Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 5

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 08/09

Ausgabe 16. Dezember 2008
Abgabe 13. Januar 2009, 15:30 Uhr (im Kasten vor Zimmer 319, Informatik-Hauptgebäude, 3. OG)

Bitte schreiben Sie nur Ihren Namen und keine Matrikelnummer auf Ihr Übungsblatt. Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Algorithmus von De Pina

Abbildung 1 zeigt den sogenannten *Peterson-Graph*. Ein aufspannender Baum des Graphen ist grau und fett hinterlegt. Alle Kantengewichte seien 3.

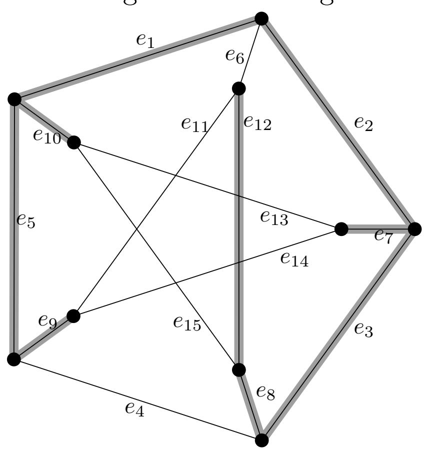


Abbildung 1: Der *Peterson-Graph*.

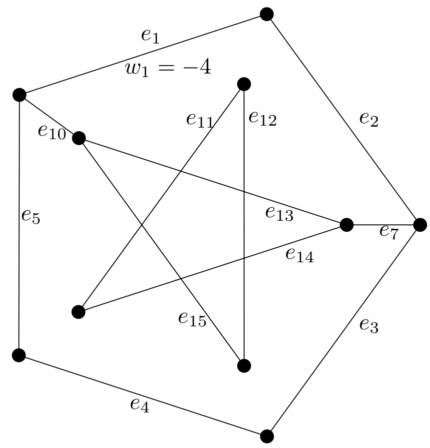


Abbildung 2: Variante von *Pete*.

(a) Führen Sie den Algorithmus von de Pina (algebraisch, Algorithmus 41 im Skript) auf dem Graphen in Abbildung 1 aus. Nutzen Sie den eingezeichneten Baum und halten sie sich an die Reihenfolge der Kanten entsprechend ihrer Nummerierung. Notieren Sie für jeden Schleifendurchlauf der Zeilen 3 bis 7 des Algorithmus k, C_k, S_k sowie alle S_i, die geändert werden, und die resultierende Basis.

Lösung. Wir haben $N = m - n + K(G) = 15 - 10 + 1 = 6$.

- Initialisierung: $S_1 = \{e_4\}$, $S_2 = \{e_6\}$, $S_3 = \{e_{11}\}$, $S_4 = \{e_{13}\}$, $S_5 = \{e_{14}\}$, $S_6 = \{e_{15}\}$

- $k = 1$:
  Ein kürzester Kreis C_1 mit $< C_1, S_1 >= 1$ ist: $C_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ mit $w(C_1) = 15$
  für i = 2 bis 6, es gibt kein S_i mit $< C_1, S_i >= 1$

- $k = 2$:
  Ein kürzester Kreis C_2 mit $< C_2, S_2 >= 1$ ist: $C_2 = \{e_6, e_2, e_3, e_8, e_{12}\}$ mit $w(C_2) = 15$
  für i = 3 bis 6, es gibt kein S_i mit $< C_2, S_i >= 1$

- $k = 3$:
  Ein kürzester Kreis C_3 mit $< C_3, S_3 >= 1$ ist: $C_3 = \{e_{11}, e_6, e_1, e_5, e_9\}$ mit $w(C_3) = 15$
  für i = 4 bis 6, es gibt kein S_i mit $< C_3, S_i >= 1$

- $k = 4$:
  Ein kürzester Kreis C_4 mit $< C_4, S_4 >= 1$ ist: $C_4 = \{e_{13}, e_{14}, e_9, e_5, e_{10}\}$ mit $w(C_4) = 15$
  $< C_4, S_5 >= 1$ (e_{14} von S_5 kommt in C_4 vor)
  $S_5 = S_5 \oplus S_4 = \{e_{13}, e_{14}\}$

