UNIVERSITÄT KONSTANZ
LEHRSTUHL FÜR PRAKTISCHE INFORMATIK
Prof. Dr. D. Wagner / Annegret Liebers

September 1998

Grundlagen: Begriffe zu Graphen

Das erste Lehrbuch zur Graphentheorie war [Kön36]. (Der Nachdruck [Kön50] ist in der Unibib vorhanden.) Unter den vielen „modernen“ Graphentheoriebüchern gibt es mehrere algorithmisch orientierte. Empfehlenswert ist [Jun94].

Ein (endlicher, einfacher, ungerichteter) *Graph* ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine endliche Menge (o.B.d.A. $\{1, \ldots, n\}$) und $E \subseteq \binom{V}{2}$ eine Teilmenge der zweielementigen Teilmengen von V ist. Die Elemente $v \in V$ heißen die *Knoten* (auch Ecken, engl. vertices oder nodes), die Elemente $e \in E$ die *Kanten* (engl. edges) von G. Werden Knoten- oder Kantenmenge nicht mehr als endlich vorausgesetzt, spricht man von einem *unendlichen* Graphen. Sind Kanten der Form $\{x, x\}$ (Schlingen) oder mehrere Kanten $\{x_1, y_1\}$ $\{x_2, y_2\}$ mit $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ *(Mehrfachkanten, parallele Kanten)* erlaubt, ist der Graph nicht mehr einfach. Sind die Kanten nicht zweielementige Teilmengen von $\binom{V}{2}$, sondern Paare $(x, y) \in V \times V$, so ist der Graph *gerichtet*. Die folgenden Definitionen und Aussagen beziehen sich auf endliche, einfache, ungerichtete Graphen, lassen sich jedoch leicht auf nicht einfache oder auf gerichtete Graphen übertragen.

Die Anzahl der Knoten eines Graphen G wird als die *Ordnung* von G bezeichnet, die wir durchweg mit $n := n(G) := |V|$ notieren. Die Anzahl seiner Kanten bezeichnen wir mit $m := m(G) := |E|$. Für eine Kante $\{u, v\} \in E$ werden die Knoten u und v ihre *Endknoten* oder *Endpunkte* genannt. Das *Komplement* eines Graphen $G = (V, E)$ ist $\overline{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Ein Graph $(V, \emptyset)$ ohne Kanten heißt auch *leer* oder *trivial*. Sein Komplement, der Graph $K_n := (V, \binom{V}{2})$, heißt *vollständig* und hat $m = \binom{n}{2}$ Kanten. Ein Graph $K_{n_1,n_2} := (\{u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}\} \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_2}\}, \{\{u_i, v_j\} \mid 1 \leq i \leq n_1,\ 1 \leq j \leq n_2\})$ heißt vollständig bipartit.

Offenbar gibt es $2^{\binom{n}{2}}$ viele verschiedene Möglichkeiten, Kanten zwischen n Knoten zu setzen oder nicht zu setzen; es gibt also gerade ebenso viele verschiedene Graphen auf n (numerierten oder markierten, d.h. unterschiedenen) Knoten. Viele dieser Graphen unterscheiden sich jedoch lediglich in der Numerierung ihrer Knotenmenge: Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen *isomorph*, in Zeichen $G_1 \cong G_2$, falls es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt, so daß gilt: $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Ein Knoten $v \in V$ und eine Kante $e \in E$ in einem Graphen $G = (V, E)$ sind inzident zueinander, falls $v \in e$. Zwei Kanten, die einen gemeinsamen Endknoten haben, heißen ebenfalls inzident zueinander. Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen *adjazent, verbunden* oder *benachbart*, falls $\{u, v\} \in E$. Die *Nachbarschaft* eines Knotens $v \in V$ ist die Menge $N(v) := \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ der *Nachbarn* von v.

Knotengrad. Der *Grad* $d(v) := |N(v)|$ eines Knotens $v \in V$ zählt die Kanten, die in dem Graphen zu v inzident sind. Wir schreiben $d_G(v)$, wenn wir betonen wollen, daß sich der Grad auf den Graphen G bezieht. Da jede Kante an ihren beiden Endpunkten einen Beitrag von 1 zu deren Grad liefert, gilt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m. \tag{1}$$

Daß auf einem Empfang gerade viele Gäste ungerade vielen anderen Gästen die Hand schütteln ist die Knobelversion der leichten

Übung *Ein Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades.*

Ein Graph G heißt *r-regulär*, falls $d(v) = r$ für alle $v \in V$. Ein Knoten $v \in V$ mit $d(v) = 0$ heißt *isoliert*. In einem trivialen Graphen sind also alle Knoten isoliert, der vollständige Graph K_n ist $(n-1)$-regulär. Ein 3-regulärer Graph heißt auch *kubisch*. Der *maximale Grad* in einem Graphen wird mit $\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V\}$, der *minimale* mit $\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V\}$ bezeichnet.

