Periodische Fahrpläne und Kreise in Graphen

Vorlesung Algorithmentechnik

WS 2009/10

Dorothea Wagner

Karlsruher Institut für Technologie

Eisenbahnoptimierungsprozess

- Anforderungserhebung
- Netzwerkentwurf
- Linienplanung
- Fahrplanerstellung
  - ➢ periodische Fahrpläne
- Umlage des Verkehrs
- Wageneinsatzplanung, Personaleinsatzplanung
- Rangierprobleme
- Einsatzkontrolle, Fahrplanauskunft, Fahrpreisgestaltung

Periodische Fahrpläne

Voraussetzungen

- Transportnetzwerk
- Linienplan
- Fahrplanbedingungen

Fahrplan legt die genauen Abfahrts- und Ankunftszeiten der Züge fest.
Ein *periodischer* Fahrplan setzt zeitlich festgelegte Wiederholung der Zugverkehre fest. Periodische Fahrpläne sind besonders relevant für den Nahverkehr.

Periodische Fahrpläne

Datengrundlage: Bahnnetz, Linienplan bestehend aus Linien und Nebenbedingungen in Form von Zeitfenstern

- Fahrzeiten von Abfahrtsbahnhof zu nächstem Ankunftsbahnhof,
- Mindestaufenthaltszeiten an Bahnhöfen
- Umstiegszeiten der Kunden
- gewünschte Frequenz/Periodizität
- Sicherheitsbedingungen: keine Überholung auf derselben Linie, Kollisionsvermeidung bei eingleisigem Verkehr, etc.

Periodische Fahrpläne

typische Optimierungsziele betreffen

- Einhaltung der Bedingungen
- Fahrplanqualität aus Sicht der Kunden
- Robustheit des Fahrplans
- Betriebskosten

mathematische Modellierung mittels "Constraint Graphs" oder als Lineares System

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

Definition 1 *Ein* Ereignis i *in einem periodischen Fahrplan besteht aus einem Tripel* (z, v, a) *bzw.* (z, v, d)*, wobei* z *ein Zug,* v *ein Knoten im Transportnetz und* a *bzw.* d *für Ankunft oder Abfahrt steht.*

Eine periodische Zeitfensterbedingung *gibt ein Zeitfenster an, innerhalb dessen zwei Ereignisse aufeinander folgen sollen.*

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

Beispiele

1. Bedingung für Umstiegszeit:
Zug z_2 soll frühestens 2 Minuten und spätestens 4 Minuten nach Ankunft von Zug z_1 (am Bahnhof A) abfahren.

$$d_{z_2,A} - a_{z_1,A} \in [2, 4]$$

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

2. Bedingung für Fahrzeit:
Ankunft von Zug z_1 (am Bahnhof B) soll frühestens 16 Minuten und spätestens 20 Minuten nach Abfahrt von Zug z_1 (am Bahnhof A) stattfinden.

$$a_{z_1,B} - d_{z_1,A} \in [16, 20]$$

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

3. Bedingung für Aufenthalt an Bahnhof:
Abfahrt von Zug z_1 (am Bahnhof A) soll frühestens 1 Minute und spätestens 3 Minuten nach Ankunft von Zug z_1 (am Bahnhof A) stattfinden.

$$d_{z_1,A} - a_{z_1,A} \in [1,3]$$

Zusätzlich muss Periodizität berücksichtigt werden.

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

Modellierung benutzt

- ➢ e_i, e_j Ereignisvariablen zu i, j, die die Zeitpunkte angeben, zu denen i, j stattfinden,
- ➢ T Periodizität,
- ➢ untere und obere Schranken $l_{i,j}$ und $u_{i,j}$ für Ereignispaare i, j, wobei
  - $0 \leq l_{i,j} < T$ und $0 \leq u_{i,j} - l_{i,j} < T$

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

mathematische Formulierung einer *Zeitfensterbedingung*

$$e_j - e_i + Tp_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$$

bedeutet

- Ereignis j soll zwischen $l_{i,j}$ und $u_{i,j}$ Minuten später stattfinden als Ereignis i.
- Tp_{ij} drückt periodische Wiederholung aus.

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

Beispiel:

- Periodizität sei $T = 60$ (Minuten) und $[l_{i,j}, u_{i,j}] = [8, 10]$.
- Bei $e_j = 5$ und $e_i = 55$ ist Zeitfensterbedingung erfüllt, obwohl $e_j - e_i = -50$.

