Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 2

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 16/17

Ausgabe 08. November 2016
Abgabe 15. November 2016, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1

(1 + 1 + 1 + 2 + 1= 6 Punkte)

Ist das Pumping-Lemma für folgende Sprachen erfüllt? Ist die Sprache regulär? Begründen Sie!

(a) $L_a = \{aa, bb, cc\}$

(b) $L_b = \{w \in \{a, b, c\}^\star \mid 2|w|_a = 2|w|_b = |w|_c\}$

(c) Sei w ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Das Wort $\text{neg}(w)$ beschreibt die bitweise Negation von w, d.h. $\text{neg}(w)_i = 1 - w_i$, wobei w_i das i-te Zeichen von w beschreibt. Sei $L_c = \{w \in \{0, 1\}^\star \mid w = uv, v = \text{neg}(u)\}$.

(d) Sei $\mathbb{N}_{\leq k}$ die Menge natürlichen Zahlen kleiner gleich $k \in \mathbb{N}$. Sei $L_k = \{w \in \mathbb{N}^\star_{\leq k} \mid w$ ist eine monoton aufsteigende Zahlenfolge$\}$. Das Wort 4 4 7 8 ist beispielsweise in L_8 enthalten, das Wort 8 8 4 8 hingegen nicht. Wir unterscheiden Zahlen aus $N_{\leq k}$ von Wörtern (Zahlenfolgen) aus L_k in dem wir Sie mit einem Leerzeichen trennen. Sie können also die Zahlenfolge 8 8 4 8 von der Zahl 8848 unterscheiden.

(e) Ist die Menge L_k aus (d) mit $k = \infty$ eine reguläre Sprache? Wobei $\mathbb{N}_{\leq\infty} = \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Für alle Wörter der Länge $n > 2$ ist die Pumping-Lemma erfüllt, da die zugrunde liegende Menge leer ist. Die Sprache ist endlich und somit regulär.

(b) Wir zeigen, dass das Pumping-Lemma nicht erfüllt ist und somit L_b nicht regulär sein kann. **Beweis:** Annahme L_b ist regulär, dann existiert nach dem Pumping-Lemma ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L_b$ eine Zerlegung $w = uvx$ gemäß des Pumping-Lemmas existiert. Wir wählen $w = a^n b^n c^{2n}$ mit $u = a^i, v = a^j$ mit $i + j \leq n, j > 0$. Das Wort uv^0x liegt nicht in L_b, da $|uv^0x|_a = |uvx|_a - j < n, |uv^0x|_b = n, |uv^0x|_c = 2n$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort in L_b für das keine Zerlegung entsprechend dem Pumping-Lemma existiert.

(c) Wir zeigen, dass das Pumping-Lemma nicht erfüllt ist und somit L_c nicht regulär sein kann. **Beweis:** Annahme L_c ist regulär, dann existiert nach dem Pumping-Lemma ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L_c$ eine Zerlegung $w = uvx$ gemäß des Pumping-Lemmas existiert. Wir wählen $w = 0^n 1^n$ mit $u = 0^i, v = 0^j$ mit $i + j \leq n, j > 0$. Eine notwendige Bedingung dafür das ein Wort w in L_c enthalten ist, ist dass die Anzahl an 0 und 1 in w übereinstimmt.

Das Wort uv^0x liegt daher nicht in L_c, da $|uv^0x|_0 = |uvx|_0 - j < n, |uv^0x|_1 = n$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_k$ ein Wort in L_c für das keine Zerlegung entsprechend dem Pumping-Lemma existiert.

(d) Wir zeigen, dass das Pumping-Lemma für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ erfüllt ist. Sei $w \in L_k$ mit $|w| > n = 1$ mit $w = uvx$ und $u = \varepsilon$ und $v = w_0$. Das Wort $uv^ix = v^ix$ enthält also i Kopien des ersten Zeichens am Wortanfang. Die Zeichenfolge in v^ix bleibt monoton aufsteigend und das Wort ist somit in L_k enthalten.

Wir konstruieren induktiv für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen DEA $\mathcal{A}_k$ der L_k akzeptiert und zeigen somit das L_k regulär ist.