Adjazenzmatrix. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann heißt die folgende symmetrische $n \times n$ Matrix $A = A(G) = (a_{ij}),\ 1 \leq i, j \leq n$, mit

$$a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *Adjazenzmatrix* von G. Die i-te Zeilen- oder Spaltensumme von A ist also gerade $d(v_i)$; die Anzahl der Einsen in A ist $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Wir beobachten ferner, daß zwei Graphen G_1 und G_2 der Ordnung n genau dann isomorph sind, wenn es eine $n \times n$ Permutationsmatrix P gibt, so daß für die zugehörigen Adjazenzmatrizen gilt: $A_1 = P^T A_2 P$.

Adjazenzlisten. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die *Adjazenzlisten* von G bestehen aus n Folgen (Listen), einer für jeden Knoten. Die Adjazenzliste für den Knoten v enthält alle Knoten aus $N(v)$.

Subgraphen. Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt *(schwacher) Subgraph* (oder auch *Teilgraph*) eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, in Zeichen $H \subseteq G$, falls eine injektive Abbildung $f : V_H \to V_G$ existiert, so daß gilt $\{u, v\} \in E_H \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_G$. Insbesondere ist also jeder Graph H mit $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq \binom{V_H}{2} \cap E_G$ Subgraph von G. Ein Subgraph H eines Graphen G heißt durch V_H *induziert*, falls er alle Kanten von G enthält, die beide Endpunkte in V_H haben, d.h. falls $E_H = \{\{u, v\} \in E_G : u, v \in V_H\} = \binom{V_H}{2} \cap E_G$. Den von einer Knotenmenge $S \subseteq V$ in einem Graphen G induzierten Subgraphen bezeichnen wir mit $G[S]$. Ein Subgraph H eines Graphen G heißt *aufspannend*, falls $V(H) = V(G)$.

Cliquen und unabhängige Mengen. Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ heißt *Clique* in einem Graphen G, falls der von C induzierte Subgraph $G[C]$ vollständig ist. Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt *unabhängig* oder *stabil*, falls keine zwei Knoten aus S benachbart sind, d.h. falls der von S in G induzierte Graph $G[S]$ trivial ist. Die Größe einer kardinalitätsmaximalen Clique in einem Graphen G heißt die *Cliquenzahl* $cl(G)$, die Größe einer kardinalitätsmaximalen unabhängigen Knotenmenge die *Stabilitäts-* oder *Unabhängigkeitszahl* $\alpha(G)$. Da eine Knotenmenge $C \subseteq V$ offenbar eine Clique in einem Graphen G ist genau dann, wenn sie im Komplementgraphen $\overline{G}$ stabil ist, gilt also $cl(G) = \alpha(\overline{G})$. Für den vollständigen Graphen K_n auf n Knoten gilt beispielsweise $cl(K_n) = n$ und $\alpha(K_n) = 1$. Sei G ein Graph und v ein Knoten in einer kardinalitätsmaximalen Clique C von G. Wegen $|N(v)| \leq \Delta(G)$ folgt

$$1 \leq cl(G) \leq \Delta(G) + 1. \tag{2}$$

Wenn dagegen $S \subseteq V$ eine (inklusions-) maximale stabile Menge ist, dann ist jeder Knoten in $V \backslash S$ zu einem Knoten aus S adjazent (denn sonst könnte man ihn zu S hinzufügen und erhielte eine noch größere stabile Menge) und daher gilt $V = S \cup \bigcup_{s \in S} N(s)$. Es folgt $n \leq |S| + |S| \cdot \Delta(G)$ oder

$$\frac{n}{\Delta(G) + 1} \leq |S| \leq \alpha(G) \leq n. \tag{3}$$

Gleichheit gilt in (2) bzw. (3) jeweils z.B. beim trivialen bzw. beim vollständigen Graphen, aber nicht im allgemeinen.

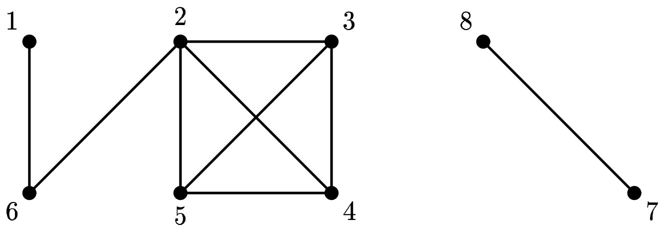

Abbildung 1: Dieser Graph hat $n = 8$ Knoten, $m = 9$ Kanten, $c = 2$ Zusammenhangskomponenten, Cliquenzahl $cl = 4$ und Unabhängigkeitszahl $\alpha = 3$. Der Maximalgrad ist $\Delta = 4$, der Minimalgrad ist $\delta = 1$. Der durch die Knoten 1 bis 6 induzierte Teilgraph ist zusammenhängend und hat Radius 2 und Durchmesser 3. Der Graph ist planar, aber die hier gezeigte Darstellung ist keine planare Einbettung.

