

# Feed-links in Polygonen

Studienarbeit  
von

Philipp Schneider

An der Fakultät für Informatik  
Institut für Theoretische Informatik

Gutachter: Prof. Dr. Dorothea Wagner  
Betreuender Mitarbeiter: Dr. Martin Nöllenburg

Bearbeitungszeit: 20. Oktober 2011 – 19. April 2012



Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Karlsruhe, den 20. April 2012

-----



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Feed-link Problem in der euklidischen Ebene</b>	<b>5</b>
2.1	Zwei optimale Feed-links . . . . .	5
2.1.1	Kombinatorische Auftrennung und Formalisierung . . . . .	6
2.1.2	Analyse des Minimalwertproblems . . . . .	14
2.2	Erweiterungen . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Feed-link Problem in rektilinearen Polygonen zur <math>L_1</math>-Metrik</b>	<b>21</b>
3.1	Mehrere optimale Feed-Links . . . . .	21
3.2	Ein optimaler Feed-Link in Linearzeit . . . . .	25
3.2.1	Vorbereitung . . . . .	25
3.2.2	Einführung der Datenstruktur . . . . .	34
3.2.3	Implementierung des Linearzeitalgorithmus . . . . .	42
3.3	Optimale Feed-links bezüglich allen Punkten auf dem Rand von $P$ . . . . .	54
3.4	Längenminimierung rektilinearere Feed-links . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>57</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>59</b>



# 1. Einleitung

Netzwerkerweiterungsprobleme, bei denen es darum geht ein gegebenes geographisches Netzwerk möglichst sinnvoll um zusätzliche Verbindungen zu erweitern, treten in vielen Bereichen auf. Beispiele sind Erweiterungsprobleme im Straßenverkehr, in Eisenbahnnetzen, in der Binnenschifffahrt, in der Luftfahrt oder beim Design von Leiter-Netzwerken zur Datenübermittlung.

Eine spezielle Sorte von Netzwerkerweiterungsproblemen, nämlich die Frage, wie man einen gegebenen Punkt innerhalb einer Facette eines Netzwerkes, dargestellt als einfaches Polygon  $P$ , mit dem Rand von  $P$  sinnvoll verbinden kann, wurde von Aronov et al. [ABB<sup>+</sup>11] behandelt. Aronov et al. ziehen die *Streckung* (wie weiter unten erklärt) als Maß der Güte einer oder mehrerer Verbindungen (Feed-links) des Punktes (Feed-node) mit dem Rand von  $P$  heran. Dieses Gütemaß spiegelt den relativen Umweg wieder, den man über das Netzwerk und den Feed-link im Vergleich zum direkten Weg nehmen muss und ist insofern sinnvoll, dass man Umwege zwischen dem Feed-node und Punkten in dem Netzwerk möglichst klein halten möchte.

Eine Problemstellung, auf die man im Bereich der Straßenplanung trifft, ist eine sinnvolle Anbindung einer Ortschaft innerhalb einer Facette eines bestehenden Autobahnnetzes mittels eines oder mehrerer Zubringer zu finden, um dadurch das bestehende Netz von Bundes- und Landstraßen zu entlasten. Dabei ist es uns wichtig, dass der Umweg von der Ortschaft zu einem beliebigen Autobahnkreuz auf dieser Facette möglichst kurz gehalten wird, um so die Fahrzeit zu anderen, weiter entfernten Zielen innerhalb des Straßennetzes möglichst klein zu halten. Eine mögliche Instanz einer solchen Sachlage bietet die Abbildung 1.1. Eine weitere Verschärfung des Problems ergibt sich, wenn sich zusätzlich Hindernisse innerhalb der Facette befinden z.B. andere Ortschaften oder Naturschutzgebiete. In diesem Fall müssen die Zubringer um die Hindernisse herum geführt werden. Die beschriebene Problemstellung ist insbesondere in Entwicklungsländern mit gerade entstehender Infrastruktur relevant.

Aronov et al. stellen in [ABB<sup>+</sup>11] eine Reihe von effizienten Lösungen und Heuristiken für diese Klasse von Problemen vor. Darin wurde ein effizienter Algorithmus, um einen einzelnen optimalen Feed-link zu platzieren, einmal im Fall, dass die Streckung bezüglich einer diskreten Menge von Punkten von Interesse (*Sites*) auf dem Rand von  $P$  gemessen wird und anschließend bezüglich aller Punkte auf der Facette, eingeführt. Heuristiken für das effiziente Platzieren von einem und mehreren Feed-links mit möglichst kleiner resultierender Streckung wurden ebenfalls vorgestellt.

