Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 06. Dezember 2011

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Organisatorisches

- Vorlesung am Donnerstag, den 15. Dezember fällt ersatzlos aus!
- Keine Tutorien am Freitag, den 23. Dezember
- Studenten in Freitagstutorien können stattdessen Tutorien am Donnerstag, den 22. Dezember, Montag, den 9. oder Dienstag den 10. Januar besuchen (gleicher Stoff)
- Übersicht aller Tutoriumstermine, siehe

`webinscribe.informatik.kit.edu`

Das Problem SUBSET SUM

Problem SUBSET SUM

Gegeben: Eine endliche Menge M, eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$ und $K \in \mathbb{N}_0$

Frage: Existiert eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) = K$?

Satz:
Problem SUBSET SUM ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

SUBSET SUM $\in \mathcal{NP}$.

- Es kann für eine gegebene Teilmenge $M' \subseteq M$ in Polynomialzeit der Wert $\sum_{a \in M'} w(a)$ ausgerechnet und mit K verglichen werden.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

EXACT COVER $\propto$ SUBSET SUM

- Sei $(X = \{0, 1, \ldots, m-1\}, \mathcal{S})$ EXACT COVER-Instanz.
- Konstruiere SUBSET SUM Instanz (M, w, K)

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= \left|\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}\right| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

- Die Konstruktion benötigt nur Polynomialzeit.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

Veranschaulichung:

- Wir stellen die Mengenzugehörigkeiten als Zahlen zur Basis p dar.
- Kodiere $w(Y)$ für $Y \in \mathcal{S}$ als String aus Nullen und Einsen der Länge m, wobei an i-ter Stelle eine 1 steht genau dann, wenn $i \in Y$;
- entsprechend ist K ein String der Länge m aus Einsen

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

Veranschaulichung:

- Komponentenweise Addition der zu Teilmenge $Y_1, \ldots, Y_n$ von $\mathcal{S}$ gehörigen Strings $w(Y_1), \ldots, w(Y_n)$ ergibt einen String der Länge m, an dessen i-ter Stelle steht in wievielen der $Y_j (j = 1, \ldots, n)$ das Element i vorkommt.
- $\sum_{Y \in \mathcal{S}'} w(Y) = K$ bedeutet also, dass jedes $x \in X$ in genau einem $Y \in \mathcal{S}'$ vorkommt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

Beispiel:

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$\mathcal{S} = \{Y_1 = \{0, 1, 2, 3\}, Y_2 = \{2, 5\}, Y_3 = \{3, 4, 5\}, Y_4 = \{4, 5, 6\}\}$

$\#0 = 1, \#1 = 1, \#2 = 2, \#3 = 2, \#4 = 2, \#5 = 3, \#6 = 1, p = 4$
$w(Y_1) = 0001111_4$, $w(Y_2) = 0100100_4$,
$w(Y_3) = 0111000_4$, $w(Y_4) = 1110000_4$

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

- $(X, \mathcal{S})$ lösbar $\Rightarrow (M, w, K)$ lösbar.

Sei $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ exakte Überdeckung von $(X, \mathcal{S})$. Dann gilt

$$\sum_{Y \in \mathcal{S}'} w(Y) = \sum_{Y \in \mathcal{S}'} \sum_{x \in Y} p^x = \sum_{x=0}^{m-1} p^x = K$$

da jedes $x \in X$ genau einmal überdeckt wird.
$\mathcal{S}'$ erfüllt also die Bedingung für SUBSET SUM.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

- $(X, \mathcal{S})$ lösbar $\Leftarrow (M, w, K)$ lösbar.

Ist $\mathcal{S}' \subseteq M = \mathcal{S}$ eine geeignete Menge für SUBSET SUM, so gilt

$$\sum_{Y \in \mathcal{S}'} w(Y) = K = \sum_{x=0}^{m-1} p^x.$$

Also kommt jedes $x \in X$ in genau einem $Y \in \mathcal{S}'$ vor.
Damit ist $\mathcal{S}'$ eine exakte Überdeckung.