- $k = 5$:
  Ein kürzester Kreis C_5 mit $< C_5, S_5 >= 1$ ist: $C_5 = \{e_{14}, e_9, e_4, e_3, e_7\}$ mit $w(C_5) = 15$
  $< C_5, S_6 >= 0$

- $k = 2$:
  Ein küzester Kreis C_6 mit $< C_6, S_6 >= 1$ ist: $C_6 = \{e_{15}, e_{10}, e_5, e_4, e_8\}$ mit $w(C_6) = 15$

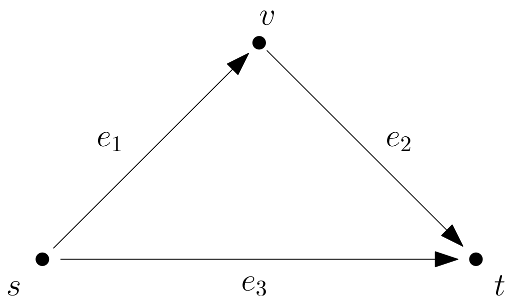
  Die MCB von Peterson-Graph ist $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ mit w(MCB)= 90

□

(b) In Abbildung 2 ist $\text{Pete}_{6,8,9}$ zu sehen. Beachten Sie das negative Kantengewicht -4 von e_1. Alle anderen Gewichte seien hier 1. Raten Sie eine minimale Kreisbasis von $\text{Pete}_{6,8,9}$ und geben sie diese zusammen mit ihrem Gewicht an.

Lösung. Die minimale Kreisbasis ist: MCB= $\{C_1, C_2, C_3\}$, wobei:
$C_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$C_2 = \{e_1, e_2, e_7, e_{13}, e_{10}\}$
$C_3 = \{e_1, e_2, e_7, e_{14}, e_{11}, e_{12}, e_{15}, e_{10}\}$
w(MCB)= 3 □

Problem 2: Flussnetzwerke und Lineare Programmierung



Für das obige Netzwerk seien die Kantenkapazitäten $c(e_1) := 1$, $c(e_2) := 2$ und $c(e_3) := 3$ gegeben.

(a) Stellen Sie das Maximalflussproblem für dieses Netzwerk als lineares Programm dar und bringen Sie es anschließend in die in der Vorlesung definierte Standardform.

Lösung. Kantenkapzitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} e_1 &\leq 1 \\ e_2 &\leq 2 \\ e_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten v:

$$e_1 - e_2 = 0$$

Nichtnegativitä der Kantenflsse:

$$\begin{aligned} e_1 &\geq 0 \\ e_2 &\geq 0 \\ e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Bestimmung des maximalen Flusses entspricht in der Standardform aus der Vorlesung dem Minimierungsproblem $\min(-e_1 - e_3)$ mit folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rlr} e_1 - e_2 &\geq 0 & e_1 \geq 0 \\ -e_1 + e_2 &\geq 0 & e_2 \geq 0 \\ - \quad e_1 &\geq -1 & e_3 \geq 0 \\ - \quad e_2 &\geq -2 & \\ - \quad e_3 &\geq -3 & \end{array}$$

Das primale Programm ist:

$$\begin{aligned} P: \qquad & \min c^T x \quad \text{unter} \\ & Ax \geq b \quad \text{und} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

wobei gilt:

$$x \in \mathbb{R}^3, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$$

□

(b) Stellen sie das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder sowie die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene graphisch dar. Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

Lösung. Ja, das Lösungspolyeder ist durch den Hyperquader beschränkt, der durch die Kapazitäts- und Positivitätsbedingungen bestimmt wird. Abbildung 3 zeigt das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder $\mathcal{P}$ und die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene, die von O, A und B aufgespannt wird, wobei $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 0)$ und $B = (0, 0, 3)$. □

(c) Führen Sie die Simplexmethode auf dem Polyeder durch: Starten Sie dazu im Nullpunkt. Welches sind die *verbessernden Kanten* von dort aus? Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese im Ausgangsgraphen? Welches ist der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?