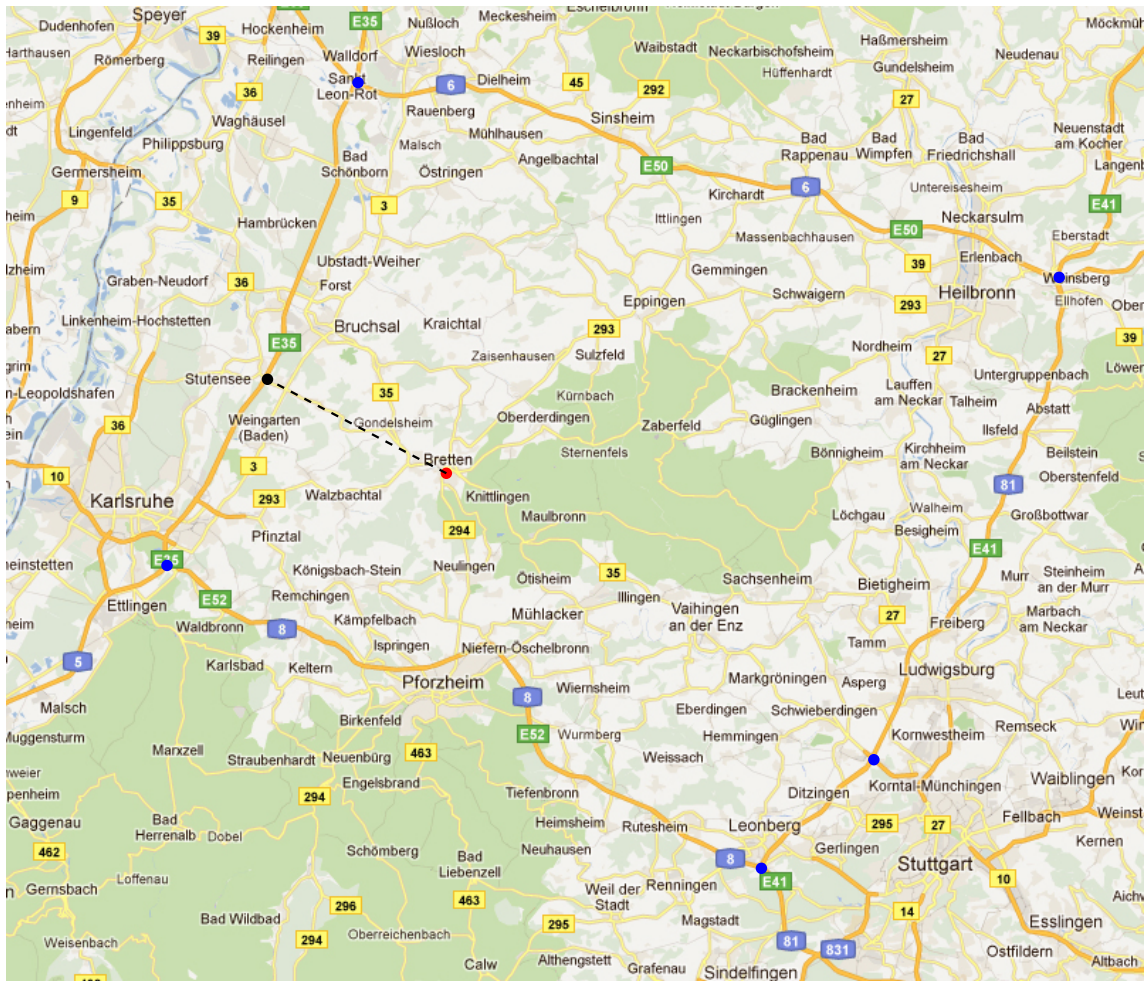


Abbildung 1.1: Dieser Kartenausschnitt von Google Maps zeigt eine Region zwischen Karlsruhe, Stuttgart und Heilbronn, die in einer Facette des bestehenden Autobahnnetzes eingefasst ist. Um das bestehende Netzwerk von Landstraßen zu entlasten, könnte man einen Zubringer bauen, der die Ortschaft Bretten (roter Punkt) direkt mit dem Autobahnnetz verbindet (hier ist ein möglicher Zubringer gestrichelt eingezeichnet), so dass die Umwege zu den umliegenden Autobahnkreuzen (blaue Punkte) minimiert werden.



Außerdem wurde der Fall behandelt, dass zusätzlich Hindernisse (definiert als Polygone, die ein Feed-link nicht kreuzen darf) in  $P$  existieren. Des Weiteren wurde ein effizienter Algorithmus vorgestellt, der höchstens einen Feed-link mehr setzt als die Minimallösung erfordern würde, um eine gewünschte Maximalstreckung in einem Netzwerk einzuhalten, sowie obere Schranken für die Streckung in den Spezialfällen konvexer und realistischer Polygone bei gegebener Anzahl von Feed-links. Realistische Polygone wurden dabei definiert als einfache Polygone, bei denen für jedes  $p$  im Inneren von  $P$  eine Menge von höchstens  $c$  Feed-links existiert, sodass die resultierende Streckung  $\leq \delta$  ist für gegebene Parameter  $\delta > 1$ ,  $c \geq 1$ .

In ihrer Schlussfolgerung stellen Aronov et al. heraus, dass die Frage nach der *optimalen* Platzierung von mehr als einem Feed-link in einfachen Polygonen weiterer Untersuchung bedarf. Wir werden einen Spezialfall dieses Problems lösen, nämlich die effiziente optimale Platzierung von zwei Feed-links bezüglich einer gegebenen, endlichen Menge von Sites. Wir zeigen dabei, dass das Problem durch eine Reihe kombinatorischer Aufteilungen auf lokale Teillösungsermittlungen herunter gebrochen werden kann, die uns jeweils auf ein Minimalwertproblem mit Nebenbedingungen führen, welches wir analytisch lösen können. Diejenige lokale Lösung, die das beste Ergebnis liefert, ist dann eine optimale Lösung des Problems. Der Zeitaufwand dafür ist in  $\mathcal{O}(k^4 \cdot n^2)$  wobei  $n$  der Anzahl der Kanten von  $P$  und  $k$  der Anzahl der Sites entspricht, ist also polynomiell in der Eingabegröße.

