Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 1

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 16/17

Ausgabe 20. Oktober 2016
Abgabe 8. November 2016, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

Aufgabe 1

(1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

Gegeben seien zwei Sprachen $L_1, L_2 \subset \Sigma^\star$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Dabei sei L_1 die Sprache der Wörter, die mit a beginnen und L_2 die Sprache der Wörter mit einer geraden Anzahl an b. Geben Sie reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen an.

(a) $L_1 \cup L_2$

(b) $L_1 \cdot L_2$

(c) $L_1 \setminus L_2$

(d) L_1^c

Lösung:
Hinweis: Beachten Sie den fehlenden Kleenschen Abschluss von Σ in der ursprünglichen Aufgabenstellung. Es soll natürlich gelten $L_1, L_2 \subset \Sigma^\star$.

(a) $a(a \cup b)^\star \cup (ba^\star b \cup a)^\star$

(b) $a(a \cup b)^\star(ba^\star b \cup a)^\star$

(c) $a^+b(ba^\star b \cup a)^\star$

(d) $b(a \cup b)^\star \cup \epsilon$

Aufgabe 2

(2 Punkte)

(a) Sei $A = (a^\star \cup b^\star)c^\star$ und $B = a^\star c^\star \cup b^\star c^\star$. Zeigen Sie $A^\star \cdot B^\star = (A \cup B)^\star$

Lösung:

Wir zeigen $L(A) = L(B)$. Sei $w \in L(A)$. Dies gilt genau dann, wenn $w = uv$ mit $u = a^\star$ oder $u = b^\star$ und v $= c^\star$. Dies ist äquivalent zu der schreibweise $w = a^\star c^\star$ oder $w = b^\star c^\star$ Dies ist genau dann der Fall, wenn $w \in L(B)$. Die beiden regulären Ausdrücke beschreiben somit die gleiche Sprache. Wir dürfen also ohne Gewissensbisse $A^\star = B^\star$ schreiben.

Es gilt somit $A^\star \cup B^\star = A^\star = B^\star = (A \cup B)^\star$.

Aufgabe 3

(2 + 2 = 4 Punkte)

Gegeben seien zwei Grammatiken $G_i = (\Sigma, V, S, R_i), i = 1, 2$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}, V = \{S, A, B, C\}$ und folgenden Produktionsregeln

(a) $R_1 = \{S \to ABC, A \to aA \mid a, B \to bB \mid b, C \to cC \mid c\}$

(b) $R_2 = \{S \to aSc \mid B \mid ac, B \to bBc \mid bc\}$

Ist $L(G_i)$ eine reguläre Sprache? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck an. Wenn nicht, begründen Sie dies kurz und geben sie eine (informale) Beschreibung der Sprache an.

Lösung:

(a) $a^+b^+c^+$

(b) $a^ib^jc^{i+j}, i, j \in \mathbb{N}_0, i + j > 0$. Nein, DEA können nicht zählen.

Aufgabe 4

(2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

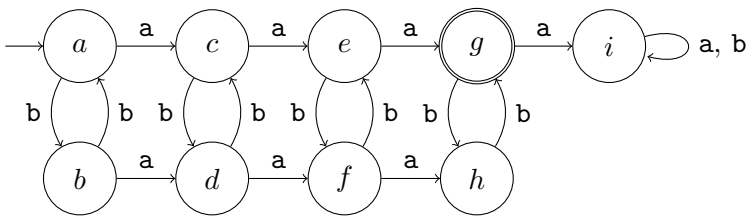
(a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der die reguläre Sprache $L_1 = \{w \mid |w|_a = 3 \wedge |w|_b \mod 2 = 0\}$ erkennt. *Hinweis*: $|w|_x$ gibt an, wie oft x in w vorkommt, z.B. $|\texttt{abba}|_a = 2$.

(b) Wie würden Sie einen deterministischen endlichen Automaten konstruieren, der die reguläre Sprache $L_2 = \{w \mid |w|_a = 2016 \wedge |w|_b \mod 42 = 0\}$ erkennt?

(c) Geben Sie eine nichtdeterministischen endlichen Automaten an, der alle Wörter über dem Alphabet $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ erkennt, in denen sowohl `0110` als auch `101` als Teilwort vorkommt.