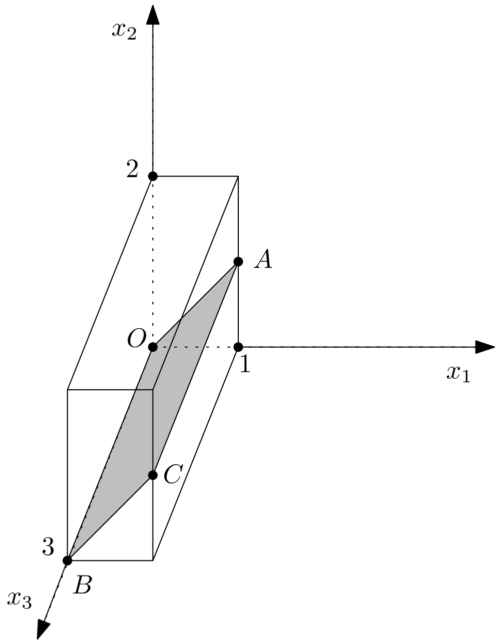


Abbildung 3: Graphische Darstellung des Lösungsraums für das primale Problem.

Lösung. Das Simplexverfahren führt von O nach A (erhöhender Weg über e_1 und e_2) und von O nach B (erhöhender Weg ber e_3). Danach wird der Punkt $C = (1,1,3)$ erreicht, der dem Fluss $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$ entspricht. Dieser Punkt wird als optimale Lösung ausgegeben, da keine weitere Ecke des Lösungsraums erreicht werden kann, die einer Verbesserung der Zielfunktion entspricht. □

Betrachten wir nun ein allgemeines Flussproblem.

$$\max \sum_{(s,i)\in E} x_{s,i} - \sum_{(i,s)\in E} x_{i,s}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{array}{l} x_{i,j} \le c_{i,j} \\ x_{i,j} \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{i,j} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{j,i} = 0 \qquad \forall j \in V \setminus \{s,t\}$$

In Matrixform laute dies

$$\max\ a^T x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{I} & x & \le c \\ -\mathbb{I} & x & \le 0 \\ B & x & = 0\ . \end{array}$$

Dabei sei $\mathbb{I}$ eine Einheitsmatrix und B die Matrix, die sich aus den Flusserhaltungsbedingungen ergibt.

(e) Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?

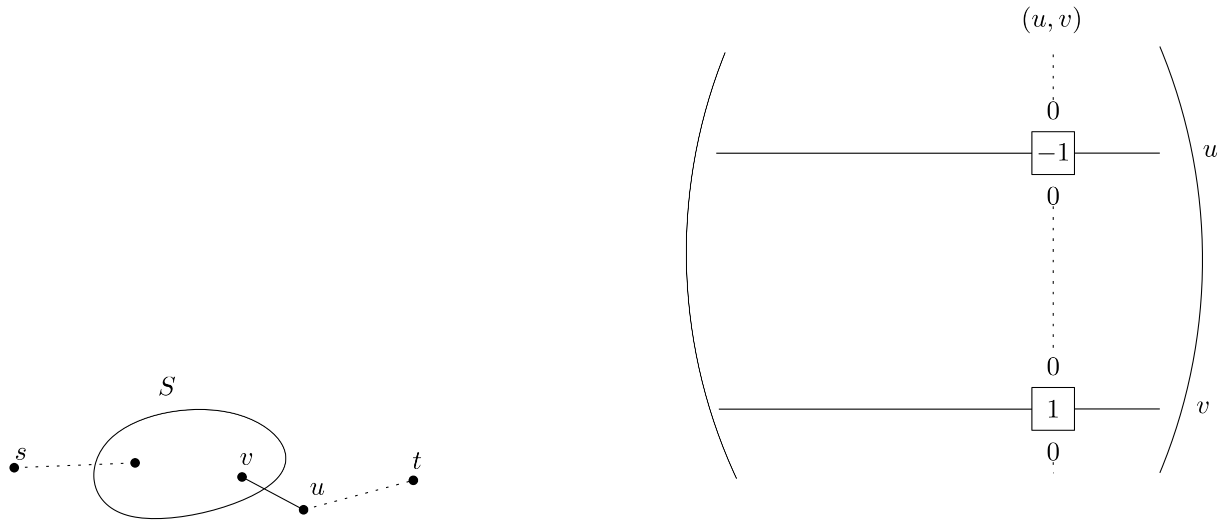
Lösung. Sei $m = |E|$ und $n = |V|$. Dann gilt:

- $a \in \mathbb{R}^m$: Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten $e \in E$ mit den jeweiligen Flusswerten $f(e)$.
- $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$: Für jeden der $n-2$ Knoten aus $V \setminus \{s,t\}$ wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung (bzw. zwei Ungleichungen) über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt. Insgesamt kommen alle Kanten genau zweimal vor.

□

(f) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

Lösung. Sei $\sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen. Die α_i, die nicht 0 sind, entsprechen einer Menge von Knoten $S \subset V \setminus \{s,t\}$. In jeder Spalte von B gibt es genau zwei Einträge ungleich 0, da jede Kante genau zwei Endknoten hat. Zu jeder Kante e, die zu einem der Knoten $v \in S$ adjazent ist, kommt ein Eintrag ungleich 0 in der v entsprechenden Zeile vor. Wenn G zusammenhängend ist, gibt es mindestens eine Kante (u,v) mit entweder $u \in S$ und $v \notin S$ oder $v \in S$ und $u \notin S$. Sei ohne Einschränkung $u \notin S$ (siehe Abbildung 4(a)). Dann ist $\alpha_u = 0$ und gleichzeitig $\alpha_v \neq 0$, da $v \in S$. Anderseits gilt für alle $w \neq u, v$: $(\alpha_w z_w)_{(u,v)} = 0$, da die Kante (u,v) nur zwischen u und v definiert ist. In Worten bedeutet dies, dass es keine andere Zeile von B gibt, in der die Koordinate, die zur Kante (u,v) korrespondiert ungleich 0 ist, da (u,v) nur zu u und zu v inzident ist (siehe Abbildung 4(b)). Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, also gibt es kein $\alpha_i \neq 0$. Also sind die Zeilen linear unabhängig, wenn G zusammenhängend ist.



(a) Veranschaulichung für $v \in S$ und $u \notin S$.

(b) Struktur der Matrix B.

Abbildung 4: Illustrationen für Teilaufgabe (f).

□

(g) Welche Dimension hat das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder im Allgemeinen?

Lösung. Jede Zeile von B entspricht einer Hyperebene der Dimension $m-1$ im $\mathbb{R}^m$. Wenn alle c_i positiv sind, hat diese Hyperebene einen nichtleeren Schnitt mit dem durch die Kapazitätsbedingungen gegebenen Hyperquader und den anderen Hyperebenen, denn mindestens der Ursprung liegt in diesem Schnitt. Da es $n-2$ linear unabhängige Hyperebenen gibt, ist die Dimension des Lösungspolyeder im Allgemeinen $m-(n-2)$. $\square$

(h) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren. (Hinweis: Ein Extrempunkt eines Polygons P kann nicht als Konvexkombination $\lambda \cdot s + (1-\lambda) \cdot t$ zweier verschiedener Punkte von P dargestellt werden. Ein Punkt auf einer Kante von P kann nur als konvexe Kombination zweier verschiedener Punkte der selben Kante dargestellt werden.)

Lösung. Betrachte den Graphen in Abbildung 5. Die Erhöhung entlang der gestrichelten Wege führt zum Fluss $(2,2,2,2,2,2,2,2,2)$ aber dies ist eine konvexe Kombination zweier Flüsse, nämlich $(2,2,2,2,2,2,2,2,2) = 1/2 \cdot (2,2,2,4,4,4,2,2,2) + 1/2 \cdot (2,2,2,0,0,0,2,2,2)$. Also ist $(2,2,2,2,2,2,2,2,2)$ kein Extrempunkt des Lösungspolyeders, also entsprach die letzte Erhöhung keinem Schritt entlang einer Kante des Polyeders wie im Simplexverfahren. $\square$