$\longrightarrow$ Variable p_{ij} und Bedingung $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle Ereignispaare i, j.

1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

PESP (periodic event scheduling problem)

- Gegeben Menge von n Ereignissen und A Menge von m Ereignispaaren mit Zeitfensterbedingungen.
- Finde Lösung (e, p) für
  - ➢ $e_j - e_i + Tp_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$ für alle $(i, j) \in A$,
  - ➢ $e \in \mathbb{Z}^n$ und $e \in [0, T)^n$,
  - ➢ $p \in \mathbb{Z}^m$

PESP ist $\mathcal{NP}$-schwer.

2. Modellierung mit Constraint Graphs

Definition 2 *Der* Constraint Graph $G = (V, A, l, u)$ *zu einer Instanz von PESP ist ein gerichteter Graph* $G = (V, A)$ *bestehend aus*

- *einem Knoten* $i \in V$ *für jedes Ereignis, und*
- *einer gerichteten Kante* $(i, j) \in A$ *für jede Zeitfensterbedingung,*
- *zusammen mit Kantenintervallen* $[l_{i,j}, u_{i,j}]$ *für die Kanten* $(i, j) \in A$*.*

2. PESP Modellierung mit Constraint Graphs

- Gegeben ein Constraint Graph $G = (V, A, l, u)$ und Periode T.

- Finde für $i \in V$ und $(i, j) \in A$ ganze Zahlen e_i und p_{ij} so dass für jede Kante $(i, j) \in A$

$$e_j - e_i + Tp_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$$

erfüllt ist,

- oder gib aus, dass keine solchen Zahlen existieren.

2. Modellierung mit Constraint Graphs

Bemerkungen:

1. PESP ist polynomial lösbar, wenn fester Vektor p gegeben; Problem ist dann verwandt zur Berechnung kürzester Wege in einem Graphen.

2. Lösbarkeit ist hier nicht abhängig von der Ganzzahligkeitsbedingung an e.

3. Kann im allgemeinen Fall durch Ausnutzung der Beziehung zwischen PESP und Kreisbasen gelöst werden.

2. Modellierung mit Constraint Graphs

Zu constraint graph $G = (V, A, l, u)$, Periode T und festem Vektor p mit $p_{ij} = p_{ji}$ für alle $i, j \in V$ definiere Graph $G_p = (V, A_p)$ wie folgt:

- für jede Zeitfensterbedingung $(i, j) \in A$ gibt es zwei gerichteten Kanten (i, j) und (j, i) in A_p,

2. Modellierung mit Constraint Graphs

für jede Kante $(i, j) \in A_p$ definiere *Kantenlänge* $\mathrm{dist}_{ij}(p_{ij})$ abhängig von p als

- $$\mathrm{dist}_{ij}(p_{ij}) = u_{ij} - Tp_{ij}$$
  Länge von $(i, j) \in A_p$ zu $(i, j) \in A$,

- $$\mathrm{dist}_{ji}(p_{ij}) = -l_{ij} + Tp_{ij}$$
  Länge von $(j, i) \in A_p$ zu $(i, j) \in A$.

2. Modellierung mit Constraint Graphs

Satz 3 *Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit Kantenlängen $\mathrm{dist}_{ij}(p_{ij})$ für alle Kanten $(i, j) \in A$ und ein ausgezeichneter Knoten $s \in V$. Zu Knoten $i \in N$ gibt π_i genau dann die Länge eines kürzesten Weges von s nach i bezüglich $\mathrm{dist}_{ij}(p_{ij})$ an, wenn für alle $(i, j) \in A$ gilt*

$$\pi_j \leq \pi_i + \mathrm{dist}_{ij}(p_{ij}).$$

Beweis Teilwege eines kürzesten Weges sind kürzeste Wege.

2. Modellierung mit Constraint Graphs

Satz 4 *PESP mit $G = (V, A, l, u)$, Periode T und festem Vektor p ist äquivalent zur Berechnung kürzester Wege im zugehörigen Graphen $G_p = (V, A_p)$ mit Kantenlängen $\mathrm{dist}_{ij}(p_{ij})$.*

Beweis Bedingungen

$$\pi_j \leq \pi_i + \mathrm{dist}_{ij}(p_{ij})$$

auf A_p sind äquivalent zu Bedingungen

$$\pi_j \leq \pi_i + \mathrm{dist}_{ij}(p_{ij}) \wedge \pi_i \leq \pi_j + \mathrm{dist}_{ji}(p_{ji})$$

auf A.

