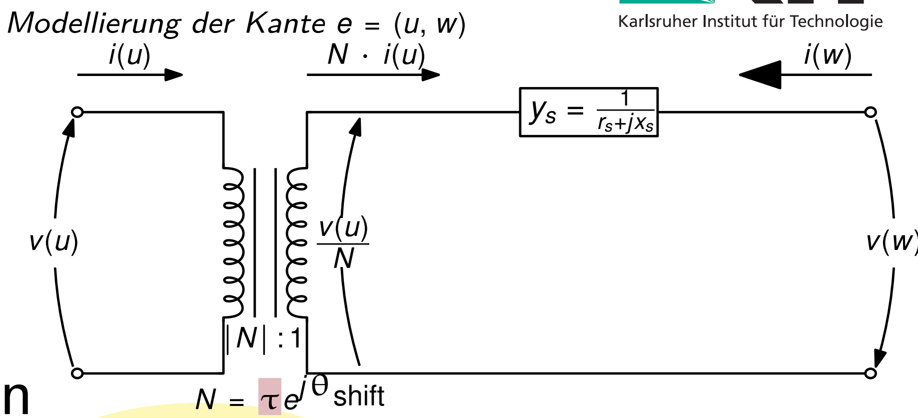
$\Delta\theta^v)$ Spannungswinkeldifferenzen $\Delta\theta^v$ an Kanten klein genug

$$\sin(\theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}) \approx \theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}$$

- Kantenadmittanzmatrix (auch -scheinleitwert)

$$Y_{(u,w)} = \begin{bmatrix} \overbrace{\left(y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}\right)\frac{1}{\tau^2}}^{y_{(u,u)}} & \overbrace{-y_s \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}}^{y_{(u,w)}} \\ \underbrace{-y_s \frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}}_{y_{(w,u)}} & \underbrace{y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}}_{y_{(w,w)}} \end{bmatrix} \approx \frac{1}{jx_s}\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & 1 \end{bmatrix}$$

AC-Vereinfachung $\rightarrow$ DC-Modell



- Leitungen werden als verlustfrei angenommen

$\Rightarrow$ Vernachlässigbarkeit des Leitungswiderstandes r_s und der elektrischen Ladekapazität b_c $\quad y_s = \frac{1}{r_s + \mathbf{j}x_s} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}$

$r_s, b_{\text{ch}} \approx 0$

- Knotenspannungen nah der 1 p.u.

$$v(u) \approx e^{\mathbf{j}\theta^v(u)}$$

$\Delta\theta^v)$ Spannungswinkeldifferenzen $\Delta\theta^v$ an Kanten klein genug

$$\sin(\theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}) \approx \theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}$$

- Kantenadmittanzmatrix (auch -scheinleitwert)

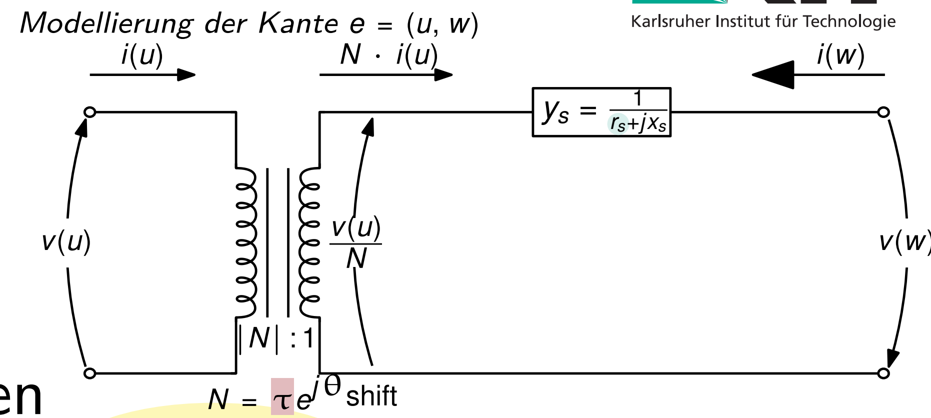
$$\begin{array}{cc} \color{blue}{y_{(u,u)}} & \color{green}{y_{(u,w)}} \end{array}$$

$$Y_{(u,w)} = \begin{bmatrix} \left(y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}\right)\frac{1}{\tau^2} & -y_s\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -y_s\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2} \end{bmatrix} \approx \frac{1}{jx_s}\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \color{green}{y_{(w,u)}} & \color{blue}{y_{(w,w)}} \end{array}$$

