Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 4

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 16/17

Ausgabe 29. November 2016
Abgabe 8. Dezember 2016, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Bitte nutzen Sie den WebInScribe Deckblattgenerator
und heften Sie das Deckblatt an Ihr Übungsblatt.
`https://webinscribe.ira.uka.de/deckblatt/index.php?course=10588`.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es seien zwei Sprachen $A, B \subset \Sigma^\star$ geben, wobei B regulär ist. Impliziert $A \propto B$ das A ebenfalls regulär ist? Ist also A eine reguläre Sprache, wenn A polynomial transformierbar in B ist?

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Die Menge der semi-entscheidbaren Sprachen ist unter dem Kleenschen Abschluss abgeschlossen. Beschreiben Sie dazu für eine semi-entscheidbare Sprache L die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine $\mathcal{M}$, die $L^\star$ akzeptiert.
Hinweis: In der Übung wurde dieselbe Aussage für entscheidbare Sprachen bewiesen.

(b) Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^\star$ Sprachen mit $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, sodass L_1^c und L_2^c jeweils semi-entscheidbar sind. Dann existiert eine entscheidbare Sprache L_3, so dass gilt $L_1 \subseteq L_3$ und $L_2 \subseteq L_3^c$.

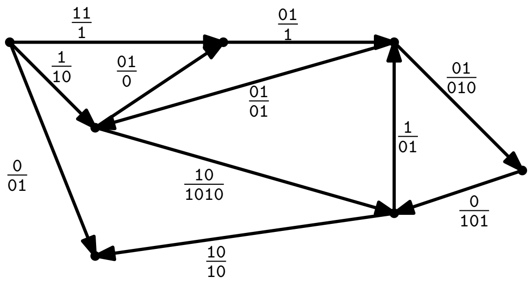
(c) Die Sprache $L_{TM} = \{(\langle \mathcal{M}_1 \rangle, \langle \mathcal{M}_2 \rangle) \mid L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$ ist nicht entscheidbar.
Anmerkung: Bemerken Sie den Unterschied zu Aufgabe 6 des dritten Übungsblatts.

Aufgabe 3 (1 + 3 + 1 = 5 Punkte)

Der ebenso geniale wie auch erfolgreiche Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta hat Post! Elsa hat ihm auf seinen Brief geantwortet und möchte sich zu einer unkonkreten und riskanten Zeit mit ihm in seinem Hauptquartier treffen. Fieberhaft feilt Doktor Meta an der Abendplanung. Er braucht etwas, das sowohl anspruchsvoll, als auch ansprechend ist. Nach langem Grübeln fällt sein Blick auf sein Weltherrschaftsdomino©. Das Spiel besteht aus einer Menge von Dominosteinen und einem kniffligen gerichteten Graphen. Jeder Kante des Graphen ist ein Dominostein zugeordnet. Auf jedem Dominostein steht sowohl auf der oberen als auch der unteren Hälfte ein endliches Wort aus dem Alphabet Σ. Ziel des Spiels ist es, einen nichtleeren Pfad[1] zu finden, sodass die beiden Konkatenationen der Wörter auf der oberen bzw. unteren Hälfte der Dominosteine entlang des Pfads identisch sind.

(a) Nachdem Elsa eines unvorhersehbaren Abends eintrifft, ist sie begeistert von Metas Idee. Lösen sie mit ihr folgende Instanz des Weltherrschaftsdominos:

H :



(b) Turing-Man – halb Mensch, halb Turingmaschine – versucht, das Date zu stören! Er will den beiden den Spaß verderben, indem er die Instanzen vor Elsa löst und ihr die Lösung verrät. Beweisen Sie, dass Turing-Man das Problem gar nicht entscheiden kann!

(c) Turing-Man ist sehr ausdauernd und ist sich sicher: wenn es eine Lösung gibt, dann wird er Sie finden. Hat er recht? Warum?

Aufgabe 4

(1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte)

```
foreach v ∈ V do
    v.dist ← ∞
    v.pred ← null
s.dist ← 0
Q ← V
while Q ≠ ∅ do
    u ← vertex in Q with smallest dist
    Q ← Q \ {u}
    foreach v ∈ V with (u, v) ∈ E do
        dist' ← u.dist + (u, v).weight
        if v ∈ Q and dist' < v.dist
         then
            v.dist ← dist'
            v.pred ← u
p ← t
u ← t
while u ≠ null do
    u ← u.pred
    p ← u, p
return p
```

(a) Formulieren Sie für einen gerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ das Problem, einen kürzesten Pfad von s nach t zu finden als Optimierungsproblem, als Optimalwertproblem und als Entscheidungsproblem.