Das Problem PARTITION

Problem PARTITION

Gegeben: Eine endliche Menge M und eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$.

Frage: Existiert eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) = \sum_{a \in M \setminus M'} w(a)$?

Satz:
Problem PARTITION ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

PARTITION $\in \mathcal{NP}$.

- Für eine Menge M' können in Polynomialzeit die Werte $\sum_{a \in M'} w(a)$ und $\sum_{a \in M \setminus M'} w(a)$ ausgerechnet und verglichen werden.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

SUBSET SUM $\propto$ PARTITION.

- Sei (M, w, K) eine SUBSET SUM-Instanz
- Konstruiere PARTITION-Instanz (M^*, w^*)

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \qquad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- Die Konstruktion benötigt nur Polynomialzeit.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \quad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- (M, w, K) Ja-Instanz genau dann, wenn (M^*, w^*) Ja-Instanz:

$$\exists M' \subseteq M^* \text{ mit } \sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a) \Longleftrightarrow \exists M'' \subseteq M \text{ mit } w(M'') = K.$$

- Es können b und c nicht beide in M' bzw. $M^* \setminus M'$ enthalten sein
- o.B.d.A. $b \in M'$

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \quad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- (M, w, K) Ja-Instanz genau dann, wenn (M^*, w^*) Ja-Instanz:

$\exists M' \subseteq M^*$ mit $\sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a) \Longleftrightarrow \exists M'' \subseteq M$ mit $w(M'') = K$.

$\Rightarrow$

- Sei M', so dass $\sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a)$
- Dann gilt $w(M') = N$, da $w(M^*) = 2N$
- Damit erfüllt $M'' := M' \setminus \{b\}$ die Bedingung für SUBSET SUM.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \quad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- (M, w, K) Ja-Instanz genau dann, wenn (M^*, w^*) Ja-Instanz:

$$\exists M' \subseteq M^* \text{ mit } \sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a) \Longleftrightarrow \exists M'' \subseteq M \text{ mit } w(M'') = K.$$

$\Leftarrow$

- Sei M'', so dass $w(M'') = K$
- Dann erfüllt $M' := M'' \cup \{b\}$ die Bedingung für PARTITION.

Das Problem KNAPSACK

Problem KNAPSACK

Gegeben: Eine endliche Menge M,
eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$,
eine Kostenfunktion $c : M \to \mathbb{N}_0$
$W, C \in \mathbb{N}_0$.

Frage: Existiert eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) \leq W$ und $\sum_{a \in M'} c(a) \geq C$?

Satz:
Problem KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von KNAPSACK

KNAPSACK $\in \mathcal{NP}$.

- Für eine Menge M' kann in Polynomialzeit überprüft werden, ob
  - $\sum_{a \in M'} w(a) \leq W$ und
  - $\sum_{a \in M'} c(a) \geq C$

  gilt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von KNAPSACK

PARTITION $\propto$ KNAPSACK.

- Sei (M, w) eine PARTITION-Instanz
- Konstruiere KNAPSACK-Instanz (M, w', c, W, C)

$$\begin{aligned} w' &:= 2w \\ c &:= 2w \\ W = C &:= \sum_{a \in M} w(a) \end{aligned}$$

- Die Konstruktion benötigt nur Polynomialzeit.
- Es ist (M, w) genau dann eine Ja-Instanz, wenn (M, w', c, W, C) eine Ja-Instanz ist (ohne Beweis)

Auswirkung auf die Frage $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$

- Wir haben gesehen, dass es für je zwei $\mathcal{NP}$–vollständige Probleme eine polynomiale Transformation von einem zum anderen Problem gibt.
- Deshalb sind alle $\mathcal{NP}$–vollständigen Probleme im wesentlichen gleich schwer
- Dies hat Auswirkungen auf die Frage, ob $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ist.