2. Modellierung mit Constraint Graphs

Substitution von $\mathrm{dist}_{ij}(p_{ij})$ und $p_{ij} = p_{ji}$ ergibt für alle $(i,j) \in A$

$$\pi_j \leq \pi_i + u_{ij} - Tp_{ij}$$

und

$$\pi_i \leq \pi_j - l_{ij} - Tp_{ij}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\pi_j - \pi_i + Tp_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$$

für alle $(i,j) \in A$.

3. Constraint Graph und Kreise

Den Knoten eines Graphen mit Kantenlängen können genau dann zulässige Distanzmarkierungen (π_i) zugeordnet werden, wenn der Graph keine negativen Kreise enthält.

Folgerung 5 *Eine Instanz von PESP mit* $G = (V, A, l, u)$ *und Periode* T *ist genau dann lösbar wenn es einen ganzzahligen Vektor* p *gibt, sodass* G_p *keine negativen Kreise enthält bezüglich der Kantenlänge* $\mathrm{dist}_{ij}(p_{ij})$.

3. Constraint Graph und Kreise

Betrachte PESP beschrieben durch $G = (V, A, l, u)$ und Periode T.

- PESP ist in $\mathcal{O}(n)$ lösbar, wenn G ein Baum ist.
- Sogar Optimierung einer linearen Zielfunktion in $\mathcal{O}(n)$ lösbar, wenn G ein Baum ist.

Wende einfach Tiefensuche auf G an.

Schwierigkeit von PESP liegt in den Kreisen von G.

4. Constraint Graph und Kreise

Zu Instanz $G = (V, A, l, u)$ mit Periode T sei C ein ungerichteter Kreis. Zu einer beliebigen Richtung in C bezeichne

- C^+ Menge der *Vorwärtskanten* und
- C^- Menge der *Rückwärtskanten*

4. Constraint Graph und Kreise

Satz 6 *Instanz $G = (V, A, l, u)$ mit Periode T von PESP ist genau dann lösbar, wenn es einen ganzzahligen Vektor p gibt, so dass für jeden Kreis C in G gilt*

$$a_C \leq \sum_{(i,j)\in C^+} p_{ij} - \sum_{(i,j)\in C^-} p_{ij} \leq b_C.$$

4. Constraint Graph und Kreise

Dabei sind a_C *und* b_C *definiert als*

$$a_C = \lceil \frac{1}{T} (\sum_{(i,j) \in C^+} l_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} u_{ij}) \rceil$$

$$b_C = \lfloor \frac{1}{T} (\sum_{(i,j) \in C^+} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} l_{ij}) \rfloor$$

4. Formulierung durch Kreissperiodizität

Betrachte Instanz $G = (V, A, l, u)$ mit Periode T von PESP. Dann kann p wie folgt ersetzt werden. Setze zu C Kreis in G

$$q_C = \sum_{(i,j)\in C^+} p_{ij} - \sum_{(i,j)\in C^-} p_{ij}.$$

4. Formulierung durch Kreissperiodizität

Betrachte Instanz $G = (V, A, l, u)$ mit Periode T von PESP. Setze für alle $(i, j) \in A$

$$x_{ij} = e_j - e_i + Tp_{ij}.$$

Dann kann eine Lösung (e, p) mit der zugehörigen Funktion x auf A identifiziert werden.

4. Formulierung durch Kreissperiodizität

Definition 7 *Für einen Kreis C in $G = (V, A, l, u)$ mit Periode T erfüllt eine Menge von Kantenwerten $x_a, a \in C$ die* Kreisperiodizitätsbedingung *falls es einen ganzzahligen Wert q_C gibt, für den gilt*

$$\sum_{(i,j)\in C^+} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in C^-} x_{ij} = Tq_C.$$

4. Formulierung durch Kreisperiodizität

Satz 8 *Gegeben Instanz* $G = (V, A, l, u)$ *mit Periode* T *von PESP. Eine Funktion* $x : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *korresponiert zu einer Lösung von PESP genau dann, wenn für jeden Kreis* $C \in G$ *die Kreisperiodizitätsbedingung erfüllt ist.*

Beweis Konstruiere zugehörige Lösung.

