

Praktikum *Planare Graphen*

Michael Baur, Martin Holzer, Steffen Mecke

10. November 2006

- ▶ Grundlagenwissen zu planaren Graphen
- ▶ Themenvorstellung
- ▶ Gruppeneinteilung

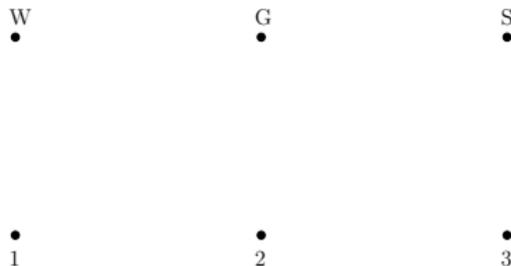
Inventur

Was wissen Sie über planare Graphen?

Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

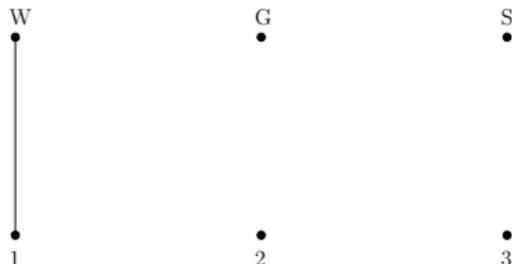
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

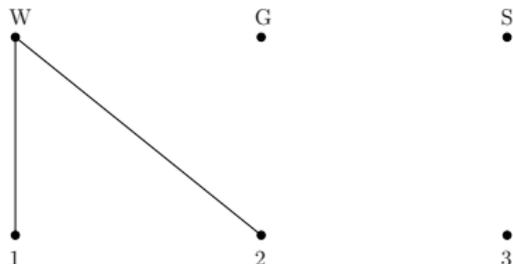
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

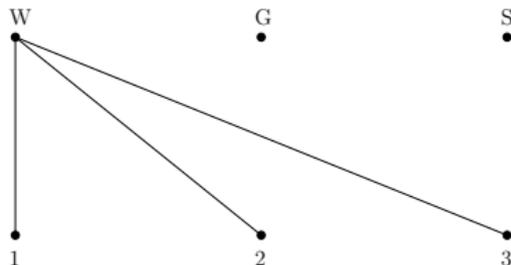
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

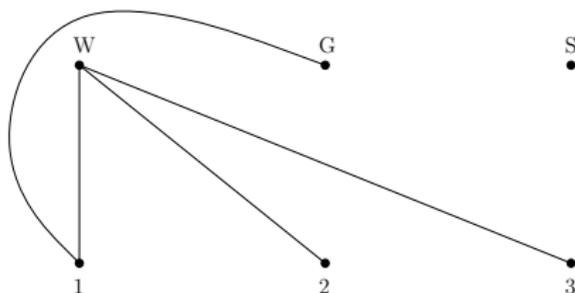
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

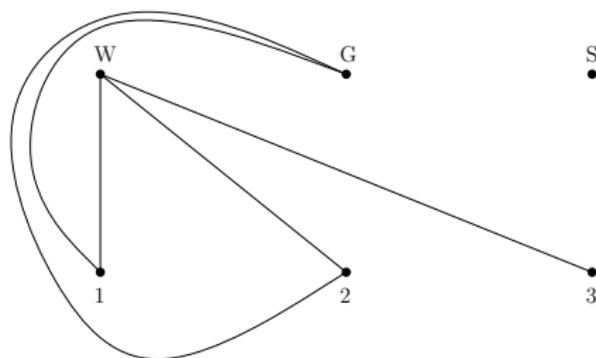
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

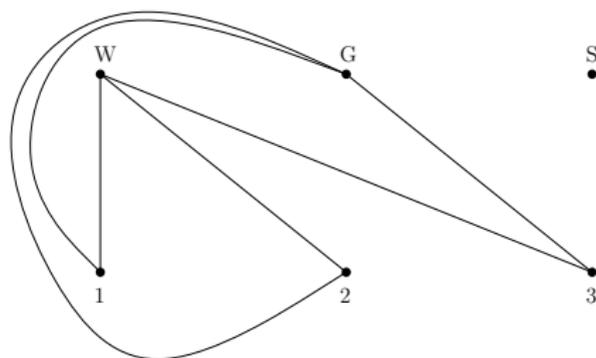
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