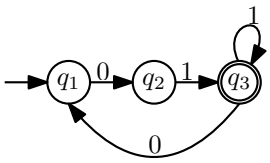
Verankerung, $k = 1$:
$\mathcal{A}_1 = (Q_1 = \{q_1\}, \delta_1, q_1, F_1 = Q_1\}$ mit $\delta_1(q_1, 1) = q_1$
Induktive Forsetzung:
$\mathcal{A}_{k+1} = (Q_{k+1} = Q_k \cup \{q_{k+1}\}, \delta_{k+1}, F_{k+1} = F_k \cup \{q_{k+1}\})$

$$\delta_{k+1}(q, x) = \begin{cases} \delta(q, x) & q \in Q_k, x \in \mathbb{N}_k \\ q_{k+1} & x = k + 1 \end{cases}$$

(e) Das Pumping-Lemma ist auch für $k = \infty$ erfüllt, die Menge L_∞ ist allerdings keine reguläre Sprache, da das zugrunde liegende Alphabet nicht endlich ist. Nach unserer Definition ist die Menge nicht einmal eine Formale Sprache!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14 im Skript) die reguläre Sprache die von dem folgenden Automaten $\mathcal{A}$ akzeptiert wird. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.



Hinweis: Sie dürfen $L_{r,i,t}$ als Abküzzung für L_{q_r,i,q_t} nutzen.

Lösung:

Im Folgenden steht $L_{r,i,t}$ kurz für L_{q_r,i,q_t}. Es gilt $L(\mathcal{A}) = L_{1,3} = L_{1,3,3}$.

$$
\begin{aligned}
L_{1,3,3} &= L_{1,2,3} \cup (L_{1,2,3} L_{3,2,3}^{\star} L_{3,2,3}) && (1)\\
&= \{01\} \cup \{01\}(\{1\} \cup \{001\} \cup \{\varepsilon\})^{\star}\{001\} && (2)\\
&= \{01\}(\{1\} \cup \{001\})^{\star} && (3)\\
& && (4)\\
L_{1,2,3} &= L_{1,1,3} \cup (L_{1,1,2} L_{2,1,2}^{\star} L_{2,1,3}) && (5)\\
&= \{\} \cup \{0\}\{\varepsilon\}\{1\} = \{01\} && (6)\\
L_{3,2,3} &= L_{3,1,3} \cup (L_{3,1,2} L_{2,1,2}^{\star} L_{2,1,3}) && (7)\\
&= \{1\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{00\}\{\varepsilon\}\{1\} && (8)\\
&= \{1\} \cup \{001\} \cup \{\varepsilon\} && (9)\\
& && (10)\\
L_{1,1,3} &= L_{1,0,3} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,3}) = \{\} \cup \{\varepsilon\}\{\} = \{\} && (11)\\
L_{1,1,2} &= L_{1,0,2} \cup (L_{1,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,2}) = \{0\} \cup \{\varepsilon\}\{0\} = \{0\} && (12)\\
L_{2,1,2} &= L_{2,0,2} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,2}) = \{\varepsilon\} \cup \{\} = \{\varepsilon\} && (13)\\
L_{2,1,3} &= L_{2,0,3} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,3}) = \{1\} \cup \{\} = \{1\} && (14)\\
L_{3,1,3} &= L_{3,0,3} \cup (L_{3,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,3}) = \{1\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{0\}\{\varepsilon\}\{\} = \{1\} \cup \{\varepsilon\} && (15)\\
L_{3,1,2} &= L_{3,0,2} \cup (L_{3,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,2}) = \{\} \cup \{0\}\{\varepsilon\}\{0\} = \{00\} && (16)\\
L_{2,1,3} &= L_{2,0,3} \cup (L_{2,0,1} L_{1,0,1}^{\star} L_{1,0,3}) = \{1\} \cup \{\} = \{1\} && (17)\\
& && (18)\\
L_{1,0,3} &= \{\} && (19)\\
L_{1,0,1} &= \{\varepsilon\} && (20)\\
L_{1,0,2} &= \{0\} && (21)\\
L_{2,0,2} &= \{\varepsilon\} && (22)\\
L_{2,0,1} &= \{\} && (23)\\
L_{2,0,3} &= \{1\} && (24)\\
L_{3,0,3} &= \{1\} \cup \{\varepsilon\} && (25)\\
L_{3,0,1} &= \{0\} && (26)\\
L_{3,0,2} &= \{\} && (27)\\
& && (28)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

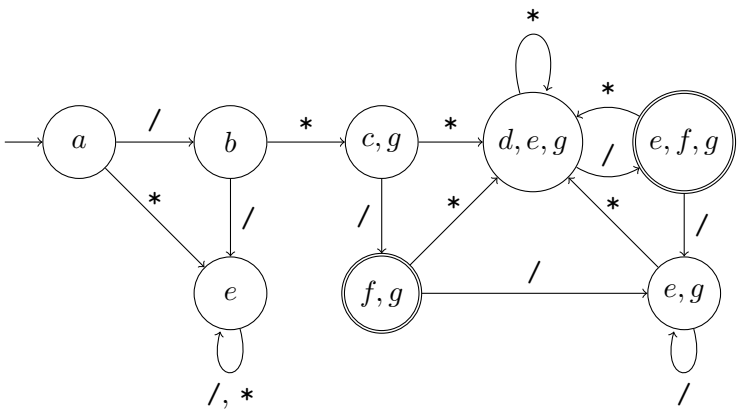
(1 + 1 + 3 + 1 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie den Zustandsgraphen eines deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \delta, S, F)$ mit möglichst wenig Zuständen an und einem überflüssigen Zustand an, so dass für alle binär kodierten Primzahlen w gilt: $w \in L(\mathcal{A})$.