Außerdem werden wir eine abgeänderte Problemstellung betrachten, in der rektileare, einfache Polygone gegeben sind (das sind einfache Polygone mit lediglich horizontalen und vertikalen Kanten), für die wir rektileare Feed-links (das sind kürzeste Wege aus lediglich horizontalen und vertikalen Kanten) von  $p$  an den Rand von  $P$  suchen, so dass die Streckung gemessen mit der  $L_1$ -Metrik minimal wird. Die  $L_1$ -Metrik ist die Distanz zwischen zwei Punkten in horizontaler Richtung addiert mit der entsprechenden Distanz in vertikaler Richtung und wird auch Manhattendistanz genannt, da Distanzen zwischen Orten im rektilearen Straßennetzwerk von Manhattan der  $L_1$ -Metrik entsprechen. Diese Art von Problemstellung tritt also immer dann auf, wenn das Netzwerk entlang eines gegebenen rektilearen Gitters verlaufen muss.

Wir werden einen Algorithmus vorstellen, mit dem wir diese Problemstellung für eine gegebene Menge von  $k$  Sites für  $m$  zu platzierende Feed-links in  $\mathcal{O}(m \cdot k \cdot \binom{n}{m})$  Zeit lösen. Dieser Algorithmus nutzt aus, dass eine endliche Menge von Punkten auf dem Rand von  $P$  als Anbindungspunkte für die Feed-links ausreicht, um die minimale Streckung zu erreichen, wodurch wir die angegebene Laufzeit mit einem einfachen kombinatorischen Ansatz erreichen. Nehmen wir die Anzahl der zu setzenden Feed-links  $m$  als konstant an, ist die Laufzeit dieses Algorithmus polynomiell.

Ein fortgeschrittenerer Algorithmus findet einen bezüglich der Streckung optimalen Feed-link in  $\mathcal{O}(n+k)$  Zeit, also in linearer Zeit in der Eingabegröße. Bei diesem Ansatz laufen wir die Sites auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn ab und erreichen mittels einer geeigneten Datenstruktur, dass jede Sites nur konstant oft betrachtet wird. Für die Problemstellung, die Streckung aller Punkte auf dem Rand von  $P$  zu minimieren, zeigen wir, dass eine Transformierung auf das Problem mit einer endlichen Menge von Sites möglich ist, wodurch wir eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \binom{n}{m})$  für das Finden von  $m$  optimalen Feed-links, bzw.  $\mathcal{O}(n)$  für einen optimalen Feed-link erreichen.



## 2. Feed-link Problem in der euklidischen Ebene

Wir untersuchen zunächst das Feed-link Problem in der euklidischen Ebene, wie es in [ABB<sup>+</sup>11] definiert wurde. Wir werden dabei den speziellen Fall diskutieren, dass zwei Feed-links vom Feed-node zum Rand von  $P$  platziert werden sollen, so dass die im Folgenden definierte Streckung zu einer endlichen Menge von Sites minimal wird. Das angegebene Verfahren betrachtet die Streckung für zwei Feed-links, die an zwei festgelegten Kanten des Randes von  $P$  anbinden, zusammen mit einer vorgegebenen Zuteilung, welche jeder Site einen der beiden Feed-links zuordnet bezüglich dem wir die Streckung dieser Site messen, und löst das resultierende Teilproblem.

### 2.1 Zwei optimale Feed-links

Sei  $P$  ein einfaches Polygon in der euklidischen Ebene mit  $n \geq 3$  Knoten. Seien  $a$  und  $b$  Punkte auf dem Rand von  $P$ . Mit  $P(a, b)$  bezeichnen wir die kleinste Teilmenge des Randes von  $P$ , die  $a$  und  $b$  im Uhrzeigersinn verbindet. Sei außerdem  $\mu(a, b)$  die Länge von  $P(a, b)$ .

Seien  $p$  ein Punkt im Inneren von  $P$  (Feed-node) und  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  eine Menge paarweise unterschiedlicher Punkte (Sites) auf dem Rand von  $P$ . Wir suchen zwei Punkte  $q_1$  und  $q_2$  auf dem Rand von  $P$ , welche mit  $p$  verbunden werden, so dass die resultierende *Streckung* minimal wird. Die Streckung stellt den größten relativen Umweg von  $p$  zu einer der Sites in  $S$ , also das Verhältnis der Distanz auf dem Wegnetzwerk zur Luftlinie von  $p$  zu dieser Site, dar. Wir formalisieren die Streckung wie folgt (siehe dazu Abbildung 2.1).