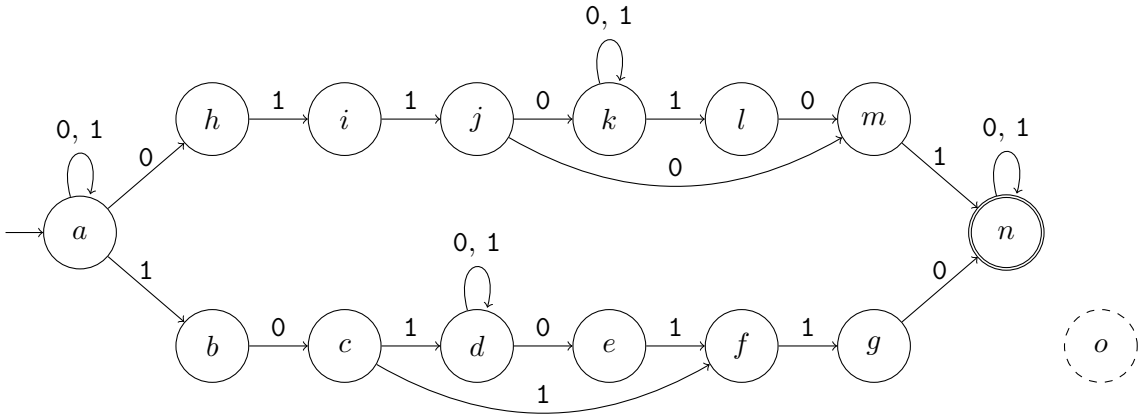
Lösung:

(a)



(b) Gleiche Idee wie in Teil (a), aber konstruiere statt einem 2×4 Gitter ein 42×2017 Gitter.

(c)



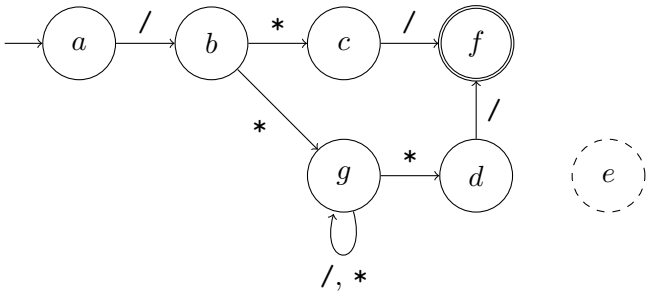
Hinweis: alle nicht explizit angegebenen Übergänge führen zu Zustand o.

Aufgabe 5

(1 + 3 = 4 Punkte)

(a) Geben Sie die reguläre Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{/, *\}$ an, die von dem unten abgebildeten Automaten erkannt wird.
Hinweis: alle nicht explizit angegebenen Übergänge führen zu Zustand e.

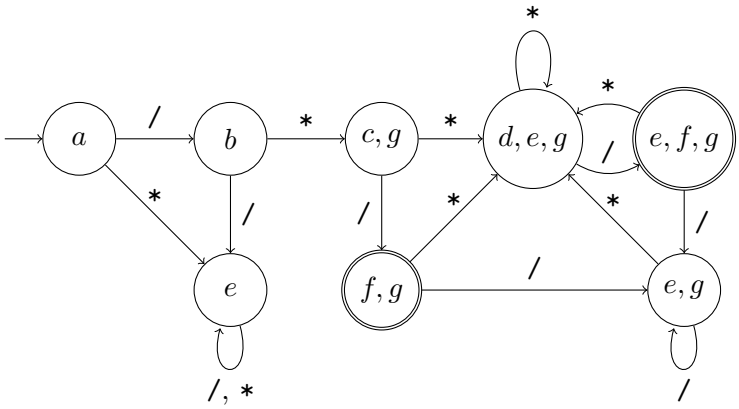
(b) Nutzen Sie die Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung, um den Automat in einen deterministischen endlichen Automaten zu überführen.



Lösung:

(a) Der Automat erkennt genau die Wörter, die mit „/*“ beginnen und mit „*/“ enden.