(b) Gegeben sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$\forall q \in Q : (\exists w_2 \in \Sigma^{\star} : \delta(q, w_2) \cap F \neq \emptyset \implies \exists w_1 \in \Sigma^{\star} : w_1 w_2 \in L(\mathcal{A}))$$

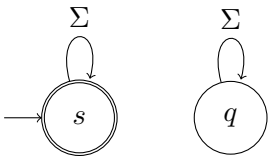
(c) Konstruieren Sie zu folgendem Automaten (vgl. Aufgabe 5 des ersten Übungsblatts) den zugehörigen Äquivalenzklassenautomat. Geben Sie in jedem Schritt alle Äquivalenzklassen an, und durch welche Zeugen sie getrennt werden.



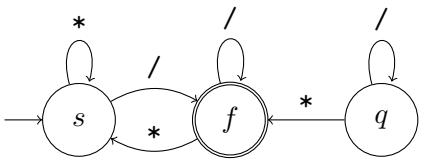
(d) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen des Äquivalenzklassenautomaten aus Teilaufgabe (c).

Lösung:

(a)



(b) Die Aussage ist falsch. Für den folgenden Automaten gilt $\delta(q, *) = F$, aber der Automat akzeptiert kein Wort, das mit $*$ endet.

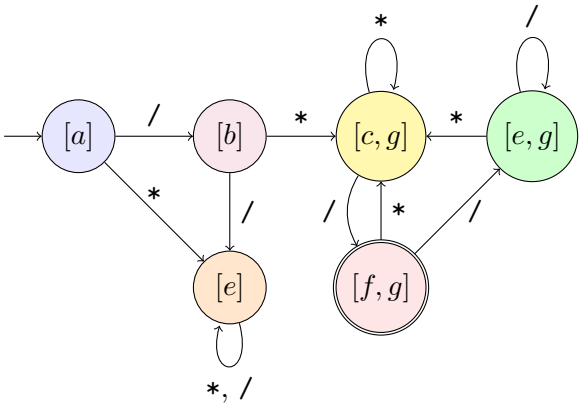


(c)

Zeuge	Äquivalenzklassen
ϵ	$\{\{a\},\{b\},\{e\},\{c,g\},\{d,e,g\},\{e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
/	$\{\{a\},\{b\},\{e\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
*	$\{\{a\},\{b\},\{e\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
//	$\{\{a\},\{b\},\{e\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
/*	$\{\{a\},\{b\},\{e\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
*/	$\{\{a\},\{e\}\}$, $\{\{b\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
**	$\{\{a\},\{e\}\}$, $\{\{b\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
///	$\{\{a\},\{e\}\}$, $\{\{b\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
//*	$\{\{a\},\{e\}\}$, $\{\{b\},\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
/*/	$\{\{a\}\}$, $\{\{e\}\}$, $\{\{b\}\}$, $\{\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
/**	$\{\{a\}\}$, $\{\{e\}\}$, $\{\{b\}\}$, $\{\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
*//	$\{\{a\}\}$, $\{\{e\}\}$, $\{\{b\}\}$, $\{\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
/	$\{\{a\}\}$, $\{\{e\}\}$, $\{\{b\}\}$, $\{\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
**/	$\{\{a\}\}$, $\{\{e\}\}$, $\{\{b\}\}$, $\{\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$
***	$\{\{a\}\}$, $\{\{e\}\}$, $\{\{b\}\}$, $\{\{e,g\}\}$, $\{\{c,g\},\{d,e,g\}\}$, $\{\{f,g\},\{e,f,g\}\}$

Alle Wörter der Länge 4 trennen keine weiteren Äquivalenzklassen.

