

# Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 17. Januar 2012

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



## Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache  $L$   
gibt es eine Konstante  $n \in \mathbb{N}$ ,  
so dass sich jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$

so als

- $z = uvwxy$

schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$ ,
- $|vwx| \leq n$  und
- für alle  $i \geq 0$  das Wort  $uv^iwx^iy \in L$  ist.

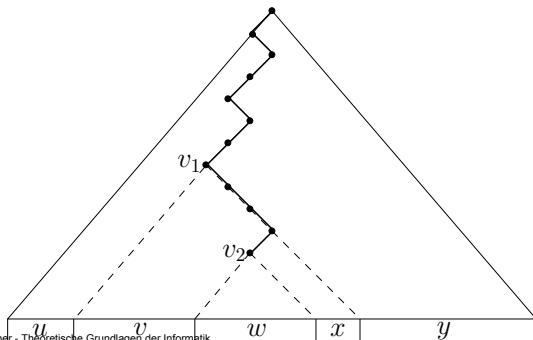
## Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache  $L$   
gibt es eine Konstante  $n \in \mathbb{N}$ ,  
so dass für jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:

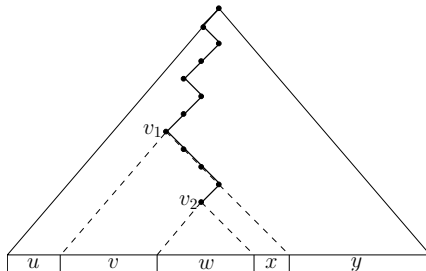
Wenn wir in  $z$  mindestens  $n$  Buchstaben markieren, so lässt sich  $z$  so  
als  $z = uvwxy$  schreiben,

- dass von den mindestens  $n$  markierten Buchstaben
  - mindestens einer zu  $vx$  gehört und
  - höchstens  $n$  zu  $vw$  gehören und
- für alle  $i \geq 0$  das Wort  $uv^iwx^i y \in L$  ist.

- Sei  $L$  kontextfreie Sprache
- Sei  $G$  Grammatik zu  $L$  mit Variablen  $V$  in Chomsky-Normalform, d.h. alle Regeln sind von der Form  $A \rightarrow BC$  oder  $A \rightarrow a$ .
- Setze  $n := 2^{|V|+1}$ .
- Wähle beliebiges Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$
- Betrachte einen Syntaxbaum  $T$  zu  $z$ .

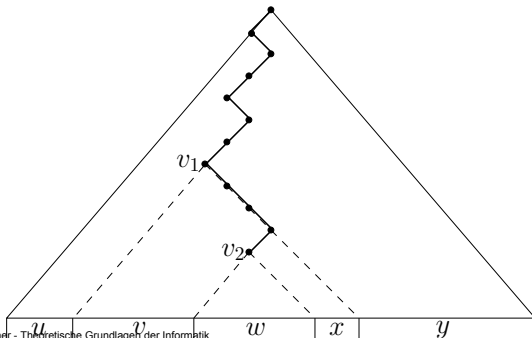


- $T$  hat  $|z|$  Blätter und alle inneren Knoten außer den Vorgängern der Blätter haben Grad 2, ansonsten Grad 1.
- Seien mindestens  $n$  Blätter markiert.
- Durchlaufe einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt. Wähle stets den Nachfolger, auf dessen Seite die größere Anzahl markierter Blätter liegt.
- Nenne Knoten auf dem Weg, für die rechter und linker Unterbaum markierte Blätter hat, **Verzweigungsknoten**.



## Beweis

- Wegen  $n > 2^{|V|}$  liegen auf dem Weg mindestens  $|V| + 1$  Verzweigungsknoten
- Von den letzten  $|V| + 1$  Verzweigungsknoten entsprechen mindestens zwei Knoten  $v_1, v_2$  derselben Variablen  $A$ .
- Sei  $vwx$  Wort unter Teilbaum mit Wurzel  $v_1$
- Sei  $w$  Wort unter Teilbaum mit Wurzel  $v_2$ .
- Damit sind  $u$  und  $y$  eindeutig bestimmt.