Satz:
Sei L $\mathcal{NP}$-vollständig, dann gilt:

- $L \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$
- $L \notin \mathcal{P} \Longrightarrow$ für jede $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprache L' gilt $L' \notin \mathcal{P}$

Auswirkung auf die Frage $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$

Beweis: L $\mathcal{NP}$**-vollständig,** $L \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$

- Sei $L \in \mathcal{P}$ und L $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Dann existiert eine polynomiale deterministische TM M für L.
- Sei $L' \in \mathcal{NP}$
- Es gibt polynomiale Transformation $L' \propto L$
- Hintereinanderausführung von $L' \propto L$ und M liefert deterministische polynomielle TM-Berechnung für L'.
- Damit ist $L' \in \mathcal{P}$.

Auswirkung auf die Frage $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$

Beweis: L **$\mathcal{NP}$-vollständig,** $L \notin \mathcal{P}$
$\Longrightarrow$ **für jede $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprache** L' **gilt** $L' \notin \mathcal{P}$

- Sei $L \notin \mathcal{P}$ und L $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Angenommen für eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache L' gilt: $L' \in \mathcal{P}$
- Dann folgt aus Teil 1 des Satzes $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
- Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $L \notin \mathcal{P}$.

Zusammenfassung

- Die Klasse $\mathcal{P}$ ist die Klasse aller Entscheidungsprobleme/Sprachen die mit einer **deterministischen** Turingmaschine in polynomieller Zeit gelöst werden können
- Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Entscheidungsprobleme/Sprachen die mit einer **nicht-deterministischen** Turingmaschine in polynomieller Zeit gelöst werden können
- Informell ausgedrückt: Π gehört zu $\mathcal{NP}$, falls Π folgende Eigenschaft hat: Ist die Antwort bei Eingabe eines Beispiels *I* von Π Ja, dann kann die Korrektheit eines Beweises (Zeugen) dafür in polynomialer Zeit überprüft werden.

Zusammenfassung

- Eine **polynomiale Transformation** einer Sprache $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ in eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ ist eine Funktion $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ mit den Eigenschaften:
  - es existiert eine polynomiale deterministische Turing-Maschine, die f berechnet;
  - für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

- Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:
  - $L \in \mathcal{NP}$ und
  - für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$ ($\mathcal{NP}$-Schwere).

- **Bedeutung**: Unter der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gibt es kein polynomielles Lösungsverfahren für ein $\mathcal{NP}$-vollständges Problem.

Zusammenfassung

- Mit dem Satz von Cook haben wir direkt gezeigt, dass Problem SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist

- Bei allen anderen Problemen haben wir polynomielle Transformationen (Reduktionen) benutzt um die $\mathcal{NP}$-Schwere nachzuweisen:

$$\text{SAT} \propto \text{3SAT} \propto \text{3COLOR} \propto \text{EXACT COVER} \propto \text{SUBSET SUM} \propto \text{PARTITION} \propto \text{KNAPSACK}$$

Kapitel

- **Komplementsprachen**

Die Klassen NPI, co-P und co-NP

- Die Klasse $\mathcal{NPC}$ ($\mathcal{NP}$-complete) sei die Klasse der $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprachen/Probleme.
- Die Klasse $\mathcal{NPI}$ ($\mathcal{NP}$-intermediate) ist definiert durch $\mathcal{NPI} := \mathcal{NP} \backslash (\mathcal{P} \cup \mathcal{NPC})$.

Klasse der Komplementsprachen

- Die Klasse **co** $- \mathcal{P}$ ist die Klasse aller Sprachen $\Sigma^* \backslash L$ für $L \subseteq \Sigma^*$ und $L \in \mathcal{P}$.
- Die Klasse **co** $- \mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Sprachen $\Sigma^* \backslash L$ für $L \subseteq \Sigma^*$ und $L \in \mathcal{NP}$.

