Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmentechnik
WS 05/06

3. Übungsblatt

Ausgabe: 29. November 2005
Abgabe: 5. Dezember, 14 Uhr im ITI Wagner (Informatik-Hauptgebäude, 3. Stock)

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Heapsort **

(a) Was ist die Laufzeit von Heapsort, angewendet auf ein Array A der Länge n, das bereits aufsteigend sortiert ist? Wie verhält es sich, wenn A schon absteigend sortiert ist?

(b) Zeigen Sie, dass die Laufzeit von Heapsort in $\Omega(n \log n)$ ist.

(c) Geben Sie eine $O(\log n)$-Implementation der Prozedur Heap-Increasekey(A, i, k) an, welche $A[i]$ auf $\max(A[i], k)$ setzt und dann die Heap-Struktur entsprechend aufrechterhält.

(d) Geben sie einen $O(n \log k)$ Algorithmus an, welcher k sortierte Listen in eine sortierte Liste verschmilzt, wobei n die Gesamtzahl aller Elemente ist. Benutzen sie dazu einen Heap.

Problem 2: Bäume *

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) In einem Baum mit n Knoten gibt es genau $n - 1$ Kanten.

(b) Ein minimaler aufspannender Teilgraph ist immer ein Baum

Problem 3: Vier äquivalente Aussagen **

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ äquivalent sind.

(a) G ist zusammenhängend und enthält keine Kreise.

(b) G ist maximal kreisfrei, d.h. G enthält keinen Kreis, und für je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $\{u, v\} \notin E$ enthält der Graph $G' = (V, E \cup \{\{u, v\}\})$ einen Kreis.

(c) Zwischen je zwei Knoten in V gibt es genau einen Weg in G.

(d) G ist minimal zusammenhängend, d.h. G ist zusammenhängend, und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Problem 4: Schnitte und MSTs I *

Eine Kante e heiße *leicht*, wenn es einen Schnitt gibt, so dass e unter allen Kanten, die diesen Schnitt kreuzen, minimales Gewicht hat. Geben Sie einen gewichteten Graphen an, so dass die Menge der leichten Kanten keinen minimal aufspannenden Baum induziert.

Problem 5: Schnitte und MSTs II **

(a) Zeigen Sie: Wenn in einem Graph G mit reellen Kantengewichten für jeden Schnitt die den Schnitt kreuzende Kante minimalen Gewichts eindeutig ist, dann hat G einen eindeutigen aufspannenden Baum minimalen Gewichts.

(b) Gilt die Umkehrung von (a)?

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn in einem Graph G mit reellen Kantengewichten alle Kanten paarweise verschiedene Gewichte haben, dann hat G einen eindeutigen aufspannenden Baum minimalen Gewichts.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung der Aussage in (c).

Problem 6: Matroide **

Beweisen Sie, dass die Menge aller Teilmengen von Kanten eines Graphen, die eine Menge von Bäumen induzieren, ein Matroid ergibt.

Problem 7: Einmaschinenscheduling **

Eine Reihe von Aufträgen $A_1, \ldots A_n$ müssen von einer einzigen Maschine abgearbeitet werden, es kann also zu jedem Zeitpunkt höchstens ein Auftrag bearbeitet werden. Alle Aufträge benötigen die gleiche Bearbeitungszeit. Jeder Auftrag A_i hat eine Deadline $D_i \in \mathbb{R}$ bis zu der er fertig sein muss.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Teilmengen von Aufträgen, die rechtzeitig bearbeitet werden können, ein Matroid ist.

(b) Wird ein Auftrag nicht rechtzeitig fertig, so muss eine Strafe P_i bezahlt werden, deren Höhe vom jeweiligen Auftrag abhängt. In welcher Reihenfolge sollten die Aufträge abgearbeitet werden, damit die Gesamtstrafe minimiert wird?

Hinweis/Spoiler: Sei o.B.d.A. $D_1 \leq D_2 \leq \cdots \leq D_n$. Eine Teilmenge $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ von k Aufträgen $(i_1 \neq \cdots \neq i_k \in \{1, \ldots, n\})$ kann rechtzeitig bearbeitet werden, wenn für alle $j \leq k$ gilt : $D_{i_j} \geq j$.