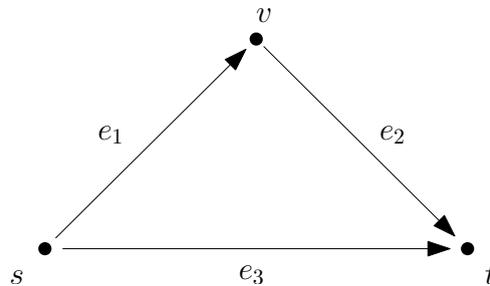


## 7. Musterlösung

### Problem 1: Lineare Probleme

\*\*\*



Für das obige Netzwerk seien die Kantenkapazitäten  $c(e_1) := 1$ ,  $c(e_2) := 2$  und  $c(e_3) := 3$  gegeben.

- (a) Stellen Sie das Lineare Programm des maximalen Flussproblems für dieses Netzwerk in der in der Vorlesung gegebenen Form auf und bringen Sie es dann in die ebenfalls in der Vorlesung definierte Standardform. Stellen Sie anschließend das zur Standardform duale lineare Programm auf.

*Lösung.* Kantenkapazitätsbedingungen:

$$e_1 \leq 1$$

$$e_2 \leq 2$$

$$e_3 \leq 3$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten  $v$ :

$$e_1 - e_2 = 0$$

Nichtnegativität der Kantenflüsse:

$$e_1 \geq 0$$

$$e_2 \geq 0$$

$$e_3 \geq 0$$

Die Bestimmung des maximalen Flusses entspricht in der Standardform aus der Vorlesung dem Minimierungsproblem  $\min(-e_1 - e_3)$  mit folgenden Nebenbedingungen:

$$e_1 - e_2 \geq 0 \quad e_1 \geq 0$$

$$-e_1 + e_2 \geq 0 \quad e_2 \geq 0$$

$$- e_1 \geq -1 \quad e_3 \geq 0$$

$$- e_2 \geq -2$$

$$- e_3 \geq -3$$

Das primale Programm ist:

$$P : \quad \min c^T x \quad \text{unter} \\ Ax \geq b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

wobei gilt:

$$x \in \mathbb{R}^3, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$$

Das zugehörige duale Programm ist:

$$D : \quad \max y^T b \quad \text{unter} \\ y^T A \leq c^T \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

wobei gilt:

$$y \in \mathbb{R}^5, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$$

□

(b) Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

*Lösung.* Ja, das Lösungspolyeder ist durch den Hyperquader beschränkt, der durch die Kapazitäts- und Positivitätsbedingungen bestimmt wird. □

(c) Stellen sie das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder graphisch dar, sowie die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene.

*Lösung.* Abbildung 1 zeigt das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder  $\mathcal{P}$  und die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene, die von  $O$ ,  $A$  und  $B$  aufgespannt wird, wobei  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (1, 1, 0)$  und  $B = (0, 0, 3)$ . □

(d) Führen Sie die Simplexmethode auf dem Polyeder durch: Starten Sie dazu im Nullpunkt. Welches sind die *verbessernden Kanten* von dort aus? Welchen Flussserhöhungen im Ausgangsgraphen entsprechen diese? Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht.

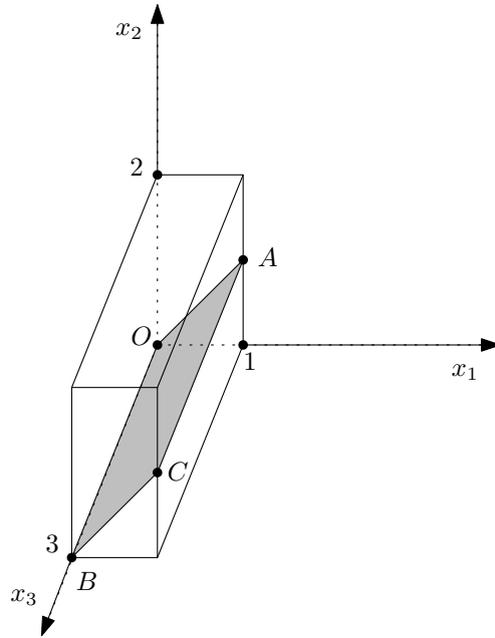


Abbildung 1: Graphische Darstellung des Lösungsraums für das primale Problem.