Die Klassen NPI, co-P und co-NP

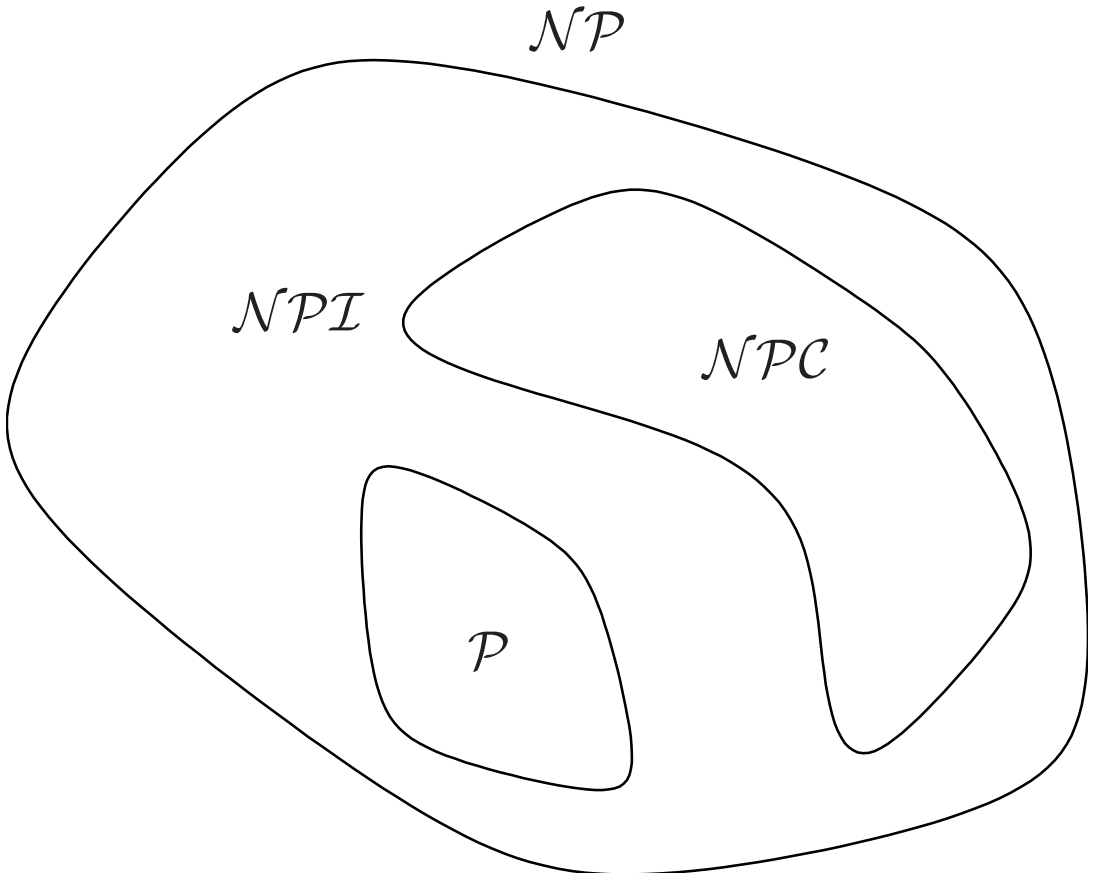
- Die Klasse $\mathcal{NPC}$ ($\mathcal{NP}$-complete) sei die Klasse der $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprachen/Probleme.
- Die Klasse $\mathcal{NPI}$ ($\mathcal{NP}$-intermediate) ist definiert durch $\mathcal{NPI} := \mathcal{NP} \backslash (\mathcal{P} \cup \mathcal{NPC})$.

Klasse der Komplementsprachen

- Die Klasse **co** $-\mathcal{P}$ ist die Klasse aller Sprachen $\Sigma^* \backslash L$ für $L \subseteq \Sigma^*$ und $L \in \mathcal{P}$.
- Die Klasse **co** $-\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Sprachen $\Sigma^* \backslash L$ für $L \subseteq \Sigma^*$ und $L \in \mathcal{NP}$.