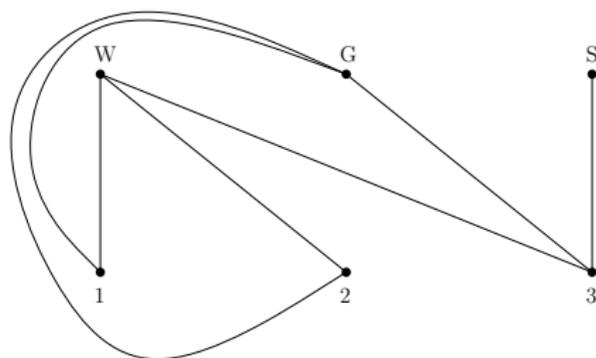
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

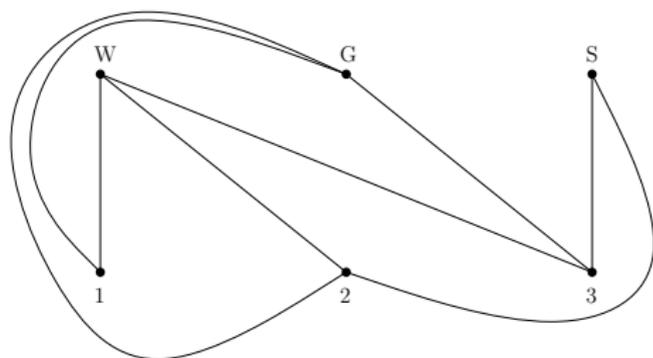
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

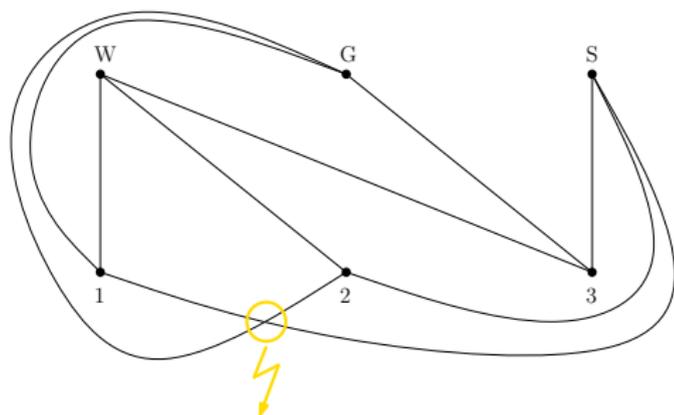
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



Wasser-Gas-Strom-Problem

Aufgabe:

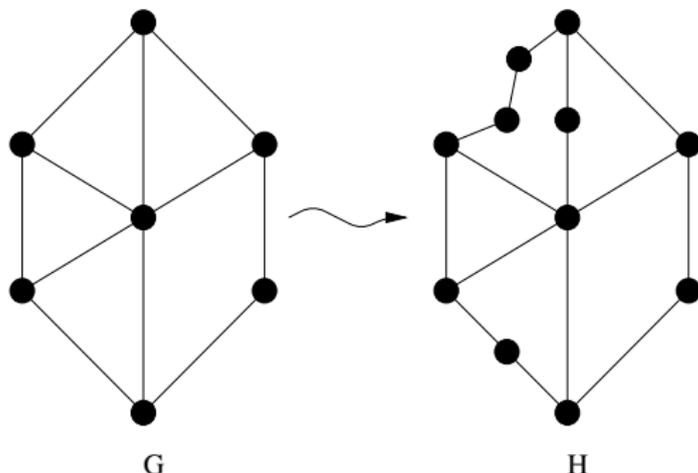
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen

Geht nicht!

Planarität

Ein Graph ist planar gdw. er keine Unterteilung des K_5 oder $K_{3,3}$ als Subgraph enthält.