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

AC-Vereinfachung → DC-Modell



- Leitungen werden als verlustfrei angenommen

⇒ Vernachlässigbarkeit des Leitungswiderstandes r_s und der elektrischen Ladekapazität b_c $\quad y_s = \frac{1}{r_s + \mathbf{j}x_s} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s} \quad r_s, b_{\text{ch}} \approx 0$

- Knotenspannungen nah der 1 p.u.

$$v(u) \approx e^{\mathbf{j}\theta^v(u)}$$

$\Delta\theta^v$) Spannungswinkeldifferenzen $\Delta\theta^v$ an Kanten klein genug

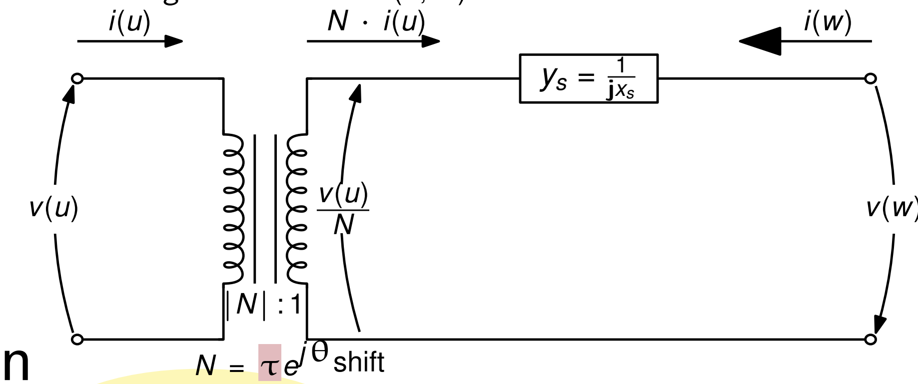
$$\sin(\theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}) \approx \theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}$$

- Kantenadmittanzmatrix (auch -scheinleitwert)

$$Y_{(u,w)} = \begin{bmatrix} \overbrace{\left(y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}\right)\frac{1}{\tau^2}}^{y_{(u,u)}} & \overbrace{-y_s \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}}^{y_{(u,w)}} \\ \underbrace{-y_s \frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}}_{y_{(w,u)}} & \underbrace{y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}}_{y_{(w,w)}} \end{bmatrix} \approx \frac{1}{jx_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & 1 \end{bmatrix}$$

AC-Vereinfachung → DC-Modell

Modellierung der Kante $e = (u, w)$



- Leitungen werden als verlustfrei angenommen

$\Rightarrow$ Vernachlässigbarkeit des Leitungswiderstandes r_s und der elektrischen Ladekapazität b_c $\quad y_s = \frac{1}{r_s + \mathbf{j}x_s} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s} \quad r_s, b_{\text{ch}} \approx 0$

- Knotenspannungen nah der 1 p.u.

$$v(u) \approx e^{\mathbf{j}\theta^v(u)}$$

$\Delta\theta^v$) Spannungswinkeldifferenzen $\Delta\theta^v$ an Kanten klein genug

$$\sin(\theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}) \approx \theta^v(u) - \theta^v(w) - \theta^v_{\text{shift}}$$

- Kantenadmittanzmatrix (auch -scheinleitwert)

$$Y_{(u,w)} = \begin{array}{cc} y_{(u,u)} & y_{(u,w)} \\ \left[\begin{array}{cc} \left(y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2}\right)\frac{1}{\tau^2} & -y_s \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -y_s \frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & y_s + \mathbf{j}\frac{b_{\text{ch}}}{2} \end{array}\right] & \\ y_{(w,u)} & y_{(w,w)} \end{array} \approx \frac{1}{jx_s}\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & 1 \end{bmatrix}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

AC-Vereinfachung $\rightarrow$ DC-Modell

Karlsruher Institut für Technologie

- näherungsweise Strom $i(u)$ am Knoten u

$$i(u,w) \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\left(\frac{1}{\tau^2}e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}e^{\mathbf{j}\theta^V(w)}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{j}x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)$$

$$Y_{(u,w)} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\begin{bmatrix} \overbrace{\frac{1}{\tau^2}}^{y_{(u,u)}} & \overbrace{-\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}^{y_{(u,w)}} \\ \underbrace{-\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}_{y_{(w,u)}} & \underbrace{1}_{y_{(w,w)}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i(u) \\ i(w) \end{bmatrix} = Y_{(u,w)} \begin{bmatrix} v(u) \\ v(w) \end{bmatrix}$$