*Lösung.* Das Simplexverfahren führt von  $O$  nach  $A$  (erhöhender Weg über  $e_1$  und  $e_2$ ) und von  $O$  nach  $B$  (erhöhender Weg über  $e_3$ ). Danach wird der Punkt  $C = (1, 1, 3)$  erreicht, der dem Fluss  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 3$  entspricht. Dieser Punkt wird als optimale Lösung ausgegeben, da keine weitere Ecke des Lösungsraums erreicht werden kann, die einer Verbesserung der Zielfunktion entspricht.  $\square$

Betrachten wir nun ein allgemeines Flussproblem.

$$\max \sum_{(s,i) \in E} x_{s,i} - \sum_{(i,s) \in E} x_{i,s}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} x_{i,j} \leq c_{i,j} \\ x_{i,j} \geq 0 \end{array} \right\} \quad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{i,j} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{j,i} = 0 \quad \forall j \in V \setminus \{s, t\}$$

In Matrixform lautet dies

$$\max a^T x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x \leq c \\ -\text{I} & x \leq 0 \\ B & x = 0 \end{array} .$$

Dabei sei  $\text{I}$  eine Einheitsmatrix und  $B$  die Matrix, die sich aus den Flusserhaltungsbedingungen ergibt.

(e) Welche Dimensionen haben  $a$ ,  $\mathbb{I}$  und  $B$ ?

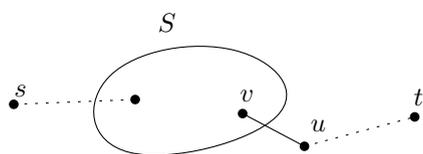
*Lösung.* Sei  $m = |E|$  und  $n = |V|$ . Dann gilt:

- $a \in \mathbb{R}^m$ : Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten  $e \in E$  mit den jeweiligen Flusswerten  $f(e)$ .
- $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ : Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$ : Für jeden der  $n - 2$  Knoten aus  $V \setminus \{s, t\}$  wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung (bzw. zwei Ungleichungen) über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt. Insgesamt kommen alle Kanten genau zweimal vor.

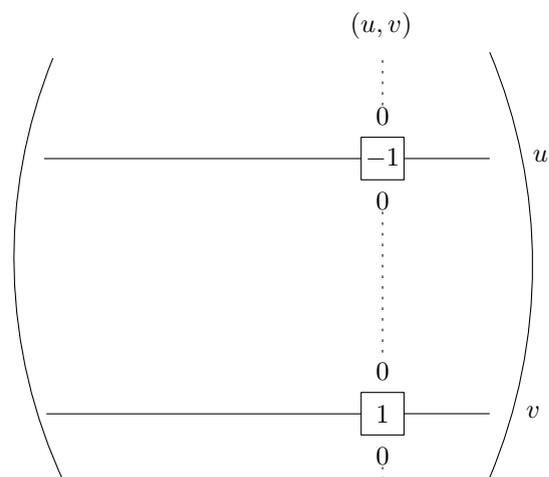
□

(f) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix  $B$  sind linear unabhängig.