(d)



Aufgabe 4 (1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte)

Der ebenso geniale wie mächtige Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist geschockt. Der internationale Spitzenagent Sven van Hagen hat sich Zutritt in sein Hauptquartier verschafft. Der gewiefte Agent, der zu seinen größten Feinden zählt, durchsucht gerade zigarettenrauchend[1] seinen Schreibtisch auf der Suche nach brisanten Unterlagen. Wie ist er nur an der unüberwindbaren[2] Stahltür vorbeigekommen? Bereit zum Kampf stürzt Doktor Meta in sein Büro. Er beherrscht die grundlegenden Bewegungen links $\triangleleft$, rechts $\triangleright$; und zusätzlich den Meta-Mentalschlag ✷—. Der Meta-Mentalschlag wird mit einer Widerholung von ✚ wirksamer. Aber Achtung, in dieser Zeit ist er verwundbar! Doktor Meta erinnert sich: durch geschicktes Kombinieren seiner Fähigkeiten kann er machtvollere Attacken durchführen. Diese merkt er sich mithilfe einer regulären Sprache $L = (\triangleleft^\star \triangleright)^\star \cup ✚^\star ✷—$.

(a) Geben Sie zwei DEA $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ für die Sprachen $L_1 = \triangleleft^\star \triangleright$ und $L_2 = ✚^\star ✷—$.

(b) Konstruieren Sie mit der Konstruktion aus der Vorlesung aus den Automaten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen NEA $\mathcal{A}$, der L akzeptiert.

(c) Geben Sie den ε-Abschluss $E(q)$ von jedem Zustand q von $\mathcal{A}$ an und die (erweiterte) Übergangsfunktion $\delta(E(q), x)$ für jedes $x \in \Sigma$. Zeichnen Sie außerdem den Zustandsgraphen des entsprechenden Automaten $\mathcal{A}'$ ohne ε-Übergänge.

(d) Führen Sie tabellarisch die Potenzmengenkonstruktion für $\mathcal{A}'$ durch.

(e) Ist der neue Automat deterministisch? Ist jeder Automat der auf die vorhergehende Art und Weise konstruiert wurde automatisch minimal? Begründen Sie kurz.

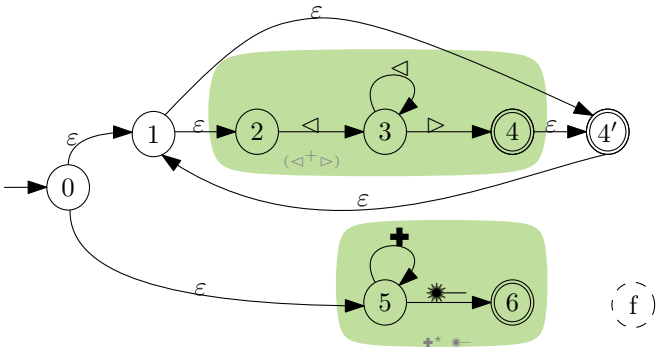
Lösung:

(a) Siehe b)

[1] Sehen Sie sich vor! Der letzte Spitzenagent, der Zigarette rauchte, hatte Miniraketen darin versteckt. Doch selbst dann lebt er nur zweimal!

[2] Siehe Übungsblatt 1.

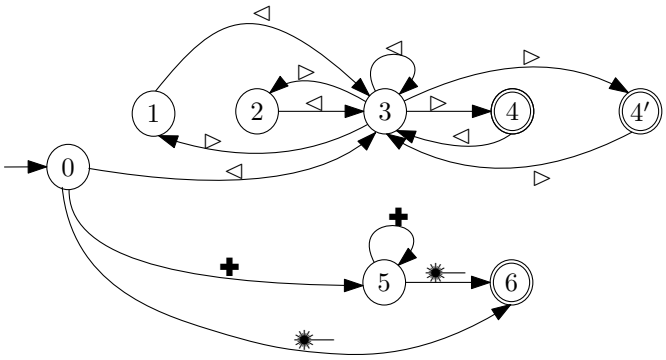
(b)



(c) **ε-Abschluss**

	$E(q)$	◁	▷	✚	✹←
0	0,1,2,4′,5	3	-	5	6
1	1,2,4′	3	-	-	-
2	2	3	-	-	-
3	3	3	1,2,4,4′	-	-
4	4,4′,1,2	3	-	-	-
4′	4′,1,2	3	-	-	-
5	5	-	-	5	6
6	6	-	-	-	-

Zeichnung von $\mathcal{A}'$



(d) **Konstruktion von $\mathcal{A}''$**

	◁	▷	✚	✹←
0	3	f	5	6
3	3	1, 2,4,4’	f	f
f	f	f	f	f
5	f	f	5	f
6	f	f	f	f
1,2,4,4’	3, f	f	f	f
3, f	3,f	1,2,4,4’, f	f	f
1,2,4,4’,f	3, f	f	f	f

(e) Ja, $\mathcal{A}''$ ist deterministisch, da keine mehrdeutige Übergänge existieren, dies ist immer der Fall. Aufgabe 5 vom ersten und Aufgabe 3 von diesem Übungsblatt zeigen, dass die Potenzmengenkonstruktion nicht notwendigerweise zu einem minimalen Automaten führt.