- näherungsweise Wirkleistungsfluss $p(u)$ am Knoten u

$$p(u) = \mathcal{R}e(s(u))$$

$$= \mathcal{R}e(v(u)\cdot i^\star(u))$$

$$\approx \mathcal{R}e\left(e^{\mathbf{j}\theta^V(u)}\cdot\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{-\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{-\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{1}{x_s\tau}\left[\sin(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})+\mathbf{j}\left(\frac{1}{\tau}-\cos(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{x_s\tau}\left(\sin\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)\right)$$

$$B\cdot\sin\left(\theta(u)-\theta(v)\right)$$

„lossless“-Modell oder „SIN Power Flow“-Modell

$$\overset{(\Delta\theta^V)}{\approx} \frac{1}{x_s\tau}\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)$$

$$B\cdot\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)\right)$$

„DC-approximation“-Modell

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

AC-Vereinfachung → DC-Modell

- näherungsweise Strom $i(u)$ am Knoten u

$$i(u,w) \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\left(\frac{1}{\tau^2}e^{\mathbf{j}\theta^v(u)} - \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}e^{\mathbf{j}\theta^v(w)}\right)$$
$$= \frac{1}{\mathbf{j}x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{\mathbf{j}\theta^v(u)} - e^{\mathbf{j}(\theta^v(w)+\theta^v_{\text{shift}})}\right)$$

$$Y_{(u,w)} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix}\frac{1}{\tau^2}\\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}\end{matrix}}^{y_{(u,u)}}_{\underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{y_{(w,u)}}} & \overbrace{\begin{matrix}-\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}\\ 1\end{matrix}}^{y_{(u,w)}}_{\underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{y_{(w,w)}}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i(u)\\ i(w)\end{bmatrix} = Y_{(u,w)}\begin{bmatrix} v(u)\\ v(w)\end{bmatrix}$$

- näherungsweise Wirkleistungsfluss $p(u)$ am Knoten u

$$p(u) = \mathcal{Re}(s(u))$$
$$= \mathcal{Re}(v(u)\cdot i^\star(u))$$
$$\approx \mathcal{Re}\left(e^{\mathbf{j}\theta^v(u)}\cdot\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{-\mathbf{j}\theta^v(u)} - e^{-\mathbf{j}(\theta^v(w)+\theta^v_{\text{shift}})}\right)\right)$$
$$= \mathcal{Re}\left(\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} - e^{\mathbf{j}(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}})}\right)\right)$$
$$= \mathcal{Re}\left(\frac{1}{x_s\tau}\left[\sin(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}})+\mathbf{j}\left(\frac{1}{\tau}-\cos(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}})\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{x_s\tau}\left(\sin\left(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}}\right)\right)$$
$$B\cdot\sin\left(\theta(u)-\theta(v)\right)$$

„lossless“-Modell oder „SIN Power Flow“-Modell

$$\overset{(\Delta\theta^v)}{\approx} \frac{1}{x_s\tau}\left(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}}\right)$$
$$B\cdot\left(\theta^v(u)-\theta^v(w)\right)$$

„DC-approximation“-Modell

AC-Vereinfachung $\rightarrow$ DC-Modell

Karlsruher Institut für Technologie

- näherungsweise Strom $i(u)$ am Knoten u

$$i(u,w) \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\left(\frac{1}{\tau^2}e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}e^{\mathbf{j}\theta^V(w)}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{j}x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)$$

$$Y_{(u,w)} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\begin{bmatrix} \overbrace{\frac{1}{\tau^2}}^{y_{(u,u)}} & \overbrace{-\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}^{y_{(u,w)}} \\ \underbrace{-\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}_{y_{(w,u)}} & \underbrace{1}_{y_{(w,w)}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i(u) \\ i(w) \end{bmatrix} = Y_{(u,w)}\begin{bmatrix} v(u) \\ v(w) \end{bmatrix}$$