**Definition 2.1.** *Wir definieren die Streckung einer Site  $s_i \in S$  über den Feedlink an  $q_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$  (die abhängig ist von der Position von  $q_j$ ) als*

$$\delta_i^j(q_j) := \frac{\|p - q_j\|_2 + bdl(q_j, s_i)}{\|p - s_i\|_2},$$

dabei sei  $bdl(a, b) := \min\{\mu(a, b), \mu(b, a)\}$  für Punkte  $a$  und  $b$  auf dem Rand von  $P$  die Länge des kürzesten Weges auf dem Rand von  $P$  von  $a$  zu  $b$  (boundary-length). Die Streckung der Sites  $s_i$  (über den Feedlink, der die kleinste Streckung induziert) sei gegeben durch

$$\delta_i(q_1, q_2) := \min\{\delta_i^1(q_1), \delta_i^2(q_2)\}.$$

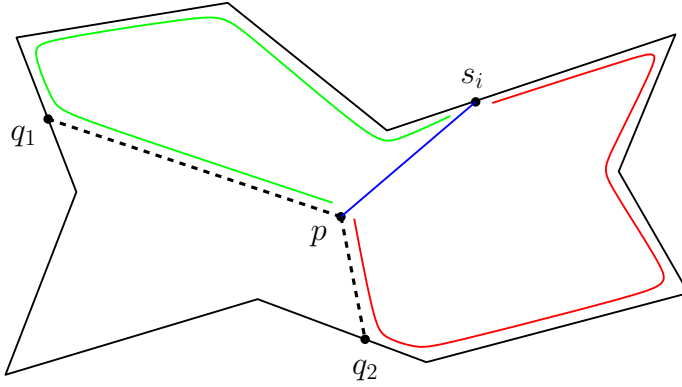


Abbildung 2.1: Die Streckung  $\delta_i^1$  bzw.  $\delta_i^2$  ist der Quotient aus der grün bzw. rot markierten Strecke (Netzwerkdistanz) geteilt durch die blau markierte Strecke (Luftlinie).

Die Streckung aller Sites  $s_1, \dots, s_k$  sei dann definiert als

$$\delta(q_1, q_2) := \max_{i=1, \dots, k} \delta_i(q_1, q_2).$$

Wir fordern außerdem, dass die Sites  $s_1, \dots, s_k$  nur auf Knoten von  $P$  liegen (sonst trennen wir an diesen Stellen die Kanten von  $P$  auf), weshalb  $n \geq k$  ist. Zudem nehmen wir an, dass  $k \geq 3$  ist, denn für  $k < 3$  ist die Lösung des Problems trivial.

### 2.1.1 Kombinatorische Auftrennung und Formalisierung

Zur Lösung des Feed-link-Problems mit zwei Feed-links, brechen wir die gegebene Instanz auf lokale Teilprobleme herunter, aus deren Lösungen wir die Gesamtlösung erhalten. Sei dazu  $m$  der Punkt zwischen  $q_1$  und  $q_2$  im Uhrzeigersinn, so dass gilt

$$\|p - q_1\|_2 + \mu(q_1, m) = \|p - q_2\|_2 + \mu(m, q_2). \quad (2.1)$$

Sei  $m'$  der analog definierte Punkt zwischen  $q_1$  und  $q_2$  gegen den Uhrzeigersinn. Wir nehmen an, dass  $q_1 \neq q_2$  ist, da der Fall  $q_1 = q_2$  schon in [ABB<sup>+</sup>11] behandelt wurde. Damit hat die obige Gleichung auch tatsächlich zwei Lösungspunkte  $m$  und  $m'$ . Es ist klar, dass sich die Positionen von  $m$  und  $m'$  für unterschiedliche Positionen von  $q_1$  und  $q_2$  auf dem Rand von  $P$  ändern, also  $m = m(q_1, q_2)$  und  $m' = m'(q_1, q_2)$  ist. Wir wissen außerdem, dass der kürzeste Weg über das Wegnetzwerk von  $p$  zu einem Punkt  $s_i$  über den Feedlink an  $q_1$  führen muss falls  $s_i \in P(m', m)$  und über den Feedlink an  $q_2$  falls  $s_i \in P(m, m')$  (siehe Abbildung 2.2).

Wir nehmen weiter an, dass die Sites  $s_1, \dots, s_k$  in der Reihenfolge ihres Vorkommens auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn sortiert sind (das Sortieren ist mit einem Zeitaufwand von  $\mathcal{O}(n + k \log k)$  möglich) und unterteilen den Rand von  $P$  in  $k$  Abschnitte

$$A_i := P(s_i, s_{i+1}) \quad i \in \{1, \dots, k-1\} \quad A_k := P(s_k, s_1).$$

Sei  $(A_i, A_j)$ , mit  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  und  $i \neq j$  eine 2-Kombination ohne Wiederholung dieser Abschnitte und sei  $(e, e')$  mit  $e = (u_1, u_2)$ ,  $e' = (u'_1, u'_2)$ ,  $e \neq e'$  eine 2-Kombination ohne Wiederholung von Kanten von  $P$ , die jeweils zwei Knoten  $u_1, u_2$  und  $u'_1, u'_2$  verbinden, so dass  $u_1$  auf  $e$  im Uhrzeigersinn vor  $u_2$  und  $u'_1$  auf  $e'$  im Uhrzeigersinn vor  $u'_2$  steht. Außerdem soll  $e$  vollständig auf  $P(s_{j+1}, s_{i+1})$  und  $e'$  vollständig auf  $P(s_{i+1}, s_{j+1})$  liegen,