Satz (Ladner (1975)):
Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so folgt $\mathcal{NPI} \neq \emptyset$.

Vermutete Situation



Offensichtlich: $\mathcal{P} = \text{co} - \mathcal{P}$.

Frage: Gilt auch $\mathcal{NP} = \text{co} - \mathcal{NP}$?

- Natürlich folgt aus $\mathcal{NP} \neq \text{co} - \mathcal{NP}$, dass $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gilt.
- Aber was folgt aus $\mathcal{NP} = \text{co} - \mathcal{NP}$?
- Vermutlich ist $\mathcal{NP} \neq \text{co} - \mathcal{NP}$
  (Verschärfung der $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$–Vermutung).

Das TSP-Komplement-Problem

Problem co–TSP

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, $c\colon E \to \mathbb{Z}^+$ und ein Parameter K.

Aufgabe: Gibt es *keine* Tour der Länge $\leq K$?

- **Bemerkung:** Für ein vernünftiges Kodierungsschema von TSP ist es leicht nachzuweisen, ob ein gegebener String eine gültige TSP-Instanz repräsentiert.
- co–TSP in co $-\mathcal{NP}$, denn TSP in $\mathcal{NP}$.
- Frage: Ist co–TSP in $\mathcal{NP}$?
- Vermutung: Nein.

Lemma

Satz (Lemma):
Falls L $\mathcal{NP}$-vollständig ist und $L \in \text{co} - \mathcal{NP}$, so ist $\mathcal{NP} = \text{co} - \mathcal{NP}$.

Lemma

Satz (Lemma):
Falls L $\mathcal{NP}$-vollständig ist und $L \in \text{co} - \mathcal{NP}$, so ist $\mathcal{NP} = \text{co} - \mathcal{NP}$.

Beweis:

- Sei $L \in \text{co} - \mathcal{NP}$ und L $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Dann existiert eine polynomiale nichtdet. Berechnung für L^c.
- Für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt: $L' \propto L$
- Also existiert eine det. poly. Transformation $L'^c \propto L^c$.
- Deshalb existiert eine poly. nichtdet. Berechnung für L'^c
- Also $L' \in \text{co} - \mathcal{NP}$.

Bemerkung

- Mit der Vermutung $\mathcal{NP} \neq \text{co} - \mathcal{NP}$ folgt auch $\mathcal{NPC} \cap \text{co} - \mathcal{NP} = \emptyset$.
- Unter dieser Annahme: Wenn ein Problem in $\mathcal{NP}$ und co $- \mathcal{NP}$ ist, aber nicht in $\mathcal{P}$, so ist es in $\mathcal{NPI}$.

Das Problem Subgraphisomorphie

Problem Subgraphisomorphie

Gegeben: Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ mit $|V'| < |V|$

Frage: Gibt es eine Menge $U \subseteq V$ mit $|U| = |V'|$ und eine bijektive Abbildung $\mathrm{Iso}\colon V' \to U$, so dass für alle $x, y \in V'$ gilt: $\{x, y\} \in E' \iff \{\mathrm{Iso}(x), \mathrm{Iso}(y)\} \in E$

Frage anschaulich: Ist H isomorph zu einem Subgraphen von G?

Das Problem Subgraphisomorphie

Problem Subgraphisomorphie

Gegeben: Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ mit $|V'| < |V|$

Frage: Gibt es eine Menge $U \subseteq V$ mit $|U| = |V'|$ und eine bijektive Abbildung $\mathrm{Iso}\colon V' \to U$, so dass für alle $x, y \in V'$ gilt: $\{x, y\} \in E' \iff \{\mathrm{Iso}(x), \mathrm{Iso}(y)\} \in E$

Problem Subgraphisomorphie ist $\mathcal{NP}$-vollständig (ohne Beweis).