- näherungsweise Wirkleistungsfluss $p(u)$ am Knoten u

$$p(u) = \mathcal{R}e(s(u))$$

$$= \mathcal{R}e(v(u)\cdot i^\star(u))$$

$$\approx \mathcal{R}e\left(e^{\mathbf{j}\theta^V(u)}\cdot\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{-\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{-\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{1}{x_s\tau}\left[\sin(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})+\mathbf{j}\left(\frac{1}{\tau}-\cos(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{x_s\tau}\left(\sin\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)\right)$$

$$B\cdot\sin\left(\theta(u)-\theta(v)\right)$$

„lossless"-Modell oder „SIN Power Flow"-Modell

$$\overset{(\Delta\theta^V)}{\approx} \frac{1}{x_s\tau}\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)$$

$$B\cdot\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)\right)$$

„DC-approximation"-Modell

AC-Vereinfachung $\rightarrow$ DC-Modell

- näherungsweise Strom $i(u)$ am Knoten u

$$i(u,w) \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\left(\frac{1}{\tau^2} e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}} e^{\mathbf{j}\theta^V(w)}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{j}x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)$$

$$Y_{(u,w)} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\begin{bmatrix} \overbrace{\frac{1}{\tau^2}}^{y_{(u,u)}} & \overbrace{-\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}^{y_{(u,w)}} \\ \underbrace{-\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}}}_{y_{(w,u)}} & \underbrace{1}_{y_{(w,w)}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i(u) \\ i(w) \end{bmatrix} = Y_{(u,w)} \begin{bmatrix} v(u) \\ v(w) \end{bmatrix}$$

- näherungsweise Wirkleistungsfluss $p(u)$ am Knoten u

$$p(u) = \mathcal{R}e(s(u))$$

$$= \mathcal{R}e(v(u) \cdot i^\star(u))$$

$$\approx \mathcal{R}e\left(e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} \cdot \frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} e^{-\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{-\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{1}{x_s\tau}\left[\sin(\theta^V(u) - \theta^V(w) - \theta^V_{\text{shift}}) + \mathbf{j}\left(\frac{1}{\tau} - \cos(\theta^V(u) - \theta^V(w) - \theta^V_{\text{shift}})\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{x_s\tau}\left(\sin\left(\theta^V(u) - \theta^V(w) - \theta^V_{\text{shift}}\right)\right)$$

$$B \cdot \sin\left(\theta(u) - \theta(v)\right)$$

„lossless"-Modell oder „SIN Power Flow"-Modell

$$\overset{(\Delta\theta^V)}{\approx} \frac{1}{x_s\tau}\left(\theta^V(u) - \theta^V(w) - \theta^V_{\text{shift}}\right)$$

$$B \cdot \left(\theta^V(u) - \theta^V(w)\right)$$

„DC-approximation"-Modell

AC-Vereinfachung → DC-Modell

- näherungsweise Strom $i(u)$ am Knoten u

$$i(u,w) \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\left(\frac{1}{\tau^2} e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}} e^{\mathbf{j}\theta^V(w)}\right)$$
$$= \frac{1}{\mathbf{j}x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)$$

$$Y_{(u,w)} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_{(u,u)} & y_{(u,w)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}} & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} y_{(w,u)} & y_{(w,w)} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} i(u) \\ i(w) \end{bmatrix} = Y_{(u,w)} \begin{bmatrix} v(u) \\ v(w) \end{bmatrix}$$

- näherungsweise Wirkleistungsfluss $p(u)$ am Knoten u

$$\begin{aligned}
p(u) &= \mathcal{R}e(s(u)) \\
&= \mathcal{R}e(v(u) \cdot i^\star(u)) \\
&\approx \mathcal{R}e\left(e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} \cdot \frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} e^{-\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{-\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right) \\
&= \mathcal{R}e\left(\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right) \\
&= \mathcal{R}e\left(\frac{1}{x_s\tau}\left[\sin(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}) + \mathbf{j}\left(\frac{1}{\tau} - \cos(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x_s\tau}\left(\sin\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)\right)$$
$$B \cdot \sin\left(\theta(u)-\theta(v)\right)$$

„lossless“-Modell oder „SIN Power Flow“-Modell

$$\overset{(\Delta\theta^V)}{\approx} \frac{1}{x_s\tau}\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)$$
$$B \cdot \left(\theta^V(u)-\theta^V(w)\right)$$