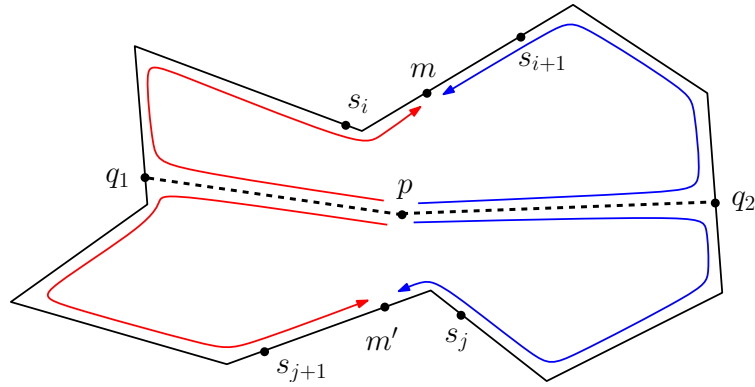


Abbildung 2.2: Die Punkte  $m$  und  $m'$  sind so gewählt, dass die Länge der rot markierten Strecken der Länge der zugehörigen blau markierten Strecken entspricht. Der kürzeste Weg von  $p$  zu einem Punkt auf  $P(m', m)$  führt über den Feed-link an  $q_1$ , während der kürzeste Weg von  $p$  zu einem Punkt an  $P(m, m')$  über den Feed-link an  $q_2$  führt.

das bedeutet, dass  $e$  und  $e'$  einen leeren Schnitt mit  $A_i \setminus \{s_i, s_{i+1}\}$  und  $A_j \setminus \{s_j, s_{j+1}\}$  haben.

Wir wollen nun die möglichen Positionen von  $q_1$  auf  $e$  und  $q_2$  auf  $e'$  untersuchen, so dass  $m \in A_i$  und  $m' \in A_j$  erhalten bleibt. Wir stellen diese Bedingung an  $m$  und  $m'$ , damit wir zu jeder Site wissen, ob der kürzeste Weg von  $p$  aus über den Feedlink an  $q_1$  führt oder aber über den an  $q_2$ . Diese Bedingung werden wir im Folgenden näher untersuchen.

Sei dazu  $v$  ein Punkt auf dem Rand von  $P$  und  $v \notin A_i \setminus \{s_i\}$  und  $v \notin A_j \setminus \{s_j\}$ . Die Existenz eines solchen Punktes  $v$  zeigt folgendes Lemma:

**Lemma 2.2.** *Mit den gegebenen Voraussetzungen muss es einen Punkt  $v \in P(u'_2, u_1)$  oder  $v \in P(u_2, u'_1)$  geben mit  $v \notin A_i \setminus \{s_i\}$  und  $v \notin A_j \setminus \{s_j\}$ .*

*Beweis.* Da  $P$  mindestens drei Sites besitzt, muss es eine Site  $v$  geben mit  $v \neq s_{i+1}$  und  $v \neq s_{j+1}$  (dabei sei  $s_{k+1} := s_1$ ). Damit gilt  $v \notin A_i \setminus \{s_i\}$  und  $v \notin A_j \setminus \{s_j\}$ . Da  $v$  insbesondere ein Knoten von  $P$  ist, muss außerdem  $v \in P(u'_2, u_1)$  oder  $v \in P(u_2, u'_1)$  gelten.  $\square$

Falls kein Punkt  $v$  in  $P(u'_2, u_1)$  mit den genannten Anforderungen existiert, wählen wir stattdessen einen in  $P(u_2, u'_1)$  (dort muss dann nach Lemma 2.2 ein solcher Punkt existieren) und vertauschen anschließend die Rollen von  $q_1$  und  $q_2$  sowie die von  $m$  und  $m'$  und gehen deshalb ohne Einschränkung davon aus, dass  $v \in P(u'_2, u_1)$  ist. Durch unsere spezielle Wahl von  $v$  vermeiden wir, dass sich bei ändernden Positionen von  $q_1$  und  $q_2$  auf  $e$  bzw.  $e'$  einer der Punkte  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $m(q_1, q_2)$  oder  $m'(q_1, q_2)$  über  $v$  hinweg bewegt, was andernfalls Inkonsistenzen in den nachfolgenden Termen verursachen würde. So jedoch können wir die Bedingungen  $m \in A_i$  und  $m' \in A_j$  in den folgenden Ungleichungen ausdrücken.

$$\mu(v, s_i) \leq \mu(v, m) \leq \mu(v, s_{i+1}), \quad (2.2)$$

$$\mu(v, s_j) \leq \mu(v, m') \leq \mu(v, s_{j+1}). \quad (2.3)$$

Unser Ziel ist es nun  $\mu(v, m)$  und  $\mu(v, m')$  geeignet zu parametrisieren, um die Ungleichungen (2.2) und (2.3) in eine handhabbare Form zu bringen. Dazu legen die Parameter

$t \in [0, 1]$  und  $s \in [0, 1]$  fest, an welcher Stelle an  $e$  bzw.  $e'$  sich die Anbindungspunkte  $q_1$  bzw.  $q_2$  der beiden Feed-links  $q_1(t)$  bzw.  $q_2(s)$  befinden. Wir formalisieren die Position von  $q_1$  und  $q_2$  als Konvex-Kombination von  $u_1, u_2$  und  $u'_1, u'_2$  wie folgt

$$q_1(t) := (1 - t)u_1 + tu_2,$$

$$q_2(s) := (1 - s)u'_1 + su'_2.$$

Lassen wir also  $t$  bzw.  $s$  von 0 bis 1 laufen, so bewegt sich  $q_1(t)$  bzw.  $q_2(s)$  auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn von  $u_1$  nach  $u_2$  bzw. von  $u'_1$  nach  $u'_2$ .