(b) Ihnen steht die Implementierung von Dijkstras Algorithmus links zur Verfügung. Welches Problem löst diese Implementierung? Wie können Sie damit die beiden anderen Probleme lösen?

(c) Sie möchten nun nur das Optimalwertproblem lösen. Können Sie die Implementierung von Dijkstras Algorithmus aus Teil (b) vereinfachen, um Laufzeit einzusparen? Begründen Sie!

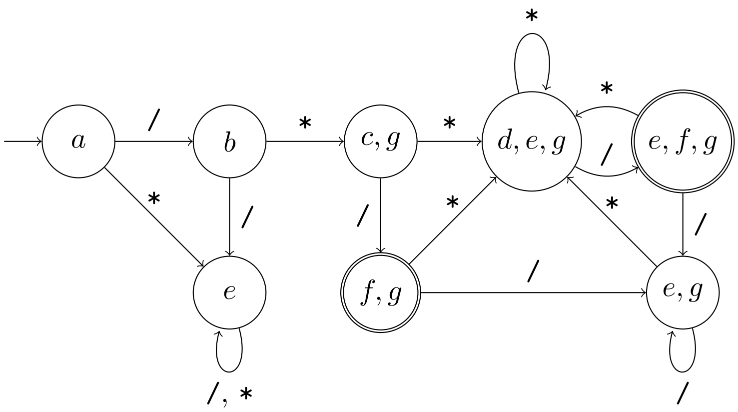
(d) Sie haben nun nur einen Algorithmus gegeben, der das Optimalwertproblem löst, z.B. den aus Teil (c). Wie können Sie daraus einen Algorithmus konstruieren, der das Optimierungsproblem löst?

[1] Der nicht einfach sein muss und auch keinen speziellen Anfangs- oder Endknoten haben muss.

Aufgabe 5 (2 + 4 + 3 + 1 = 10 Punkte)

Ein Kommilitone von Ihnen behauptet, dass er ein alternatives Verfahren zur Konstruktion von Äquivalenzklassenautomaten gefunden hat. Statt nach möglicherweise langen Zeugen suchen zu müssen, betrachtet er immer nur einzelne Zeichen. Zu einem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ geht er folgendermaßen vor. Im ersten Schritt partitioniert er die Zustandsmenge in zwei Mengen $Q \setminus F$ und F. In jedem weiteren Schritt wählt er zunächst ein Zeichen $a \in \Sigma$. Jede Menge[2] $[q]$ trennt er genau dann weiter auf, wenn für zwei Zustände $q_1, q_2 \in [q]$ nach dem vorherigen Schritt galt, dass $[\delta(q_1, a)] \neq [\delta(q_2, a)]$. Solch einen Schritt wiederholt er, bis sich bei keinem Zeichen $a \in \Sigma$ weitere Trennungen ergeben. Mit den entstandenen Mengen und dem Verfahren aus der Vorlesung konstruiert er dann den Äquivalenzklassenautomaten.

(a) Führen Sie das Verfahren für folgenden Automaten (vgl. Aufgabe 3 (c) des zweiten Übungsblatts) durch, indem Sie die unten stehende Tabelle ausfüllen. Finden Sie dieselben Mengen wie die Äquivalenzklassen aus Aufgabe 3 (c) des zweiten Übungsblatts?



Schritt	Zeichen a	Partition nach Trennung durch a
1		$\{\{a\}, \{b\}, \{e\}, \{c, g\}, \{d, e, g\}, \{e, g\}\}$, $\{\{f, g\}, \{e, f, g\}\}$
2	/	$\{\{a\}, \{b\}, \{e\}, \{e, g\}\}$, $\{\{c, g\}, \{d, e, g\}\}$, $\{\{f, g\}, \{e, f, g\}\}$
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

[2] Disjunkte Mengen $\{\ldots, q, \ldots\} = [q]$ können durch einen Repräsentanten q identifiziert werden.

(b) Folgern Sie aus $[q_1] \neq [q_2]$ induktiv die Existenz eines Zeugen w, der q_1 und q_2 trennt.

(c) Zeigen Sie, dass am Ende des Verfahrens $[q_1] = [q_2]$ impliziert, dass kein Zeuge existiert, der q_1 und q_2 trennt.

(d) Ist das Verfahren Ihres Kommilitonen korrekt?