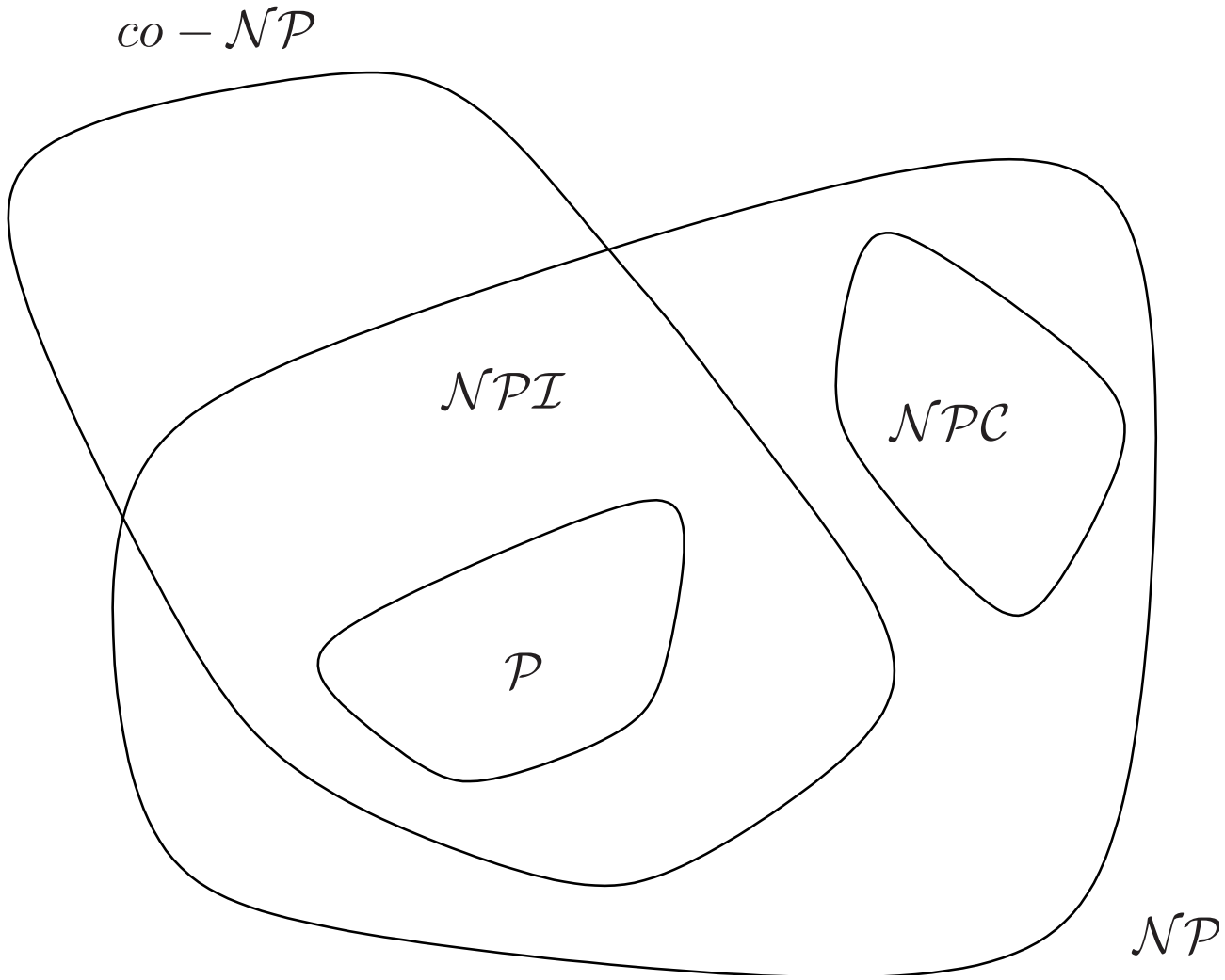
Das Problem Graphisomorphie

Problem Graphisomorphie

Gegeben: Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ mit $|V| = |V'|$.

Frage: Existiert eine bijektive Abbildung $\mathrm{Iso}\colon V' \to V$ mit $\{x, y\} \in E' \iff \{\mathrm{Iso}(x), \mathrm{Iso}(y)\} \in E$?