**Lemma 2.3.** *Die Ungleichungen (2.2) und (2.3) lassen sich durch geeignete Konstanten in Abhängigkeit der Parameter  $t$  und  $s$  in folgender Form schreiben:*

$$M_i \leq -\sqrt{At^2 + Bt + C} + \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + G \leq M_{i+1}, \quad (2.4)$$

$$M_j \leq \sqrt{At^2 + Bt + C} - \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + \tilde{G} \leq M_{j+1}. \quad (2.5)$$

*Beweis.* Wir betrachten  $\mu(v, m)$ . Da  $v \in P(u'_2, u_1)$  ist, gelten folgende Zusammenhänge

$$\mu(v, m) = \mu(v, q_1) + \mu(q_1, m), \quad (2.6)$$

$$\mu(m, q_2) = \mu(v, q_2) - \mu(v, m). \quad (2.7)$$

Aus (2.1) erhalten wir

$$\mu(q_1, m) = \|p - q_2\|_2 - \|p - q_1\|_2 + \mu(m, q_2). \quad (2.8)$$

Damit erhalten wir aus (2.6)

$$\begin{aligned} \mu(v, m) &= \mu(v, q_1) + \mu(q_1, m) \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \mu(v, q_1) + \|p - q_2\|_2 - \|p - q_1\|_2 + \mu(m, q_2) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \mu(v, q_1) + \|p - q_2\|_2 - \|p - q_1\|_2 + \mu(v, q_2) - \mu(v, m). \end{aligned}$$

Und schließlich

$$\mu(v, m) = 1/2(\|p - q_2\|_2 - \|p - q_1\|_2 + \mu(v, q_1) + \mu(v, q_2)). \quad (2.9)$$

Um  $\mu(v, m')$  darzustellen, benötigen wir eine Fallunterscheidung für die Position von  $v$ . Da  $v \in P(u'_2, u_1)$  ist und außerdem  $v \notin A_j \setminus \{s_j\}$  ist (siehe Lemma 2.2), gibt es die beiden Fälle  $v \in P(u'_2, s_j)$  und  $v \in P(s_{j+1}, u_1) \setminus \{s_{j+1}\}$ . Wir betrachten zunächst den zweiten Fall und machen folgende Beobachtung:

$$\mu(v, m') = \mu(v, q_2) + \mu(q_2, m') \quad (2.10)$$

$$\mu(q_1, m') = \mu(v, m') - \mu(v, q_1). \quad (2.11)$$

Weiter gilt mit (2.1)

$$\mu(q_2, m') = \|p - q_1\|_2 - \|p - q_2\|_2 + \mu(m', q_1). \quad (2.12)$$

Wir erhalten aus (2.10)

$$\begin{aligned}
\mu(v, m') &= \mu(v, q_2) + \mu(q_2, m') \\
&\stackrel{(2.12)}{=} \mu(v, q_2) + \|p - q_1\|_2 - \|p - q_2\|_2 + \mu(m', q_1) \\
&= \mu(v, q_2) + \|p - q_1\|_2 - \|p - q_2\|_2 + \mu(P) - \mu(q_1, m') \\
&\stackrel{(2.11)}{=} \mu(v, q_2) + \|p - q_1\|_2 - \|p - q_2\|_2 + \mu(P) + \mu(v, q_1) - \mu(v, m')
\end{aligned}$$

Womit wir nachfolgende Gleichung erhalten.

$$\mu(v, m') = 1/2(\|p - q_1\|_2 - \|p - q_2\|_2 + \mu(v, q_1) + \mu(v, q_2) + \mu(P)). \quad (2.13)$$

Für den Fall  $v \in P(u'_2, s_j)$  erhalten wir auf ähnliche Weise

$$\mu(v, m') = 1/2(\|p - q_1\|_2 - \|p - q_2\|_2 + \mu(v, q_1) + \mu(v, q_2) - \mu(P)). \quad (2.14)$$

Mit der eingeführten Parametrisierung von  $q_1$  und  $q_2$  mit  $t$  und  $s$  ist

$$\mu(v, q_1) = at + b, t \in [0, 1],$$

$$\mu(v, q_2) = cs + d, s \in [0, 1],$$

wobei  $a, c > 0$  die Längen von  $e$  bzw.  $e'$  seien und  $b = \mu(v, u_1) \geq 0$ ,  $d = \mu(v, u'_1) \geq 0$  die Distanzen auf dem Rand von  $P$  von  $v$  zum ersten Knoten von  $e$  bzw.  $e'$  im Uhrzeigersinn seien.