*Lösung.* Sei  $\sum \alpha_i z_i = 0$  eine Linearkombination der Zeilen. Die  $\alpha_i$ , die nicht 0 sind, entsprechen einer Menge von Knoten  $S \subset V \setminus \{s, t\}$ . In jeder Spalte von  $B$  gibt es genau zwei Einträge ungleich 0, da jede Kante genau zwei Endknoten hat. Zu jeder Kante  $e$ , die zu einem der Knoten  $v \in S$  adjazent ist, kommt ein Eintrag ungleich 0 in der  $v$  entsprechenden Zeile vor. Wenn  $G$  zusammenhängend ist, gibt es mindestens eine Kante  $(u, v)$  mit entweder  $u \in S$  und  $v \notin S$  oder  $v \in S$  und  $u \notin S$ . Sei ohne Einschränkung  $u \notin S$  (siehe Abbildung 2(a)). Dann ist  $\alpha_u = 0$  und gleichzeitig  $\alpha_v \neq 0$ , da  $v \in S$ . Andererseits gilt für alle  $w \neq u, v$ :  $(\alpha_w z_w)_{(u,v)} = 0$ , da die Kante  $(u, v)$  nur zwischen  $u$  und  $v$  definiert ist. In Worten bedeutet dies, dass es keine andere Zeile von  $B$  gibt, in der die Koordinate, die zur Kante  $(u, v)$  korrespondiert ungleich 0 ist, da  $(u, v)$  nur zu  $u$  und zu  $v$  inzident ist (siehe Abbildung 2(b)). Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, also gibt es kein  $\alpha_i \neq 0$ . Also sind die Zeilen linear unabhängig, wenn  $G$  zusammenhängend ist.



(a) Veranschaulichung für  $v \in S$  und  $u \notin S$ .



(b) Struktur der Matrix  $B$ .

Abbildung 2: Illustrationen für Teilaufgabe (f).

□

- (g) Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

*Lösung.* Jede Zeile von  $B$  entspricht einer Hyperebene der Dimension  $m - 1$  im  $\mathbb{R}^m$ . Wenn alle  $c_i$  positiv sind, hat diese Hyperebene einen nichtleeren Schnitt mit dem durch die Kapazitätsbedingungen gegebenen Hyperquader und den anderen Hyperebenen, denn mindestens der Ursprung liegt in diesem Schnitt. Da es  $n - 2$  linear unabhängige Hyperebenen gibt, ist die Dimension des Lösungspolyeder im Allgemeinen  $m - (n - 2)$ . □

- (h) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren. (Hinweis: Ein Extrempunkt eines Polygons  $P$  kann nicht als Konvexkombination  $\lambda \cdot s + (1 - \lambda) \cdot t$  zweier verschiedener Punkte von  $P$  dargestellt werden. Ein Punkt auf einer Kante von  $P$  kann nur als konvexe Kombination zweier verschiedener Punkte der selben Kante dargestellt werden.)

*Lösung.* Betrachte den Graphen in Abbildung 3. Die Erhöhung entlang der gestrichelten Wege führt zum Fluss  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$  aber dies ist eine konvexe Kombination zweier Flüsse, nämlich  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) = 1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ . Also ist  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$  kein Extrempunkt des Lösungspolyeders, also entsprach die letzte Erhöhung keinem Schritt entlang einer Kante des Polyeders wie im Simplexverfahren. □