- Frage anschaulich: Sind G und H isomorph?
- Graphisomorphie ist ein Kandidat für ein Problem aus $\mathcal{NPI}$
- Graphisomorphie liegt in $\mathcal{NP}$ und co $- \mathcal{NP}$.


$co - \mathcal{NP}$
$\mathcal{NPI}$
$\mathcal{NPC}$
$\mathcal{P}$
$\mathcal{NP}$

Kapitel

- **Weitere Komplexitätsklassen über NP hinaus**

Suchprobleme

Ein **Suchproblem** Π wird beschrieben durch

- die Menge der Problembeispiele / Instanzen D_Π und
- für $I \in D_\Pi$ die Menge $S_\Pi(I)$ *aller* Lösungen von I.

Die **Lösung** eines Suchproblems für eine Instanz D_Π ist

- ein beliebiges Element aus $S_\Pi(I)$ falls $S_\Pi(I) \neq \emptyset$
- $\emptyset$ sonst

Beispiel: TSP-Suchproblem

TSP-Suchproblem (Variante 1)

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ vollständig und gewichtet mit Gewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{Q}$.

Aufgabe: Gib eine optimale Tour zu G bezüglich c an.

- Bemerkung: $S_\Pi(G)$ ist die Menge aller optimalen Touren zu G.

TSP-Suchproblem (Variante 2)

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ vollständig und gewichtet mit Gewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{Q}$, Parameter $k \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe: Gib eine Tour zu G bezüglich c mit Maximallänge k an, falls eine existiert.

Beispiel: Hamilton–Kreis Suchproblem

Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$.

Ein Hamilton–Kreis in G ist eine Permutation π auf V, so dass

$$\{\pi(n), \pi(1)\} \in E \text{ und } \{\pi(i), \pi(i+1)\} \in E \text{ für } 1 \leq i \leq n-1 \text{ ist.}$$

Hamilton–Kreis Suchproblem

Gegeben: Ein ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$.

Aufgabe: Gib einen Hamilton–Kreis in G an, falls einer existiert.

- Bemerkung: $S_\Pi(G)$ ist die Menge aller Hamilton-Kreise in G.

Aufzählungsprobleme

Ein **Aufzählungsproblem** Π ist gegeben durch

- die Menge der Problembeispiele D_Π und
- für $I \in D_\Pi$ die Menge $S_\Pi(I)$ aller Lösungen von I.

Die **Lösung** der Instanz I eines Aufzählungsproblem Π besteht in der Angabe der Kardinalität von $S_\Pi(I)$, d.h. von $|S_\Pi(I)|$.

Beispiel: Hamilton–Kreis Aufzählungsproblem

Karlsruher Institut für Technologie

Hamilton–Kreis Aufzählungsproblem

Gegeben: Ein ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$.

Aufgabe: Wieviele Hamilton–Kreise gibt es in G?

Reduzierbarkeit für Suchprobleme

Zu einem Suchproblem Π sei R_Π folgende Relation:

$$R_\Pi := \{(x, s) \mid x \in D_\Pi, s \in S_\Pi(x)\}$$

Eine Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ **realisiert** eine Relation R, wenn für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon & \nexists y \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} \ : \ (x, y) \in R \\ y & \text{sonst, mit beliebigem } y : (x, y) \in R \end{cases}$$

Ein Algorithmus **löst** das durch R_Π beschriebene Suchproblem Π, wenn er eine Funktion berechnet, die R_Π realisiert.

Orakel-Turing-Maschine

Eine **Orakel-Turing-Maschine** zum Orakel $G\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist eine deterministische Turing-Maschine mit

- einem ausgezeichnetem **Orakelband**
- zwei zusätzlichen Zuständen q_f und q_a.

Dabei ist

- q_f der **Fragezustand**
- q_a der **Antwortzustand**

des Orakels.

- Die Arbeitsweise ist in allen Zuständen $q \neq q_f$ wie bei der normalen Turing-Maschine.