Wir erhalten somit mit (2.9), (2.13) und (2.14) aus den Ungleichungen (2.2) und (2.3) Bedingungen folgender Form in Abhängigkeit von  $s$  und  $t$ :

$$M_i \leq -\sqrt{At^2 + Bt + C} + \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + G \leq M_{i+1},$$

$$M_j \leq \sqrt{At^2 + Bt + C} - \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + \tilde{G} \leq M_{j+1}.$$

für geeignete Konstanten  $A, \dots, G, \tilde{G}$  und  $M_x := 2\mu(v, s_x)$ . □

**Lemma 2.4.** *Die beiden Terme aus Lemma 2.3*

$$2\mu(v, m) = -\sqrt{At^2 + Bt + C} + \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + G$$

$$2\mu(v, m') = \sqrt{At^2 + Bt + C} - \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + \tilde{G}$$

sind monoton steigend für  $t \in [0, 1]$  und  $s \in [0, 1]$ .

*Beweis.* Die Monotonie-Eigenschaft der Terme lässt sich prinzipiell schon an der Konstruktion von  $m$  und  $m'$  erkennen. Wir führen im Folgenden noch den formalen Beweis. Seien dazu  $t_1, t_2, s_1, s_2 \in [0, 1]$  mit  $t_1 < t_2$  und  $s_1 < s_2$ . Wir betrachten die Terme  $\mu(v, m)$  und  $\mu(v, m')$  aus dem Beweis von Lemma 2.3 in Abhängigkeit der Parameter  $t, s$ . Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
\|p - q_1(t_2)\|_2 &\leq \|p - q_1(t_1)\|_2 + \|q_1(t_1) - q_1(t_2)\|_2 \\
&= \|p - q_1(t_1)\|_2 + \mu(v, q_1(t_2)) - \mu(v, q_1(t_1))
\end{aligned}$$

und somit

$$\mu(v, q_1(t_1)) - \|p - q_1(t_1)\|_2 \leq \mu(v, q_1(t_2)) - \|p - q_1(t_2)\|_2.$$

Ebenfalls wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} & \|p - q_2(s_1)\|_2 \leq \|p - q_2(s_2)\|_2 + \|q_2(s_1) - q_2(s_2)\|_2 \\ \Leftrightarrow & \|p - q_2(s_1)\|_2 + \mu(v, q_2(s_1)) \leq \|p - q_2(s_2)\|_2 + \|q_2(s_1) - q_2(s_2)\|_2 + \mu(v, q_2(s_1)) \\ \Leftrightarrow & \|p - q_2(s_1)\|_2 + \mu(v, q_2(s_1)) \leq \|p - q_2(s_2)\|_2 + \mu(v, q_2(s_2)). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir aus Gleichung (2.9) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \mu(v, m)(t_1) &= 1/2(\|p - q_2\|_2 - \|p - q_1(t_1)\|_2 + \mu(v, q_1(t_1)) + \mu(v, q_2) \\ &\leq 1/2(\|p - q_2\|_2 - \|p - q_1(t_2)\|_2 + \mu(v, q_1(t_2)) + \mu(v, q_2) = \mu(v, m)(t_2) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mu(v, m)(s_1) &= 1/2(\|p - q_2(s_1)\|_2 - \|p - q_1\|_2 + \mu(v, q_1) + \mu(v, q_2(s_1)) \\ &\leq 1/2(\|p - q_2(s_2)\|_2 - \|p - q_1\|_2 + \mu(v, q_1) + \mu(v, q_2(s_2))) = \mu(v, m)(s_2). \end{aligned}$$

Die Monotonie von  $\mu(v, m')$  für  $s \in [0, 1]$  und  $t \in [0, 1]$  lässt sich auf ähnliche Art nachweisen.  $\square$

Nun wollen wir auch die Streckungsfunktion eines Punktes  $s_l$  über den Feedlink an  $q_1$  bzw.  $q_2$  aus Definition 2.1 in geschlossener Form in Abhängigkeit von  $t$  und  $s$  angeben und beweisen dazu das folgende Lemma.

**Lemma 2.5.** *Für geeignete Konstanten und Parameter  $t$  und  $s$  gilt*

$$\delta_t^1(t) = (\sqrt{At^2 + Bt + C} \pm at + C_1)C_2 \quad (2.15)$$

falls  $s_l \in P(s_{j+1}, s_i)$  und

$$\delta_t^2(s) = (\sqrt{Ds^2 + Es + F} \pm cs + \tilde{C}_1)\tilde{C}_2 \quad (2.16)$$

falls  $s_l \in P(s_{i+1}, s_j)$ .

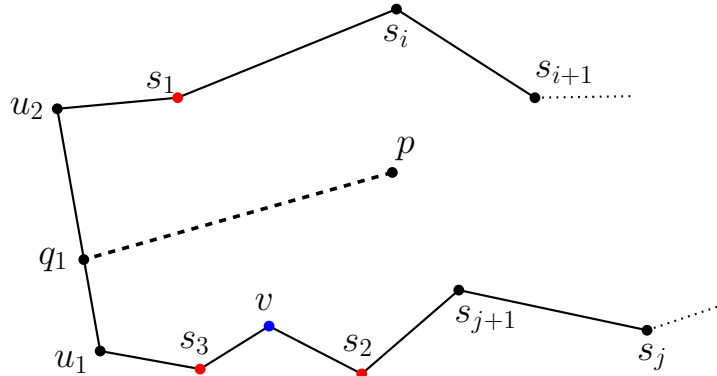


Abbildung 2.3: Die Sites  $s_1, s_2$  bzw.  $s_3$  repräsentieren Beispiele der Fälle 1,2 bzw. 3.