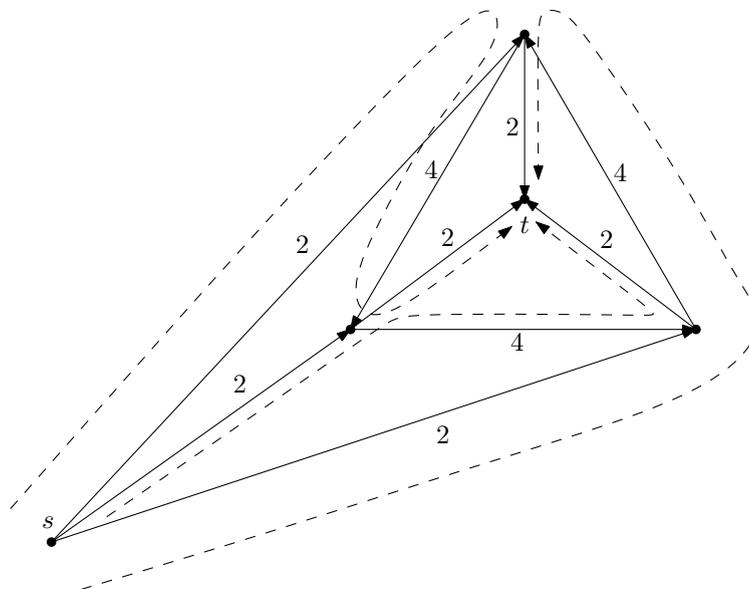


Abbildung 3: Gegenbeispiel für Teilaufgabe (h).

- (i) Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

*Lösung.* Ein Schritt im Simplexverfahren ist ein Wechsel zu einem neuen Punkt des Lösungspolyeders (sogar einer Ecke), in einer Richtung, welche die Zielfunktion verbes-

sert. Da Zielfunktion ist aber gerade der  $s$ - $t$ -Fluss, also wird mit einem Simplexschritt der  $s$ - $t$ -Fluss erhöht. Wird der  $s$ - $t$ -Fluss erhöht so existiert eine Kante  $(s, v)$ , auf der der Fluss erhöht wurde. Damit bei Knoten  $v$  die Flusserhaltung gilt existiert wiederum eine Kante  $(v, w)$  auf der der Fluss erhöht wurde. Der einzige Knoten an dem diese Kette enden kann ist  $t$ , denn dort gibt es keine Flusserhaltung. Beachte dass  $s$  als Ende nicht in Frage kommt, da der  $s$ - $t$ -Fluss durch einen Kreis nicht erhöht wird. Ein  $s$ - $t$ -Fluss kann also nur entlang mindestens eines (nicht notwendigerweise einfachen) erhöhenden  $s$ - $t$ -Weges erhöht werden. Somit ist die Umkehrung der vorherigen Behauptung wahr. (Es bleibt zu zeigen, ob es stets genau einen solchen  $s$ - $t$ -Weg gibt, oder ob die Flusserhöhung mehreren erhöhenden  $s$ - $t$ -Wegen entsprechen kann.)

□

## Problem 2: BIN PACKING

\*

Zeigen Sie, dass für den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus NEXT FIT für BIN PACKING nicht nur gilt  $\mathcal{R}_{NF} \leq 2$ , sondern sogar gilt  $\mathcal{R}_{NF} = 2$ .

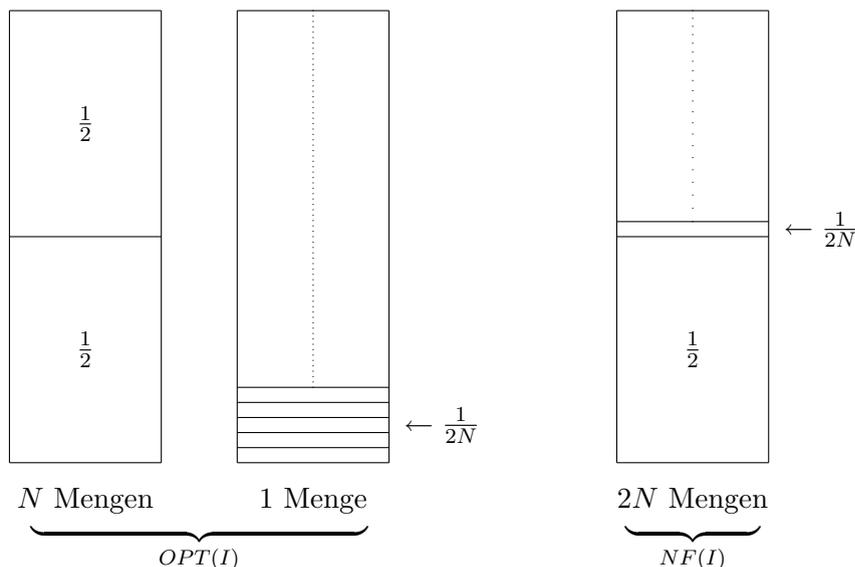
*Lösung. Beispiel:*

Sei  $n = 4 \cdot N$ . Sei weiterhin

$$s(a_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & i \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2 \cdot N} & \text{sonst} \end{cases}$$