- Da  $v_1$  Verzweigungsknoten ist, enthält  $vx$  mindestens einen markierten Buchstaben.
- Da der Unterbaum von  $v_1$  inkl.  $v_1$  nur  $|V| + 1$  Verzweigungsknoten enthält, gibt es in  $vwx$  höchstens  $2^{|V|+1} = n$  markierte Buchstaben.
- Zu  $G$  existieren die Ableitungen

$$S \xrightarrow{*} uAy, \quad A \xrightarrow{*} vAx, \quad A \xrightarrow{*} w.$$

Daraus kann  $z$  abgeleitet werden durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uvwxy = z,$$

aber auch  $uv^iwx^i y$  für jedes  $i \geq 1$  durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uv^2Ax^2y \xrightarrow{*} \dots \rightarrow uv^iAx^i y \rightarrow uv^iwx^i y.$$

Also ist auch  $uv^iwx^i y \in L$  für  $i \geq 0$ .

- Der Spezialfall von Odgen's Lemma, in dem alle Buchstaben von  $z$  markiert sind, ist gerade das Pumping-Lemma.



**Satz:**

Die Chomsky-Hierarchie ist echt, d.h.

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0 ,$$

wobei  $\mathcal{L}_i, 0 \leq i \leq 3$ , Klasse der durch Typ- $i$ -Grammatiken erzeugten Sprachen.

**Es gibt eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist.**

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextfrei und wird durch die Grammatik

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ R &= \{S \rightarrow 01 \mid 0S1\} . \end{aligned}$$

erzeugt. Sie ist aber nicht regulär.

(Beispiel (2) zum Pumping-Lemma, Vorlesung vom 26.1.2010)

**Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.**

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextsensitiv.

### Beweis

- $L$  kontextsensitiv  $\Leftrightarrow$  es gibt NTM mit linearem Speicherbedarf für  $L$
- Eingabe  $w \in \{a, b, c\}^*$
- Überprüfe deterministisch, ob  $w = a^i b^j c^k$
- Überprüfe deterministisch, ob  $j = i$  und  $k = i$
- Speicherbedarf:  $i + j + k$ , also linear
- $\Rightarrow L$  kontextsensitiv

**Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.**

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

ist nicht kontextfrei.

### Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache  $L$   
gibt es eine Konstante  $n \in \mathbb{N}$ ,  
so dass sich jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$

so als

- $z = uvwxy$

schreiben lässt, dass

- $|vx| \geq 1$ ,
- $|vwx| \leq n$  und
- für alle  $i \geq 0$  das Wort  $uv^iwx^iy \in L$  ist.

Die Sprache  $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$  ist nicht kontextfrei.

### Beweis

- Annahme:  $L$  sei kontextfrei. Sei dann  $n$  wie im PL gefordert.
- Wähle das Wort  $z = a^n b^n c^n \in L$ .
- Wir betrachten eine Zerlegung  $z = uvwxy$  wie im PL gefordert:
  - $|vx| \geq 1$ ,
  - $|vwx| \leq n$  und
  - für alle  $i \geq 0$  ist das Wort  $uv^i wx^i y \in L$ .

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 1\}$  ist nicht kontextfrei.

### Beweis

- Annahme:  $L$  sei kontextfrei. Sei dann  $n$  wie im PL gefordert.
- Wähle das Wort  $z = a^n b^n c^n \in L$ .
- Wir betrachten eine Zerlegung  $z = uvwxy$  wie im PL gefordert:
  - $|vx| \geq 1$ ,
  - $|vwx| \leq n$  und
  - für alle  $i \geq 0$  ist das Wort  $uv^i wx^i y \in L$ .
- Fallunterscheidung, Fall 1:  $vwx$  besteht nur aus  $a$  und  $b$ 
  - Dann enthält  $vx$  mindestens ein  $a$  oder  $b$ .
  - Damit ist  $uv^0 wx^0 y = a^i b^j c^n \notin L$  weil entweder  $i < n$  oder  $j < n$ .
  - Dies ist ein Widerspruch zum PL.

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 1\}$  ist nicht kontextfrei.

### Beweis

- Annahme:  $L$  sei kontextfrei. Sei dann  $n$  wie im PL gefordert.
- Wähle das Wort  $z = a^n b^n c^n \in L$ .
- Wir betrachten eine Zerlegung  $z = uvwxy$  wie im PL gefordert:
  - $|vx| \geq 1$ ,
  - $|vwx| \leq n$  und
  - für alle  $i \geq 0$  ist das Wort  $uv^i wx^i y \in L$ .
- Fallunterscheidung, Fall 2:  $vwx$  besteht nur aus  $b$  und  $c$ 
  - Dann enthält  $vx$  mindestens ein  $b$  oder  $c$ .
  - Damit ist  $uv^0 wx^0 y = a^n b^i c^j \notin L$  weil entweder  $i < n$  oder  $j < n$ .
  - Dies ist ein Widerspruch zum PL.



