Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 4

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 09/10

Ausgabe 3. Dezember 2009
Abgabe 17. Dezember, 15:30 Uhr in der Übung (oder im Kasten vor Zimmer 319, Geb. 50.34)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre E-Mailadresse aber keine Matrikelnummer auf Ihr Übungsblatt. Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Flüsse [vgl. Kapitel 4.1 im Skript] **

Gegeben sei ein Netzwerk $D = (V, E)$, in dem es zu einigen Kanten $(u, v) \in E$ auch Kanten $(v, u) \in E$ gibt. Weiterhin sei ein maximaler Fluss $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Zeigen Sie, dass man dieses Flussproblem auf ein Flussproblem auf dem Netzwerk $D' = (V, E')$ überführen kann, wobei gilt: E' ist maximale Teilmenge von E mit $(u, v) \in E' \Rightarrow (v, u) \notin E'$, so dass der Wert des Maximalflusses nicht verändert wird.

Problem 2: Flüsse mit Knotenkapazitäten [vgl. Kapitel 4.1 im Skript] **

Das maximale Flussproblem aus der Vorlesung kann folgendermaßen erweitert werden: Neben den Kantenkapazitäten c seien noch Knotenkapazitäten $\gamma : V \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben. In einem solchen Netzwerk (D, s, t, c, γ) heißt eine Abbildung f *Fluss*, wenn sie neben den bekannten Eigenschaften (Flusserhaltungsbedingung und (Kanten)-Kapazitätsbedingung) auch die folgende erfüllt: Für alle $v \in V$ ist die *Knotenkapazitätsbedingung*

$$\sum_{(v,w)\in E} f(v, w) \leq \gamma(v) \qquad \text{wenn } v \in V \setminus \{t\}$$

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) \leq \gamma(v) \qquad \text{wenn } v = t$$

erfüllt.

Zeigen Sie, dass die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk mit Kanten- **und** Knotenkapazitäten auf ein maximales Flussproblem in einem normalen (d. h. ohne Knotenkapazitäten) Netzwerk mit vergleichbarer Größe zurückgeführt werden kann.

Problem 3: Strömungen und Goldberg & Tarjan Algorithmus [vgl. Kapitel 4.1–4.2 im Skript] */***

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Zusätzlich zu den bereits bekannten Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ definieren wir *untere* Schranken $l : E \to \mathbb{R}_0^+$, wobei für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt, dass $0 \leq l(u, v) \leq c(u, v)$.

Eine Funktion $\beta : E \to \mathbb{R}_0^+$ heißt *Strömung*, wenn die Flusserhaltungsbedingung für *alle* Knoten $v \in V$ erfüllt ist, das heißt

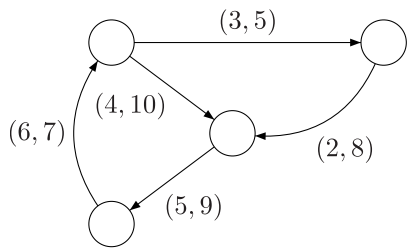
$$\sum_{(u,v)\in E} \beta(u, v) - \sum_{(v,w)\in E} \beta(v, w) = 0 \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Die Strömung β heißt *zulässig*, falls für alle $(u,v) \in E$ gilt, dass $l(u,v) \leq \beta(u,v) \leq c(u,v)$.

Wir wollen in dieser Aufgabe die Frage beantworten, ob es eine bezüglich l und c zulässige Strömung β in G gibt, indem wir das Problem auf ein reguläres Flussproblem zurückführen. Dazu konstruieren wir einen Graphen $G' = (V' \supset V, E' \supset E)$. Wir führen eine Super-Quelle und -Senke s und t in V' ein. Für jeden Knoten $v \in V$ führen wir Kanten (s,v) und (v,t) in E' ein. Die Kapazitäten $c' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ des Flussnetzwerkes in G' sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
c'(u,v) &:= c(u,v) - l(u,v) && \text{für alle } (u,v) \in E \\
c'(s,v) &:= \sum_{(u,v)\in E} l(u,v) && \text{für alle } v \in V \qquad \text{(Mindestzufluss)} \\
c'(v,t) &:= \sum_{(v,w)\in E} l(v,w) && \text{für alle } v \in V \qquad \text{(Mindestabfluss)}
\end{aligned}
$$

(a) Konstruieren Sie zu folgendem Graphen G den Graphen G' gemäß den obigen Regeln. Dabei sei für jede Kante (u,v) der erste Wert $l(u,v)$, der zweite Wert $c(u,v)$.



(b) Zeigen Sie: Ist $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine beliebige Funktion, dann gilt für $f' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$f'(u,v) := f(u,v) - l(u,v) \qquad \text{für alle } (u,v) \in E \tag{1}$$
$$f'(u,v) := c'(u,v) \qquad \text{für alle } (u,v) \in E' \setminus E \tag{2}$$

für jeden Knoten $v \in V$, dass

$$\sum_{(v,w)\in E'} f'(v,w) = \sum_{(v,w)\in E} f(v,w) \qquad \text{und} \qquad \sum_{(u,v)\in E'} f'(u,v) = \sum_{(u,v)\in E} f(u,v).$$

(c) Zeigen Sie: In G existiert genau dann eine bezüglich l und c zulässige Strömung β, wenn in G' der maximale s-t-Fluss f den Wert $w(f) = \sum_{(u,v)\in E} l(u,v)$ besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie die Definition von f' aus Aufgabe (b) in Ihrem Beweis um zu einer gegebenen Strömung β in G einen Fluss f' in G' zu konstruieren, und umgekehrt.

(d) Bestimmen Sie eine zulässige Strömung in dem Graphen aus Aufgabe (a). Berechnen Sie dazu einen maximalen Fluss in dem Graphen G', den Sie aus Aufgabe (a) erhalten haben. Benutzen Sie hierzu den Algorithmus von Goldberg & Tarjan. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte an. Zeichnen Sie das aktuelle Netzwerk vor jeder (bis auf die erste) Relabel-Operation und nachdem der Algorithmus terminiert. Halten Sie sich an die Notation aus dem Skript.