

Übungsblatt 3

Vorlesung Algorithmen II im WS 12/13

Ausgabe 13. November 2012

Besprechung 27. November 2012

Problem 1: Algorithmus von De Pina

Abbildung 1 zeigt den so genannten *Peterson-Graph*. Grau und fett ist ein aufspannender Baum des Graphen eingezeichnet. Alle Kanten haben Gewicht 3.

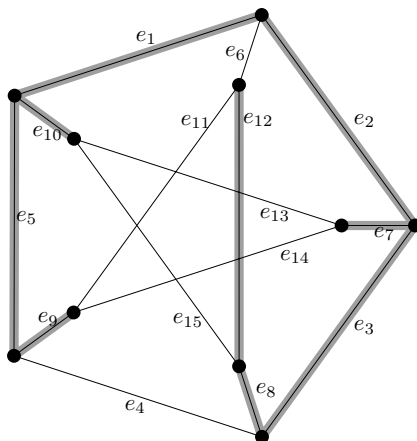


Abbildung 1: Der *Peterson-Graph*.

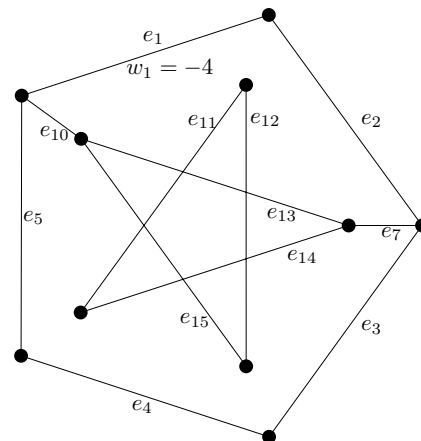


Abbildung 2: Variante von *Pete*.

- Führen Sie den Algorithmus von de Pina (algebraisch, Algorithmus 41 im Skript) auf dem Graphen in Abbildung 1 aus. Nutzen Sie den eingezeichneten Baum und halten Sie sich an die Reihenfolge der Kanten entsprechend ihrer Nummerierung. Notieren Sie für jeden Schleifendurchlauf der Zeilen 3 bis 7 des Algorithmus folgendes: k, C_k, S_k und alle S_i welche geändert werden, sowie die resultierende Basis.
- In Abbildung 2 ist $Pete_{6,8,9}$ zu sehen. Beachten Sie das negative Kantengewicht -4 von e_1 . Alle anderen Gewichte seien hier 1. Raten Sie eine minimale Kreisbasis von $Pete_{6,8,9}$.

Problem 2: Korrektheit der Fundamentalbasis-Definition – Kreisbasen

Zur Wiederholung:

- Für einen K -Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:
 - $B \subseteq V$ ist eine Basis von V .
 - $B \subseteq V$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V .
 - $B \subseteq V$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V .
 - $B \subseteq V$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V .

- Eine Teilmenge $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ eines K -Vektorraums V heißt *linear unabhängig*, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i = 0, a_i \in K \iff a_i = 0 \quad \forall i,$$

das heißt, der Nullvektor lässt sich nur als triviale Linearkombination der Vektoren in B beschreiben.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph und $T = (V, E_T)$ ein aufspannender Baum in G . Dann ist die Fundamentalbasis (bzgl. T) des Kreisraumes \mathcal{C} von G definiert als $B_T := \{C_e \mid e \in E \setminus E_T, C_e \in \mathcal{C}, E_{C_e} = \{e = \{u, v\}\} \cup \{\text{Pfadkanten von } u \text{ nach } v \text{ in } T\}\}$.

- Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$, $m := |E|$, linear unabhängig ist.
- Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$ ein Erzeugendensystem von \mathcal{C} ist. Gehen Sie dabei konstruktiv vor und beschreiben Sie, wie ein beliebiger Kreis durch Linearkombination von Elementen aus B_T gebildet werden kann.
- Zeigen Sie, dass $|B_T| = m - n + 1$ gilt, wobei $n := |V|$, $m := |E|$.

Problem 3: Kreisräume – Kreisbasen

- Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **exponentiell** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.
- Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **linear** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Problem 4: Gleichverteiltes JA/NEIN

Gegeben sei ein Algorithmus BIASED-RANDOM, der mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 1 ausgibt und mit $(1 - p)$ den Wert 0. Geben Sie einen Algorithmus an, der BIASED-RANDOM als Methode benutzt und jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den Wert 0 oder 1 ausgibt. Analysieren Sie außerdem die erwartete Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von p .

Problem 5: Fingerabdrücke

Mithilfe von *Fingerabdrücken* kann man die Gleichheit von Objekten prüfen, indem man statt der gesamten Struktur der Objekte nur einen Teil, den sogenannten Fingerabdruck, vergleicht. Sind die Fingerabdrücke der Objekte verschieden, so weiß man, dass auch die Objekte verschieden sind. Der Umkehrschluss gilt im Allgemeinen nicht. Gegeben sei Algorithmus 1, der überprüft, ob für drei $n \times n$ reelle Matrizen A, B, C gilt: $AB = C$.

- Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 JA liefert, wenn gilt $AB = C$.
- Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Algorithmus 1 JA liefert, obwohl $AB \neq C$ gilt, kleiner oder gleich $1/2$ ist.

Algorithmus 1 : MATRIZENPRODUKTTEST (A, B, C)

```
1  $r \leftarrow \langle \text{Vektor von } n \text{ unabhängigen Zufallsbits} \rangle ;$   
2  $x \leftarrow Br ;$   
3  $y \leftarrow Ax;$   
4  $z \leftarrow Cr;$   
5 Wenn  $y \neq z$   
6    $\quad$  return NEIN;  
7 sonst  
8    $\quad$  return JA;
```

- (c) Wie kann diese Wahrscheinlichkeit einer fälschlichen Ausgabe JA (siehe (b)) einfach reduziert werden?