Die Sprache  $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$  ist nicht kontextfrei.

### Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache  $L$   
gibt es eine Konstante  $n \in \mathbb{N}$ ,  
so dass für jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt:

Wenn wir in  $z$  mindestens  $n$  Buchstaben markieren, so lässt sich  $z$  so als  $z = uvwxy$  schreiben,

- dass von den mindestens  $n$  markierten Buchstaben
  - mindestens einer zu  $vx$  gehört und
  - höchstens  $n$  zu  $vw$  gehören und
- für alle  $i \geq 0$  das Wort  $uv^i wx^i y \in L$  ist.

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 1\}$  ist nicht kontextfrei.

### Alternativer Beweis mit Odgen's Lemma

- Annahme:  $L$  sei kontextfrei.
- Sei dann  $n$  wie in Odgen's Lemma gefordert.
- Wähle das Wort  $z = a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1} \in L$ .
- Markiere alle  $b$ .
- Damit enthält  $vwx$  mindestens ein  $b$  aber kein  $a$  oder kein  $c$ .
- Es enthalte  $vwx$  kein  $c$  (anderer Fall analog)
- Damit ist  $uv^0wx^0y = a^i b^j c^n \notin L$  weil entweder  $i < n$  oder  $j < n$ .
- Dies ist ein Widerspruch zu Odgen's Lemma.

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei  $L_U$  die universelle Sprache.

### Wiederholung

Die **universelle Sprache**  $L_U$  über  $\{0, 1\}$  ist definiert durch

$$L_U := \{wv \mid v \in L(T_w)\}.$$

$L_U$  ist also die Menge aller Wörter  $wv$  für die  $T_w$  bei der Eingabe  $v$  hält und  $v$  akzeptiert.

**Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.**

Es sei  $L_U$  die universelle Sprache.

- $L_U$  ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar (Kapitel 3).
- Wegen der Semi-entscheidbarkeit gilt  $L_U \in \mathcal{L}_0$ .
- Annahme:  $L_U \in \mathcal{L}_1$ .
- Dann gibt es eine NTM, die  $L_U$  mit linearem Speicher erkennt.
- Mit linearem Speicher können nur exponentiell viele verschiedene Konfigurationen auftreten.
- Diese könnte durch eine DTM durch Ausprobieren aller möglichen Konfigurationen simuliert werden.
- Dies wäre ein Widerspruch zur Nichtentscheidbarkeit von  $L_U$ .

Sei  $G$  eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable  $A$  heißt **nutzlos**, falls es keine Ableitung  $S \xrightarrow{*} w$  gibt,  $w \in \Sigma^*$ , in der  $A$  vorkommt.

## Satz:

Für eine kontextfreie Grammatik kann die Menge der nutzlosen Variablen (in polynomialer Zeit) berechnet werden.

## Beweis:

- Wir benutzen ein zweistufiges Verfahren.

## Bestimme alle Variablen, die ein Wort erzeugen können

Formal: Berechne  $V' = \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^* : A \xrightarrow{*} w\}$

- Initialisiere eine leere Queue  $Q$ .
- Füge alle  $A \in V$  mit  $A \rightarrow w$  für ein  $w \in \Sigma^*$  in  $Q$  und  $V'$  ein.
- Entferne der Reihe nach jedes Element  $A$  aus  $Q$ 
  - Ersetze jede Regel  
 $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$   
durch die Regeln  
 $B \rightarrow \alpha w \beta$ , wobei  $w \in \Sigma^*$  und  $A \rightarrow w$  Regel.
  - Wenn dabei eine Regel der Form  
 $B \rightarrow w'$ ,  $w' \in \Sigma^*$ ,  
entsteht und  $B \notin V'$ , füge  $B$  in  $Q$  und  $V'$  ein.
- Das Verfahren endet, wenn  $Q$  leer ist.

## Bemerkung 1

- Falls  $S \notin V'$ , breche das Verfahren ab.
- $G$  erzeugt dann die leere Sprache und alle Variablen sind nutzlos.

## Bemerkung 2

- Für jede Variable  $A$  mit  $A \xrightarrow{*} w$  für ein  $w \in \Sigma^*$  gilt:
- Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form  $A \xrightarrow{*} w$  kann für  $A$  gezeigt werden, dass  $A \in V'$ .