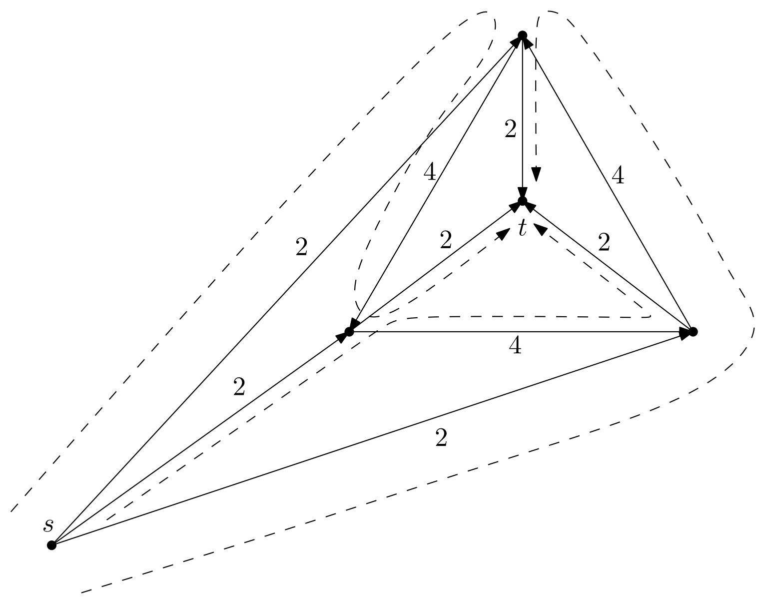


Abbildung 5: Gegenbeispiel für Teilaufgabe (h).

(i) Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

Lösung. Wir betrachten das Beispiel eines einfachen Pfades mit zwei Kanten wie in Abbildung 6.

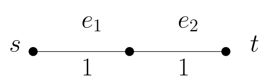


Abbildung 6: Einfacher Pfad mit zwei Kanten und gegebenen Kapazitäten von 1.

Die zugehörigen Ungleichen in Standard- und Slackform sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\max e_1 \\ e_1 &\leq 1 \\ e_2 &\leq 1 \\ e_1 - e_2 &\leq 0 \\ e_2 - e_1 &\leq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max e_1 \\ z_1 &= 1 - e_1 \\ z_2 &= 1 - e_2 \\ z_3 &= e_1 - e_2 \\ z_4 &= e_2 - e_1 \end{aligned}$$

Das zugehörige Simplex-Tableau ist

$$
\begin{array}{c|rr|c}
 & e_1 & e_2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
z_1 & -1 & 0 & 1 \\
z_2 & 0 & -1 & 1 \\
z_3 & 1 & -1 & 0 \\
z_4 & -1 & 1 & 0
\end{array}
\tag{1}
$$

Die Variable e_1 ist die einzige zulässige Pivot-Wahl. Nach Durchführung des zugehörigen Schrittes im Simplex-Verfahren erhält man folgendes Tableau:

$$
\begin{array}{c|rr|c}
 & z_4 & e_2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
z_1 & 1 & -1 & 1 \\
z_2 & 0 & -1 & 1 \\
z_3 & 1 & -1 & 0 \\
e_1 & -1 & 1 & 0
\end{array}
\tag{2}
$$

Sowohl Basislösung als auch Zielwert haben sich nicht verändert. Dieser Simplex-Schritt kann somit nicht mit erhöhenden Wegen dargestellt werden. Allerdings kann man sich klarmachen, dass dieser Schritt einem Suchschritt nach einem erhöhenden Weg entspricht. Im Allgemeinen lassen sich alle Simplex-Schritte entweder als Suchschrittte nach einem erhöhenden Weg oder als erhöhende Schritte interpretieren.

$\square$

Problem 3: Euklidischer Handlungsreisender

Das *Problem des euklidischen Handlungsreisenden* ist folgendermaßen definiert: Gegeben seien n Punkte $p_i \in P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene mit Koordinaten (x_i, y_i) für jeden Punkt $p_i \in P$. Gesucht ist die kürzeste Rundtour, die alle Knoten mindestens einmal besucht. Rundtour bedeutet, dass die Tour an dem gleichen (frei wählbaren) Knoten beginnen und enden muss. Der Abstand zweier Punkte ist definiert durch den euklidischen Abstand der beiden Punkte.