Unterteilung:



Forschungsgegenstand

- ▶ Manche Probleme sind \mathcal{NP} -schwer auf allgemeinen Graphen, aber in \mathcal{P} auf planaren Graphen
- ▶ Beispiel: maximaler Schnitt (MAX CUT)
- ▶ Zerlegung von PGen mittels Planar Separator oft hilfreich (\rightsquigarrow Divide-and-Conquer-Verfahren)

Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet \leftrightarrow gerichtet/bigerichtet

Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet \leftrightarrow gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten

Grundbegriffe

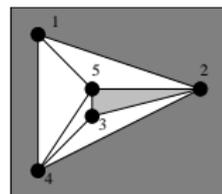
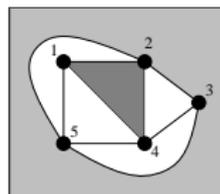
- ▶ ungerichtet \leftrightarrow gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten
- ▶ Pfad, Kreis (Zykel), ...

Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet \leftrightarrow gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten
- ▶ Pfad, Kreis (Zykel), ...
- ▶ Einbettung:
kombinatorisch \leftrightarrow geometrisch

Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet \leftrightarrow gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten
- ▶ Pfad, Kreis (Zykel), ...
- ▶ Einbettung:
kombinatorisch \leftrightarrow geometrisch
- ▶ Facette/äußere Facette



Eulerformel

In welcher Beziehung stehen Knoten-, Kanten- und Facettenanzahl eines planaren Graphen zueinander?

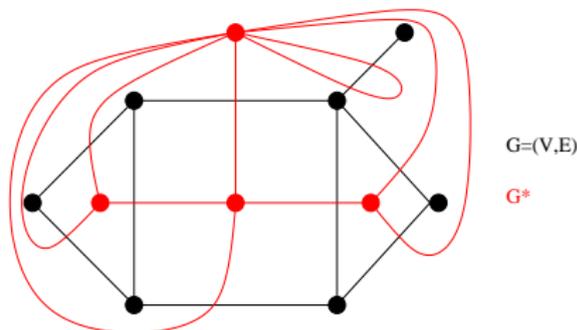
Eulerformel

In welcher Beziehung stehen Knoten-, Kanten- und Facettenanzahl eines planaren Graphen zueinander?

$$n - m + f = 2$$

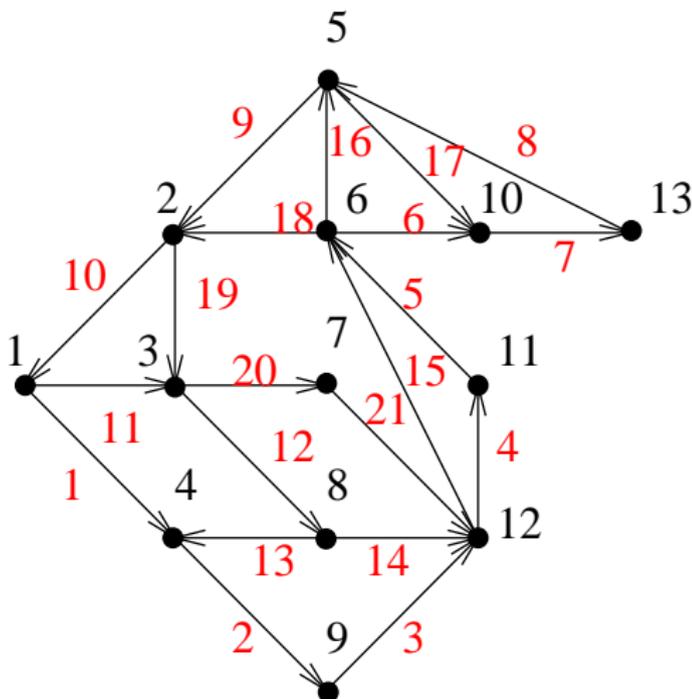
Dualgraph

- ▶ Facette \rightsquigarrow Knoten
- ▶ adjazente Facetten \rightsquigarrow Kante
- ▶ ‚Antenne‘ \rightsquigarrow Schleife
- ▶ Schnitt \leftrightarrow Kreis