# Beispiel: Schritt 1

Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  mit Produktionen  $R$  gegeben durch

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$



# Beispiel: Schritt 1

Füge alle  $A \in V$  mit  $A \rightarrow w$  für ein  $w \in \Sigma^*$  in  $Q$  und  $V'$  ein.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \emptyset$$

$$Q = \emptyset$$

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A\}$$

$$Q = \{A\}$$

# Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element  $A$  aus  $Q$

- Ersetze jede Regel  $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$  durch die Regeln  $B \rightarrow \alpha w \beta$ , wobei  $w \in \Sigma^*$  und  $A \rightarrow w$  Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form  $B \rightarrow w'$ ,  $w' \in \Sigma^*$  entsteht und  $B \notin V'$ , füge  $B$  in  $Q$  und  $V'$  ein.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A\}$$

$$Q = \{A\}$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{S, D\}$$

# Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element  $A$  aus  $Q$

- Ersetze jede Regel  $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$  durch die Regeln  $B \rightarrow \alpha w \beta$ , wobei  $w \in \Sigma^*$  und  $A \rightarrow w$  Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form  $B \rightarrow w'$ ,  $w' \in \Sigma^*$  entsteht und  $B \notin V'$ , füge  $B$  in  $Q$  und  $V'$  ein.

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow SD$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcaD$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{S, D\}$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{D\}$$

# Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element  $A$  aus  $Q$

- Ersetze jede Regel  $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$  durch die Regeln  $B \rightarrow \alpha w \beta$ , wobei  $w \in \Sigma^*$  und  $A \rightarrow w$  Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form  $B \rightarrow w'$ ,  $w' \in \Sigma^*$  entsteht und  $B \notin V'$ , füge  $B$  in  $Q$  und  $V'$  ein.

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcaD$$

$$V' = \{A, S, D\}$$

$$Q = \{D\}$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bca**bc**b$$

$$V' = \{A, S, D, **E**\}$$

$$Q = \{**E**\}$$

# Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element  $A$  aus  $Q$

- Ersetze jede Regel  $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$  durch die Regeln  $B \rightarrow \alpha w \beta$ , wobei  $w \in \Sigma^*$  und  $A \rightarrow w$  Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form  $B \rightarrow w'$ ,  $w' \in \Sigma^*$  entsteht und  $B \notin V'$ , füge  $B$  in  $Q$  und  $V'$  ein.

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcabcb$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$Q = \{E\}$$

$$S \rightarrow bca|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow bcb$$

$$E \rightarrow bcabcb$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$Q = \{\}$$

**Bestimme alle Variablen in  $V'$ , die vom Startsymbol aus „erreicht“ werden können.**

Formal: Berechne  $\{A \in V' \mid S = A \text{ oder } \exists \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^* : S \xrightarrow{*} \alpha A \beta\}$

- Starte mit  $V'' = \{S\}$
- Füge zu allen Regeln  $A \rightarrow \alpha B \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$ ,  $A \in V''$ ,  $B \in V'$  die Variable  $B$  in  $V''$  ein.
- Wiederhole den letzten Schritt, bis sich  $V''$  nicht mehr ändert.

Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form  $S \rightarrow \alpha A \beta$ ,  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$ , kann dann wieder die Korrektheit bewiesen werden.

**Fazit:** Nach Ende von Schritt 2 ist  $V''$  die Menge aller nützlichen Variablen.

## Beispiel: Schritt 2

Starte mit  $V'' = \{S\}$

$S \rightarrow Aa|B|Cab$

$A \rightarrow bc|A$

$B \rightarrow Bd|Cd$

$C \rightarrow aBc$

$D \rightarrow Ab$

$E \rightarrow SD$

$V' = \{A, S, D, E\}$

$V'' = \{\}$

$S \rightarrow Aa|B|Cab$

$A \rightarrow bc|A$

$B \rightarrow Bd|Cd$

$C \rightarrow aBc$

$D \rightarrow Ab$

$E \rightarrow SD$

$V' = \{A, S, D, E\}$

$V'' = \{S\}$

## Beispiel: Schritt 2

Füge zu allen Regeln  $A \rightarrow \alpha B \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$ ,  $A \in V''$ ,  $B \in V'$  die Variable  $B$  in  $V''$  ein.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S\}$$

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S, A\}$$



## Beispiel: Schritt 2

Wiederhole den letzten Schritt, bis sich  $V''$  nicht mehr ändert.