„DC-approximation“-Modell

AC-Vereinfachung → DC-Modell

Karlsruher Institut für Technologie

- näherungsweise Strom $i(u)$ am Knoten u

$$i(u,w) \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\left(\frac{1}{\tau^2} e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}} e^{\mathbf{j}\theta^V(w)}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{j}x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)$$

$$Y_{(u,w)} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s} \begin{array}{cc} y_{(u,u)} & y_{(u,w)} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^V_{\text{shift}}}} & 1 \end{array}\right] & \\ y_{(w,u)} & y_{(w,w)} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} i(u) \\ i(w) \end{bmatrix} = Y_{(u,w)} \begin{bmatrix} v(u) \\ v(w) \end{bmatrix}$$

- näherungsweise Wirkleistungsfluss $p(u)$ am Knoten u

$$p(u) = \mathcal{R}e(s(u))$$

$$= \mathcal{R}e(v(u) \cdot i^\star(u))$$

$$\approx \mathcal{R}e\left(e^{\mathbf{j}\theta^V(u)} \cdot \frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} e^{-\mathbf{j}\theta^V(u)} - e^{-\mathbf{j}(\theta^V(w)+\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} - e^{\mathbf{j}(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{1}{x_s\tau}\left[\sin(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})+\mathbf{j}\left(\frac{1}{\tau}-\cos(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}})\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{x_s\tau}\left(\sin\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)\right) \overset{(\Delta\theta^V)}{\approx} \frac{1}{x_s\tau}\left(\theta^V(u)-\theta^V(w)-\theta^V_{\text{shift}}\right)$$

$$B \cdot \sin\left(\theta(u)-\theta(v)\right) \qquad B \cdot \left(\theta^V(u)-\theta^V(w)\right)$$

„lossless“-Modell oder „SIN Power Flow“-Modell — „DC-approximation“-Modell

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

AC-Vereinfachung → DC-Modell

- näherungsweise Strom $i(u)$ am Knoten u

$$i(u,w) \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\left(\frac{1}{\tau^2}e^{\mathbf{j}\theta^v(u)} - \frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}}e^{\mathbf{j}\theta^v(w)}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{j}x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{\mathbf{j}\theta^v(u)} - e^{\mathbf{j}(\theta^v(w)+\theta^v_{\text{shift}})}\right)$$

$$Y_{(u,w)} \approx \frac{1}{\mathbf{j}x_s}\begin{array}{c} \quad y_{(u,u)} \qquad\qquad y_{(u,w)} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau e^{-\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} \\ -\frac{1}{\tau e^{\mathbf{j}\theta^v_{\text{shift}}}} & 1 \end{bmatrix} \\ \quad y_{(w,u)} \qquad\qquad y_{(w,w)} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} i(u) \\ i(w) \end{bmatrix} = Y_{(u,w)} \begin{bmatrix} v(u) \\ v(w) \end{bmatrix}$$

- näherungsweise Wirkleistungsfluss $p(u)$ am Knoten u

$$p(u) = \mathcal{Re}(s(u))$$

$$= \mathcal{Re}(v(u)\cdot i^\star(u))$$

$$\approx \mathcal{Re}\left(e^{\mathbf{j}\theta^v(u)} \cdot \frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau}e^{-\mathbf{j}\theta^v(u)} - e^{-\mathbf{j}(\theta^v(w)+\theta^v_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{Re}\left(\frac{\mathbf{j}}{x_s\tau}\left(\frac{1}{\tau} - e^{\mathbf{j}(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}})}\right)\right)$$

$$= \mathcal{Re}\left(\frac{1}{x_s\tau}\left[\sin(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}}) + \mathbf{j}\left(\frac{1}{\tau} - \cos(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}})\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{x_s\tau}\left(\sin\left(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}}\right)\right)$$

$$B \cdot \sin\left(\theta(u)-\theta(v)\right)$$

„lossless"-Modell oder „SIN Power Flow"-Modell

$$\overset{(\Delta\theta^v)}{\approx} \frac{1}{x_s\tau}\left(\theta^v(u)-\theta^v(w)-\theta^v_{\text{shift}}\right)$$

$$B \cdot \left(\theta^v(u)-\theta^v(w)\right)$$

„DC-approximation"-Modell