Wege, Pfade, Zusammenhang. Ein *Weg* W (engl. walk) ist eine Folge $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_i \in V,\ 0 \leq i \leq \ell$, wobei entweder $\ell = 0$, oder so daß für $i = 0, \ldots, \ell - 1$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Seine *Länge* ist die Anzahl ℓ der Kanten, die er enthält. Ein Weg $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$, mit $\ell = 0$ oder bei dem (falls $\ell \geq 1$) alle Knoten $v_i,\ 0 \leq i \leq \ell$, paarweise verschieden sind, heißt *Pfad* (engl. path). Ein Pfad auf $n \in \mathbb{N}$ Knoten wird mit P_n bezeichnet und hat die Länge $n - 1$. Der Pfad P_1, der nur aus einem einzigen Knoten besteht, heißt *trivial*. Der Knoten v_0 heißt der Anfangsknoten des Pfades $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ und v_ℓ sein Endknoten; alle anderen Knoten heißen die inneren Knoten des Pfades P. Ein u-v-Pfad ist ein Pfad mit Anfangsknoten u und Endknoten v (mit $v \neq u$ falls $\ell \geq 1$).

Übung *Jeder u-v-Weg mit $u \neq v$ enthält einen u-v-Pfad.*
Ein kürzester u-v-Weg ist ein u-v-Pfad.

Mit $dist(u, v)$ bezeichnen wir den *Abstand* (die Distanz) zweier Knoten $u, v \in V$ im Graphen G, wobei $dist(u, v)$ definiert ist als die Länge eines kürzesten u-v-Pfades in G — falls es keinen u-v-Pfad in G gibt, so sei $dist(u, v) := \infty$.[1] Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ ein u-v-Weg in G existiert. Die zusammenhängenden Subgraphen eines Graphen mit inklusionsmaximalen Knotenmengen heißen seine *(Zusammenhangs-)Komponenten*. Offenbar gehört jeder Knoten zu genau einer Komponente; verschiedene Komponenten wiederum sind knotendisjunkt. $c(G)$ bezeichne die Anzahl der Komponenten eines Graphen G. Es ist also $c(G) = 1$ genau dann, wenn G zusammenhängt. Die Relation $u \sim v \Leftrightarrow dist(u, v) < \infty$ bildet eine Äquivalenzrelation auf V, ihre Äquivalenzklassen sind gerade die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten von G.

Der *Durchmesser* $diam(G)$ eines zusammenhängenden Graphen G ist als die Länge eines längsten kürzesten Weges in G definiert, d.h. $diam(G) := \max_{u,v \in V} dist(u, v)$. Der *Radius* $rad(G)$ eines zusammenhängenden Graphen G ist hingegen $rad(G) := \min_{u \in V} \max_{v \in V} dist(u, v)$.

Zykeln und Kreise. Ein Weg $W = v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ in einem Graphen heißt *geschlossen* oder *Zykel*, falls $v_0 = v_\ell$. Ein Zykel mit $l \geq 3$, bei dem die Knoten $v_0, \ldots, v_{\ell-1}$ paarweise verschieden sind, heißt *Kreis*. Der Kreis der Länge n wird mit C_n notiert. Der Kreis $C_3 \cong K_3$ heißt auch *Dreieck*.

Die *Taillenweite* $g(G)$ (engl. girth) eines Graphen G bezeichnet die Länge eines kürzesten Kreises in G, bzw. ist als ∞ definiert, falls G kreisfrei ist.

Bäume und Wälder. Ein zusammenhängender Graph T, der keinen Kreis enthält, heißt *Baum* und hat $m = n - 1$ viele Kanten. Für zwei Knoten u, v in T gibt es genau einen u-v-Pfad in T. Ist T kreisfrei, aber nicht unbedingt zusammenhängend, so heißt T *Wald* und es gilt $m = n - c(T)$. Ist ein Baum T Teilgraph eines Graphen G mit $V(T) = V(G)$, dann heißt T *aufspannender Baum* von G. Ein Knoten v in einem Wald mit $d(v) = 1$ heißt *Blatt*.

[1] Die Distanzabbildung $dist : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ definiert eine Metrik auf der Menge der Knoten eines Graphen [es gilt $dist(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (Definitheit), $dist(u, v) = dist(v, u)$ für alle $u, v \in V$ (Symmetrie) sowie $dist(u, w) \leq dist(u, v) + dist(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)].