(b)



Aufgabe 6 (1 + 4 + 2 = 7 Punkte)

Der ebenso geniale, wie auch vergessliche Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist im Baufieber. Der Hauptzugang zu seinem unterirdischen Geheimlabor soll von einer unüberwindbaren Stahltür geschützt werden, die sich nur durch Eingabe eines gültigen Passworts öffnen lässt. Bei einer falschen Eingabe wird der Eindringling stattdessen durch eine Falltür im Boden den Haien vorgeworfen. Da sich Doktor Meta, aufgrund seiner Vergesslichkeit, nur schlecht an Passwörter erinnern kann, hat er die Tür so eingestellt, dass Sie jedes Wort aus einer zuvor festgelegten formalen Sprache L über einem endlichen Alphabet Σ akzeptiert. Dieses - sicherheitstechnisch fragwürdige, aber für Doktor Meta sehr praktische - Verfahren soll intern durch einen deterministischen endlichen Automaten realisiert werden. Da Sie als Doktor Metas neuer Sicherheitsexperte eingestellt worden sind, sollen Sie ihm bei einigen letzten Konfigurationen helfen:

(a) Kann der Öffnungsmechanismus der Falltür für jede formale Sprache L durch einen deterministischen endlichen Automaten realisiert werden? Warum?

(b) Sie haben sich mit Doktor Meta auf eine geeignete Sprache L geeignet. Leider hat einer ihrer Bauarbeiter, namentlich Ingo N. Kompetenz, das Schloss falsch verbaut. Die Kontrolleinheit der Tür bekommt das Passwort genau umgedreht zur Überprüfung. Da die Bauarbeiten bereits weit fortgeschritten sind, beauftragt Doktor Meta Sie, sich – natürlich erst nachdem Sie Herrn Kompetenz den Haien vorgeworfen haben – um eine Lösung des Problems zu bemühen. Wie könnten Sie den Automaten mit möglichst wenigen Änderungen umbauen, sodass er dennoch die gleiche Passwortmenge erkennt? Wieso funktioniert Ihr Ansatz? Ist Ihr Automat deterministisch oder nichtdeterministisch? Begründen Sie!

(c) Doktor Meta möchte einige Mitarbeiter unauffällig verschwinden lassen. Dafür hat er die Passwörter, die sie normalerweise eingeben, studiert und Muster[1] darin gefunden. Er beauftragt sie nun, die Kontrolleinheit so umzubauen, dass gerade die Muster der Leute, die er loswerden möchte von der Kontrolleinheit abgelehnt werden. Der Automat darf also nur noch eine Teilmenge der alten Sprache L akzeptieren. Können Sie den Automaten für jedes Muster entsprechend umbauen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

(a) Nein. Dafür muss L regulär sein.

(b) Sei $\mathcal{A} = \{Q, \Sigma, \delta, s, F\}$ ein deterministischer Automat, der L akzeptiert. Konstruiere NEA $\mathcal{A}' = \{Q', \Sigma', \delta', s', F'\}$ wie folgt:

- $Q' = Q \cup \{s'\}$ mit $s' \notin Q$, $\Sigma' = \Sigma$
- Für jedes $a \in \Sigma$ und alle $q_1, q_2 \in Q$, wenn $\delta(q_1, a) = q_2$, dann $\delta(q_2, a) = q_1$. Folglich werden alle Zustandsübergänge *umgedreht*. So kann es zu nichtdeterministischen Übergängen kommen.
- Der Startzustand von $\mathcal{A}$ wird der akzeptierende Zustand von $\mathcal{A}'$: $F' = s$
- s' ist der Startzustand von $\mathcal{A}'$ mit $q(s', \epsilon) = f$ für alle $f \in F$. Es gibt also ϵ-Übergänge.

Dieser NEA kann natürlich mit der Potenzmengenkonstruktion in einen DEA überführt werden.

[1] Muster sind beliebige Mengen von Wörtern über dem Alphabet Σ.

(c) Nein. Denn die Sprache, die durch die Muster beschrieben wird, muss nicht regulär sein. Zum Beispiel könnten Muster der Form $\left\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\right\}$, also eine Teilmenge der regulären Sprache a^+b^+ ist, von einem DEA nicht erkannt werden kann.