4. Formulierung durch Kreissperiodizität

PESP für Instanz $G = (V, A, l, u)$ mit Periode T und Optimierungsfunktion F lässt sich dann formulieren als

CPF (Cycle Periodicity Formulation)

$$minF(x)$$

wobei für alle $C \in G$

$$\sum_{(i,j) \in C^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} x_{ij} = Tq_C$$

und

4. Formulierung durch Kreissperiodizität

- $l_a \leq x_a \leq u_a$ für alle $a \in A$,
- $a_C \leq q_C \leq b_C$ für alle $C \in G$,
- $x_a \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in A$,
- $q_C \in \mathbb{Z}$ für alle $C \in G$.

4. Formulierung durch Kreissperiodizität

Gegeben Lösung (x, q) von CPF. Daraus kann wie folgt Lösung (e, p) für PESP konstruiert werden.

1. Konstruiere aufspannenden Baum H in G.

2. Wähle beliebigen Knoten $s \in V$ und setze $e_s = 0$.

3. Für jedes $i \in V$ betrachte Weg $P_{si} \in H$ und setze

$$e_i = \sum_{(i,j) \in P_{si}^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in P_{si}^-} x_{ij}.$$

4. Für $i, i \in V$ setze $p_{ij} = (x_{ij} - e_j + e_i)\frac{1}{T}$.

5. CFP und Kreisbasen

In einem gerichteten Graph $G = (V, A)$ lässt sich jeder ungerichtete Kreis C durch einen Vektor γ_C ausdrücken, der nur Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$ hat. Setze

$$\gamma_{C_a} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in C^+, \\ -1 & \text{falls } a \in C^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5. PESP und Kreisbasen

Definition 9 *Der* Kreisraum *eines gerichteten Graphen $G = (V, A)$ ist der lineare Vektorraum, der durch die $\{-1, 0, 1\}$-Kreisvektoren γ_C der Kreise $C \in G$ aufgespannt wird.*

Eine Basis B des Kreisraums von G heißt Kreisbasis *von G.*

5. PESP und Kreisbasen

Konstruktion einer Kreisbasis

Berechne einen (nicht notwendig gerichteten) aufspannenden Baum H in G. Füge iterativ Nichtbaumkanten $a \in A$ zu H hinzu.

Dann sind folgende Eigenschaften leicht zu sehen.

5. PESP und Kreisbasen

- Jede Nichtbaumkante a zusammen mit dem eindeutigen Weg in H zwischen ihren Endknoten bildet einen Kreis.
- Die Menge aller durch Nichtbaumkanten induzierten Kreise bildet eine Kreisbasis von G.
- Die Dimension c des Kreisraums von G ist $|A| - |V| + 1$.

5. PESP und Kreisbasen

Was ist eine gute Kreisbasis für die Lösung einer Instanz von CPF?

Angenommen wir wollen Instanz von CPF durch Aufzählung aller möglichen Vektoren q lösen. Wie hoch ist der Aufwand?

Aufwand hängt von Anzahl möglicher Werte, die q annehmen kann, ab. Dies hängt von der "Weite" der zugrundeliegenden Kreisbasis ab.

Betrachte Kreisbasen mit kleiner Weite.

5. PESP und Kreisbasen

Sei $W_C = b_C - a_C$ die *Weite* des Kreises C.

- Eine Variable q_C zu CPF kann dann $W_C + 1$ verschiedene Werte annehmen.
- Für eine Kreisbasis B (der Dimension c) kann der Vektor $q = (q_1, \ldots, q_c)$ dann

$$W(B) = \prod_{C \in B} (W_C + 1)$$

verschiedene Werte annehmen.

6. PESP als lineares System

- Gegeben Instanz von PESP mit $G = (V, A, l, u)$ und Periode T.

- M ist die $n \times m$-*Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix* zu G, d.h. für $k \in V$ und $(i, j) \in A$ sei

$$M_{k,(i,j)} := \begin{cases} -1 & \text{falls } i = k, \\ 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

6. PESP als lineares System

Äquivalente Formulierung von PESP ist dann:

- Finde Vektoren $e \in \mathbb{Z}^n$ und $p \in \mathbb{Z}^m$ mit

$$l \leq M^T e + Tp \leq u.$$

Satz 10 *Instanz $G = (V, A, l, u)$ mit Periode T von PESP ist genau dann lösbar wenn es eine* ganzzahlige *Lösung gibt.*

Beweis folgt aus Theorie der Linearen Programmierung.