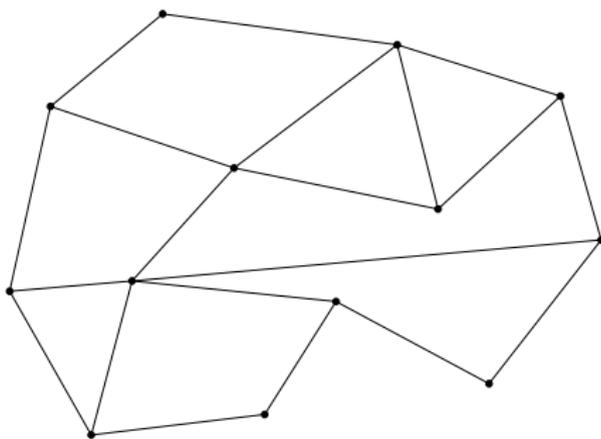
Graphsuche

- ▶ Breitensuche (BFS)
- ▶ Tiefensuche (DFS)
- ▶ Auswahlstrategie:
z. B. Right-First-DFS



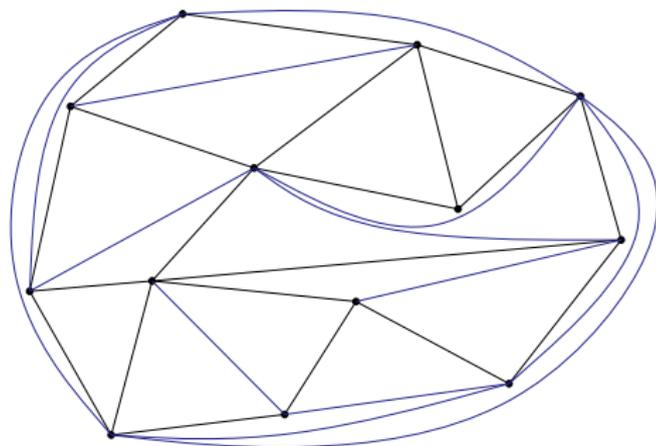
Triangulierung

- ▶ Mache Facetten zu Dreiecken...
- ▶ ...durch Einziehen neuer Kanten
- ▶ Gilt auch für äußere Facette



Triangulierung

- ▶ Mache Facetten zu Dreiecken...
- ▶ ...durch Einziehen neuer Kanten
- ▶ Gilt auch für äußere Facette



Inventur

Was wissen Sie *nun* über planare Graphen?

Gruppeneinteilung

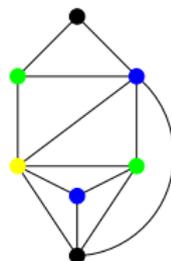
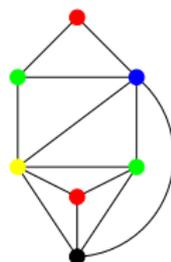
- ▶ 11 Teilnehmer, 4 Themen
- ▶ \rightsquigarrow 3 Gruppen à 3 Personen, 1 Gruppe à 2 Personen
- ▶ Wichtig: Organisation, Definition von Schnittstellen

Übersicht

- ▶ Graphenfärben
- ▶ Konvexes Layout
- ▶ Menger-Problem
- ▶ Planar-Separator-Theorem

Problemstellung

- ▶ Färben der Knoten mit min. Anzahl Farben
- ▶ Adjazente Knoten sollen verschiedene Farbe haben
- ▶ PGen sind 4-färbbar (schwierig)