Modellieren Sie das Problem als (gegebenenfalls) ganzahliges lineares Programm. Erklären Sie hierbei Zielfunktion, alle Variablen und alle Nebenbedingungen.

Lösung. Sei $d_{ij} = \|p_j - p_j\| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ vorberechnet. Da für dieses Abstandsmaß die Dreiecksungleichung gilt, ist klar, dass die kürzeste Rundreise jede Stadt nur einmal besucht (es gibt also keine Hubs). Seien x_{ij} binäre Variablen, die angeben, ob die Strecke von p_i nach p_j Teil der Rundreise ist.

- Zielfunktion, minimiere Länge der Rundtour

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

- jeder Punkt hat genau einen Nachfolger

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

- jeder Punkt hat genau einen Vorgänger

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \; \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

- keine reflexiven Kanten, denn diese sind wegen $d_{ii} = 0$ kostenlos

$$x_{ii} = 0 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

- binäre Variable

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

- keine Subzyklen

$$\forall S \subsetneq \{1, \ldots, n\}, S \notin \varnothing : \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1$$

Dieses ILP modelliert das Problem zwar korrekt, hat aber wegen der Subzyklenbedingung exponentiell viele Nebenbedingungen. Wir führen deshalb weitere Variablen $u_1, \ldots, u_{n-1} \in \{1, \ldots, n-1\}$ ein, die die Punkte p_i in der Reihenfolge ihres Besuchs durchnummerieren. Damit können wir die Subzyklenbedingungen in obigem ILP ersetzen durch folgende (in quadratischer Anzahl):

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1$$

□

Problem 4: Dualität

Marco Stanley Fogg[1] ist ein Student, dem nach dem Tod seines Onkels lediglich dessen antiquarische Buchsammlung als finanzielle Rücklage bleibt. Um sein Studium möglichst lange durch den Verkauf der Bücher finanzieren zu können, versucht er, seine Ernährung auf ein Minimum zu beschränken. Nachdem er für eine Menge von m wichtigen Nährstoffen $1, \ldots, m$ jeweils den minimalen täglichen Bedarf b_i $(i = 1, \ldots, m)$ für einen Mann seines Alters und Gewichts in Erfahrung gebracht hat, sucht er den lokalen Supermarkt auf und ermittelt für eine Menge von n Produkten $1, \ldots, n$ jeweils den Preis pro Einheit c_j $(j = 1, \ldots, n)$ sowie den Anteil a_{ij} des Nährstoffes i $(i = 1, \ldots, m)$ am Produkt j $(j = 1, \ldots, n)$.

(a) Formulieren das beschriebene Optimierungsproblem als lineares Programm L.

Lösung. Das primale lineare Programm ist wie folgt gegeben:

Zielfunktion:

$$\text{minimiere} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(Kosten des Einkaufs)}$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

□

[1] Figur aus dem Roman “Moon Palace” von Paul Auster, die Handlung wurde leicht abgeändert ;)

(b) Formulieren Sie das zu L duale lineare Programm D. Geben Sie eine sinnvolle Interpretation des dualen Programms an und überlegen Sie sich dabei, wer ein Interesse daran haben könnte, das duale Programm zu optimieren.

Lösung. Dazu läßt sich das duale Programm wie folgt formulieren:

Zielfunktion:

$$\text{maximiere } \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \qquad \text{(Kosten für Tagesbedarf)}$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \leq c_j \qquad j = 1, \dots, n$$

Eine Interpretation des dualen Programms könnte folgendermaßen lauten: Der Vektor y enthält zu jedem Nährstoff i einen Eintrag y_i, der dem festzulegenden Preis einer Einheit des Nährstoffes i entspricht. Das duale Programm maximiert dann die Kosten für einen Einkauf, der den Tagesbedarf von Fogg abdeckt. Dabei werden als Nebenbedingung für jedes Produkt maximale Preise pro Einheit berücksichtigt: Die Kosten der für eine Einheit eines Produktes benötigten Nährstoffe, darf einen maximalen Preis c_i nicht überschreiten. Natürlich möchte der Besitzer des lokalen Supermarktes den Preis eines solchen Einkaufs maximieren.

□