Der NEXT FIT Algorithmus  $\mathcal{A}_{NF}$  benötigt  $2 \cdot N$  Mengen  $B_j$ , während eine Optimallösung mit  $N + 1$  Mengen auskommt, das bedeutet

$$\mathcal{A}_{NF}(I) = 2 \cdot \text{OPT}(I) - 2.$$



Diese Konstruktion zeigt für große  $N$ :  $\frac{\mathcal{A}_{NF}(I)}{\text{OPT}(I)} \rightarrow 2$ . Aus der Vorlesung gilt  $\mathcal{R}_{NF} \leq 2$ . Somit folgt die Behauptung. □

### Problem 3: VERTEX COVER

\*\*

Ein *Vertex-Cover* eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Teilmenge  $V' \subseteq V$ , so dass jede Kante aus  $E$  zu mindestens einem Knoten aus  $V'$  inzident ist. Das Problem VERTEX COVER (VC) besteht nun darin, ein Vertex-Cover mit minimaler Kardinalität zu finden.

---

#### Algorithmus 1 : Approximationsalgorithmus für VERTEX COVER

---

**Eingabe** : Graph  $G = (V, E)$

**Ausgabe** :  $S$  (Vertex Cover von  $G$ )

$S := \emptyset$

**Für** alle Kanten  $\{v_i, w_i\} \in E$

**Wenn**  $\{v_i, w_i\}$  nicht durch  $S$  überdeckt ist  
         $S \leftarrow v_i$   
         $S \leftarrow w_i$

---

Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 eine Faktor-2-Approximation für das Problem VERTEX COVER liefert.

*Lösung.* Algorithmus 1 liefert ein Vertex Cover, da für jede Kante, die nicht überdeckt ist, beide Endknoten zur Lösung hinzugenommen werden. Betrachten wir nun Algorithmus 2, der bereits eine optimale Lösung  $S^*$  als Eingabe bekommt und diese auch wieder ausgibt.

---

#### Algorithmus 2 : Exakter Algorithmus für VERTEX COVER

---

**Eingabe** : Graph  $G = (V, E)$ , Optimallösung  $S^*$

**Ausgabe** :  $S$  (Minimales Vertex Cover von  $G$ )

$S := \emptyset$

**Für** alle Kanten  $\{v_i, w_i\} \in E$

**Wenn**  $\{v_i, w_i\}$  nicht durch  $S$  überdeckt ist  
        **Wenn**  $v_i \in S^*$   
             $S \leftarrow v_i$   
        **Wenn**  $w_i \in S^*$   
             $S \leftarrow w_i$

---

Offensichtlich fügt Algorithmus 1 höchstens doppelt so viele Knoten zu  $S$  hinzu wie Algorithmus 2, denn mindestens eine der beiden inneren *Wenn*-Abfragen muss erfüllt sein weil  $S^*$  schließlich eine Lösung ist und somit zu jeder Kante mindestens einen inzidenten Knoten beinhalten muss. Es lässt sich leicht ein Beispiel konstruieren, das zeigt dass diese Grenze scharf ist (siehe Abbildung 4). Also liefert Algorithmus 1 eine Faktor-2-Approximation.  $\square$

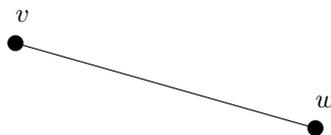


Abbildung 4: Approx. Vertex Cover findet 2 Knoten, das Optimale Vertex Cover benötigt nur einen.