Orakel-TM: Verhalten im Fragezustand

Wenn der

- Zustand q_f angenommen wird,
- Kopf sich auf Position i des Orakelbandes befindet
- Inhalt des Orakelbandes auf Position $1, \ldots, i$ das Wort $y = y_1 \ldots y_i$ ist,

dann verhält sich die Orakel-TM wie folgt:

- falls $y \notin \Sigma^*$: Fehlermeldung und die Orakel-TM hält.
- In einem Schritt wird y auf dem Orakelband gelöscht
- $G(y)$ wird auf Positionen $1, \ldots, |G(y)|$ des Orakelbandes geschrieben
- Der Kopf des Orakelbandes springt auf Position 1
- Folgezustand ist q_a.

Bemerkung

- Orakel-TM und Nichtdeterministische TM sind verschiedene Konzepte.

Turing-Reduktion

Turing-Reduktion
Seien R, R' Relationen über Σ^*. Eine **Turing-Reduktion** $\propto_T$ von R auf R' ($R \propto_T R'$), ist eine Orakel-Turing-Maschine $\mathcal{M}$,

- deren Orakel die Relation R' realisiert
- die selbst in polynomialer Zeit die Funktion f berechnet, die R realisiert.

Bemerkung:

- Falls R' in polynomialer Zeit realisierbar ist und $R \propto_T R'$, so ist auch R in polynomialer Zeit realisierbar.
- Falls $R \propto_T R'$ und $R' \propto_T R''$ so auch $R \propto_T R''$.

NP-schwer

Ein Suchproblem Π heißt $\mathcal{NP}$–schwer, falls es eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache L gibt mit $L \propto_T \Pi$.

Bemerkung

- Ein Problem das $\mathcal{NP}$–schwer ist, muss nicht notwendigerweise in $\mathcal{NP}$ sein.

Das TSP-Suchproblem ist NP-schwer

TSP-Suchproblem (Variante 1)

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ vollständig und gewichtet mit Gewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{Q}$.

Aufgabe: Gib eine optimale Tour zu G bezüglich c an.

TSP-Entscheidungsproblem

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ vollständig und gewichtet mit Gewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{Q}$, Parameter $k \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe: Gibt es eine Tour der Länge höchstens k?

Satz:
Das TSP-Suchproblem ist NP-schwer.

Beweisskizze

- Bezeichne TSP_E das Entscheidungsproblem.
- Bezeichne TSP_S das Suchproblem.

Die zu TSP_E bzw, TSP_S gehörenden Relationen R_E und R_S sind gegeben durch

$$\begin{aligned} R_E &:= \{(x, J) \mid x \in J_{TSP_E}\} \\ R_S &:= \{(x, y) \mid x \in D_{TSP_O}, y \in S_{TSP_O}(x)\} \ . \end{aligned}$$

Beweisskizze

$$\begin{aligned} R_E &:= \{(x, J) \mid x \in J_{TSP_E}\} \\ R_S &:= \{(x, y) \mid x \in D_{TSP_O}, y \in S_{TSP_O}(x)\} \ . \end{aligned}$$

Wir zeigen $R_E \propto_T R_S$:

Dazu geben wir eine OTM (Orakel-Turing-Maschine) mit Orakel $\Omega : \Sigma^* \to \Sigma^*$ an. Ω realisiert R_S.

Die OTM arbeitet wie folgt für eine Eingabe w:

- Schreibe die Eingabe auf das Orakelband und gehe in Zustand q_f.
- Weise das Orakel an, in einem Schritt $\Omega(w)$ auf das Orakelband zu schreiben und anschließend in den Zustand q_a zu wechseln.
- Prüfe, ob $\Omega(w)$ eine Tour der Länge $\leq k$ kodiert. Falls ja, lösche das Band und schreibe J, andernfalls lösche das Band.

Die gegebene OTM realisiert R_E und hat polynomial beschränkte Laufzeit.