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 & : & 6 & & & \\
2 & : & 6 & 5 & 3 & 4 \\
3 & : & 2 & 4 & 5 & \\
4 & : & 5 & 2 & 3 & \\
5 & : & 2 & 3 & 4 & \\
6 & : & 1 & 2 & & \\
7 & : & 8 & & & \\
8 & : & 7 & & &
\end{array}
$$

Abbildung 2: Die Adjazenzmatrix und die Adjazenzlisten zum Graphen in Abbildung 1

Abbildung 3: Zwei planare Einbettungen desselben Graphen mit jeweils 4 Facetten

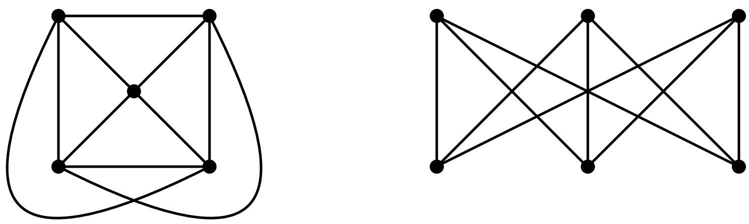

Abbildung 4: Die kleinsten nicht planaren Graphen sind K_5 und $K_{3,3}$.

Ein *Wurzelbaum* (engl. Out-tree oder rooted tree) ist ein Baum $T = (V, E)$ zusammen mit einem ausgezeichneten Knoten $r \in V$, der *Wurzel* (engl. root) von T. Abweichend von obiger Definition wird r in einem Wurzelbaum i.a. nicht als Blatt aufgefaßt, auch wenn $d(r) = 1$. $v \in V$ heißt *Nachfolger* von $u \in V$, wenn es einen r-v-Pfad gibt, der u enthält, und wenn $u \neq v$. Wenn zusätzlich $\{u, v\} \in E$, heißt v *direkter Nachfolger* von u. Wenn v (direkter) Nachfolger von u ist, dann heißt u (direkter) Vorgänger von v. Die i*-te Schicht* eines Wurzelbaums besteht aus allen $v \in V$ mit $\text{dist}(r, v) = i$.

Einbettungen und planare Graphen. Ein Graph $G = (V, E)$ wird auf natürliche Weise durch eine Einbettung in die Ebene dargestellt, indem Knoten durch (paarweise verschiedene) Punkte und Kanten durch ihre Endpunkte verbindende Linien dargestellt werden. Wenn ein Graph so dargestellt werden kann, daß je zwei Linien zu Kanten ohne gemeinsamen Endpunkt sich nicht schneiden, so heißt der Graph *planar*. Eine planare Einbettung eines (planaren) Graphen teilt die Ebene in *Gebiete* (oder *Facetten*) ein. Für die Anzahl der Facetten f gilt

$$n - m + f = 2 \quad (\text{Euler}, 1750).$$

Daraus folgt eine obere Schranke für die Kantenzahl eines planaren Graphen:

$$m \leq 3n - 6 \quad (\text{für } n \geq 3).$$

Übung *Die Isomorphie „$\cong$“ von Graphen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Graphen.*

Übung *Ein Graph heißt* selbstkomplementär, *falls $G \cong \overline{G}$. Man finde den (einzigen) selbstkomplementären Graphen auf 4 und die beiden auf 5 Knoten.*

Übung *Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten hat zwei Knoten desselben Grades.*
Bestimme Graphen auf $n \geq 2$ Knoten, die $n - 1$ verschiedene Grade haben.

Übung *Ein kubischer Graph hat gerade viele Knoten.*
Es gibt kubische Graphen der Ordnung n für jedes gerade $n \geq 4$.

Übung *Für jeden zusammenhängenden Graphen G gilt:*

$$rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G).$$

Man finde für jede dieser Ungleichungen Graphen, bei denen Gleichheit gilt.

Übung *Mindestens einer der Graphen G und $\overline{G}$ ist zusammenhängend.*

Übung *Ein Graph mit $m > \binom{n-1}{2}$ ist zusammenhängend.*

Übung *Ein Graph mit $\Delta(G) \leq 2$ ist die disjunkte Vereinigung von Kreisen und Pfaden.*

Literatur

[Jun94] Dieter Jungnickel. *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*. BI-Wissenschaftsverlag, 1994. Unibib KN: kid 114/j96a(3), kid 604/j96, lbs 840/j96.

[Kön36] Dénes König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.

[Kön50] Dénes König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*. Chelsea, New York, 1950. Unibib KN: mat 9:ko26/t42. Reprint of the 1936 edition by Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.