**Algorithmische Graphentheorie**
**Wintersemester 2015/2016**
Marcel Radermacher, Ignaz Rutter

# Übungsblatt 4

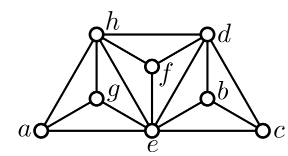
Besprechung in der Übung am 10. Dezember 2015

## Aufgabe 1: Unberechenbare Eliminationsschemata ⋆⋆

Geben Sie einen Graph mit perfektem Eliminationsschema $\sigma$ an, sodass $\sigma$ nicht mittels lexikographischer BFS berechnet werden kann.

## Aufgabe 2: Eliminationsschema oder nicht ⋆⋆

Sei $\sigma = [a, b, c, d, e, f, g, h]$ eine Knotenordnung auf dem nebenstehenden Graphen $G$. Führen Sie den Linearzeit-Algorithmus aus der Vorlesung aus, um zu überprüfen, ob $\sigma$ ein perfektes Eliminationsschema für $G$ ist.




## Aufgabe 3: $k$-Bäume sind chordal ⋆⋆

Die Klasse der $k$-Bäume ist rekursiv wie folgt definiert. Der vollständige Graph $K_k$ ist ein $k$-Baum. Sei $T$ ein $k$-Baum mit einer Clique $C = \{x_1, \ldots, x_k\}$ der Größe $k$. Dann ist der Graph, den man aus $T$ erhält, indem man einen neuen Knoten mit Nachbarschaft $C$ hinzufügt, wieder ein $k$-Baum.

Zeigen Sie, dass $k$-Bäume chordal sind. Geben Sie einen chordalen Graphen an, der kein $k$-Baum ist.

## Aufgabe 4: 2-Bäume und planare Graphen ⋆

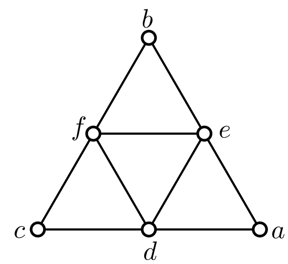
Zeigen Sie, dass jeder 2-Baum planar ist.

## Aufgabe 5: Welche Cliquen sind maximal? ⋆

Sei $\sigma$ ein perfektes Eliminationsschema. Sei $K_v$ die Clique bestehend aus dem Knoten $v$ und seinen (bezüglich $\sigma$) nachfolgenden Nachbarn. Zeigen Sie, dass $K_v$ genau dann eine inklusionsmaximale Clique ist, wenn es keinen Vorgänger $u$ von $v$ gibt sodass $K_v$ Teilgraph von $K_u$ ist.

## Aufgabe 6: Chordale Graphen als Schnitt von Teilbäumen ⋆⋆

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der für einen chordalen Graphen $G$ eine Menge von Teilbäumen eines Baumes berechnet, sodass $G$ der Schnittgraph dieser Teilbäume ist. Nehmen Sie an, dass ein perfektes Eleminationsschema von $G$ bereits gegeben ist.




Wenden Sie ihren Algorithmus auf den nebenstehenden Graphen an. Benutzen Sie, dass $\sigma = [a, b, c, d, e, f]$ ein perfektes Eliminationsschema ist.

## Aufgabe 7: Helly-Eigenschaft und Bäume ⋆⋆

Sei $G$ ein zusammenhängender Graph. Zeigen Sie, dass $G$ genau dann ein Baum ist, wenn jede Familie von Pfaden in $G$ die Helly-Eigenschaft erfüllt.

## Aufgabe 8: Kantengraphen chordaler Graphen ⋆⋆

Sei $G$ ein Graph. Der *Kantengraph* (engl. *line graph*) $L(G)$ enthält einen Knoten für jede Kante von $G$ wobei zwei Knoten in $L(G)$ verbunden sind, wenn die zugehörigen Kanten in $G$ einen gemeinsamen Endknoten haben.

Zeigen Sie, dass $G$ chordal ist, wenn $L(G)$ chordal ist. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht stimmt.

## Aufgabe 9: Dominierende Menge in chordalen Graphen ⋆⋆⋆

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $A \subseteq V$ ist *dominierend*, wenn jeder Knoten einen Nachbarn in $A$ hat oder selbst in $A$ enthalten ist. Zeigen Sie, dass das Problem eine minimale dominierende Menge in einem chordalen Graphen zu berechnen NP-schwer ist.

*Hinweis 1:* Benutzen Sie, dass das *3-dimensionale Matching Problem* NP-schwer ist. Es ist wie folgt definiert. Seien $W$, $X$, $Y$ drei disjunkte Mengen und sei $M \subseteq W \times X \times Y$ eine Menge von Tripeln (jedes Tripel enthält genau ein Element aus jeder der Mengen $W$, $X$, $Y$). Gibt es eine Teilmenge $M' \subseteq M$, sodass jedes Element aus $W$, $X$ und $Y$ in genau einem Tripel aus $M'$ vorkommt?

*Hinweis 2:* Fassen Sie chordale Graphen als Schnittgraphen von Teilbäumen eines Baumes auf.