Verfahren

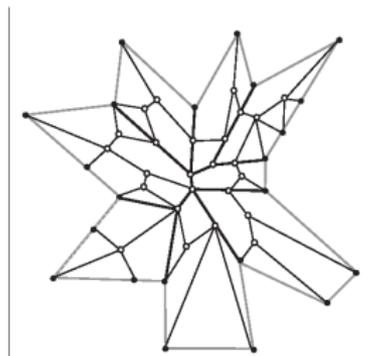
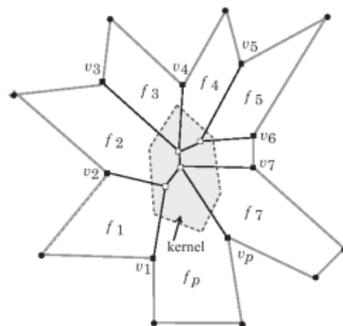
- ▶ Fünffärbungsalgorithmus (Linearzeit)
- ▶ Iterative Hinzunahme von Knoten

Aspekte

- ▶ Heuristiken zur Umfärbung/Optimierung

Problemstellung

- ▶ Gegeben: innen dreifach zusammenhängender Graph, Polygon (sternförmig)
- ▶ Zeichne äußere Facette auf Polygon...
- ▶ ...und innere Facetten konvex



Verfahren

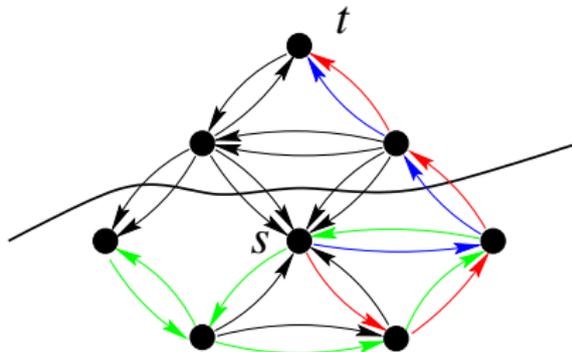
- ▶ Algorithmus von Hong/Nagamochi (Linearzeit)
- ▶ Berechne Grundgerüst aus geeigneten Pfaden
- ▶ Füge restliche Knoten in Teilflächen ein

Aspekte

- ▶ Festlegung der genauen Positionen: Symmetrien, Winkelauflösung
- ▶ Visualisierung der iterativen Konstruktion der Pfade

Problemstellung

- ▶ Gegeben: ungerichteter PG, Start- und Endknoten
- ▶ Finde max. Anzahl knoten-/kantendisjunkter Wege
- ▶ Hier: kantendisjunkte Variante



Verfahren

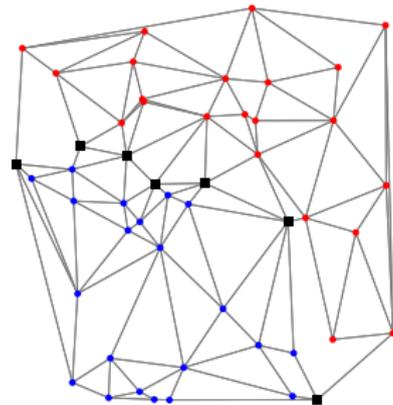
- ▶ Algorithmus von Weihe/Coupry (Linearzeit)
- ▶ Umweg über gerichteten Graphen
- ▶ Right-First-DFS

Aspekte

- ▶ Evaluation auf unterschiedlichen Graphen
- ▶ Herausforderung: schöne Visualisierung der Doppelkanten
- ▶ Relaxierung: max. k mehrfach benutzte Kanten
- ▶ Zusatz: Implementation der knotendisjunkten Version (?)
- ▶ ‚Direktes‘ Verfahren???

Problemstellung

- ▶ Zerlegung eines PG in (mind.) zwei Komponenten
- ▶ Separator möglichst klein (Garantie: $|S| \leq 4\sqrt{n}$)
- ▶ Komponenten möglichst balanciert (Garantie: $|K_1|, |K_2| \leq 2n/3$)



Verfahren

- ▶ Einfache Zerlegung: BFS, Level(s) als Separator
- ▶ Komplexe Zerlegung: Verschmelzung, Triangulierung, Fundamentalkreis
- ▶ Verschiedene Freiheitsgrade

Aspekte

- ▶ Evaluation verschiedener Graphen
- ▶ Berücksichtigung verschiedener Optimierungskriterien
- ▶ Einstellen von Parametern