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S, A\}$$

$$S \rightarrow Aa|B|Cab$$

$$A \rightarrow bc|A$$

$$B \rightarrow Bd|Cd$$

$$C \rightarrow aBc$$

$$D \rightarrow Ab$$

$$E \rightarrow SD$$

$$V' = \{A, S, D, E\}$$

$$V'' = \{S, A\}$$

## Korollar

Für eine kontextfreie Grammatik  $G$  kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob  $L(G) = \emptyset$  ist.

## Beweis:

- $L(G) = \emptyset$  genau dann, wenn  $S$  nutzlos.

**Satz:**

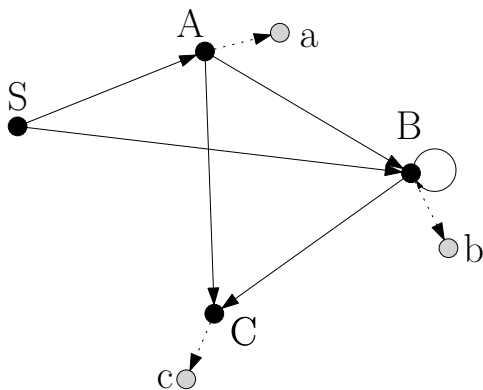
Für eine kontextfreie Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, R)$  kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob  $L(G)$  endlich ist.

**Beweis:**

- Entferne alle nutzlosen Variablen
- Überführe  $G$  in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.
- Betrachte den gerichteten Graphen  $(V, E)$  mit
  - Knotenmenge  $V$  ist gleich der Variablenmenge von  $G$
  - Kantenmenge  $E = \{(A, B) \mid \exists C \in V : A \rightarrow BC \in R \vee A \rightarrow CB \in R\}$
- Mit Tiefensuche kann entschieden werden, ob dieser Graph einen Kreis enthält.
- Man kann sich leicht überlegen, dass  $L(G)$  genau dann endlich ist, wenn der entsprechende Graph keinen Kreis enthält.

# Beispielgraph

$S \rightarrow AB$   
 $A \rightarrow BC$   
 $B \rightarrow BC$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$   
 $C \rightarrow c$



**Satz:**

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

**Beweis:**

- Seien  $L_1$  kontextfreie Sprache mit Grammatik  $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien  $L_2$  kontextfreie Sprache mit Grammatik  $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Vereinigung: Die Grammatik

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$$

$S$         neues Startsymbol

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}$$

erzeugt  $L_1 \cup L_2$ .

**Satz:**

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

**Beweis:**

- Seien  $L_1$  kontextfreie Sprache mit Grammatik  $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien  $L_2$  kontextfreie Sprache mit Grammatik  $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Konkatenation: Die Grammatik

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$$

$S$         neues Startsymbol

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}$$

erzeugt  $L_1 \cdot L_2$ .

### Satz:

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

### Beweis:

- Seien  $L_1$  kontextfreie Sprache mit Grammatik  $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien  $L_2$  kontextfreie Sprache mit Grammatik  $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Kleenscher Abschluss: Die Grammatik

$$V = V_1 \cup \{S\}$$

$S$         neues Startsymbol

$$R = R_1 \cup \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow SS, S \rightarrow S_1\}$$

erzeugt  $L_1^*$ .

**Satz:**

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

**Beweis Schritt:** Betrachte die kontextfreien Sprachen

$$\begin{array}{ll}
 L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} & L_2 = \{c\}^* \\
 L_3 = \{a\}^* & L_4 = \{b^n c^n \mid n \geq 1\}
 \end{array}$$

Nach dem letzten Satz sind dann auch  $L_1 \cdot L_2$  und  $L_3 \cdot L_4$  kontextfrei.  
 Es ist dann

$$L := L_1 L_2 \cap L_3 L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$$

Diese Sprache ist nicht kontextfrei.



**Satz:**

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

**Beweis Komplementbildung:**

- Angenommen, die Klasse der kontextfreien Sprachen wäre bzgl. Komplementbildung abgeschlossen.
- Dann würde für beliebige kontextfreie Sprachen  $L_1, L_2$  gelten  $(L_1^c \cup L_2^c)^c = L_1 \cap L_2$  ist wieder kontextfrei.
- Dies ist ein Widerspruch zur ersten Aussage des Satzes.