*Beweis.* Falls  $s_l \in P(s_{j+1}, s_i)$  ist, erhalten wir je nach Position von  $s_l$  relativ zu  $v$  und  $q_1$  drei Fälle für die Form von  $\delta_t^1(t)$  (siehe Abbildung 2.3):



**Fall 1:**  $s_l \in P(u_2, s_i)$ .

$$\begin{aligned}\delta_l^1(q_1) &= \frac{\|p - q_1\|_2 + \mu(q_1, s_l)}{\|p - s_l\|_2} \\ &= \frac{\|p - q_1\|_2 + \mu(v, s_l) - \mu(v, q_1)}{\|p - s_l\|_2}\end{aligned}$$

**Fall 2:**  $s_l \in P(s_{j+1}, u_1)$  und  $s_l \notin P(v, u_1)$ .

$$\begin{aligned}\delta_l^1(q_1) &= \frac{\|p - q_1\|_2 + \mu(s_l, q_1)}{\|p - s_l\|_2} \\ &= \frac{\|p - q_1\|_2 + \mu(P) - \mu(q_1, s_l)}{\|p - s_l\|_2} \\ &= \frac{\|p - q_1\|_2 + \mu(P) - \mu(v, s_l) + \mu(v, q_1)}{\|p - s_l\|_2}\end{aligned}$$

**Fall 3:**  $s_l \in P(s_{j+1}, u_1)$  und  $s_l \in P(v, u_1)$ .

$$\begin{aligned}\delta_l^1(q_1) &= \frac{\|p - q_1\|_2 + \mu(s_l, q_1)}{\|p - s_l\|_2} \\ &= \frac{\|p - q_1\|_2 + \mu(v, q_1) - \mu(v, s_l)}{\|p - s_l\|_2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir in jedem der Fälle

$$\delta_l^1(t) = (\sqrt{At^2 + Bt + C} \pm at + C_1)C_2$$

als Form für die Streckung der Punkte  $s_l$  auf  $P(s_{j+1}, s_i)$  für geeignete reelle Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ . Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$\delta_l^2(s) = (\sqrt{Ds^2 + Es + F} \pm cs + \tilde{C}_1)\tilde{C}_2$$

für  $s_l$  auf  $P(s_{i+1}, s_j)$  und geeignete reelle Konstanten  $\tilde{C}_1$  und  $\tilde{C}_2$ .  $\square$

Aus dem Beweis von Lemma 2.5 folgt außerdem, dass der Term  $\sqrt{At^2 + Bt + C}$  in  $\delta_l^1(t)$ , welcher aus dem Term  $\|p - q_1\|_2$  resultiert, für alle  $l = 1, \dots, k$  gleich ist. Dadurch gibt es höchstens zwei Schnittpunkte von zwei Streckungsfunktionen  $\delta_{l_1}^1(t)$  und  $\delta_{l_2}^1(t)$  mit  $l_1, l_2 \in \{1, \dots, k\}$  und  $l_1 \neq l_2$ , da  $\delta_{l_1}^1(t) = \delta_{l_2}^1(t)$  auf ein Nullstellenproblem eines quadratischen Polynoms führt. Insbesondere sind die Konstanten  $A, \dots, F$  dieselben wie in Lemma 2.3, da auch diese aus  $\|p - q_1\|_2$  bzw.  $\|p - q_2\|_2$  resultieren. Eine weitere Eigenschaft der Streckungsfunktionen gibt das folgende Lemma.

**Lemma 2.6.** *Die Streckungsfunktionen  $\delta_l^1(t)$  sowie  $\delta_l^2(s)$  sind monoton in  $t$  bzw.  $s$ .*

*Beweis.* Die Monotonie ist prinzipiell wieder aus der Definition der Streckung erkennbar. Da  $\delta_l^1(t)$  wie aus Lemma 2.5 in den Fällen 1,2 und 3 ersichtlich nur die Terme  $\|p - q_1\|_2$  und  $\mu(v, q_1)$  von  $t$  abhängen und alle anderen Terme konstant sind, reicht es zu zeigen, dass die beiden Terme

$$\mu(v, q_1) - \|p - q_1\|_2,$$

$$\mu(v, q_1) + \|p - q_1\|_2,$$

monoton sind. Dazu zeigen wir für  $t_1 < t_2$  die Ungleichungen

$$\mu(v, q_1(t_1)) - \|p - q_1(t_1)\|_2 \leq \mu(v, q_1(t_2)) - \|p - q_1(t_2)\|_2,$$

und

$$\mu(v, q_1(t_1)) + \|p - q_1(t_1)\|_2 \leq \mu(v, q_1(t_2)) + \|p - q_1(t_2)\|_2.$$

Die erste Ungleichung wurde bereits im Beweis von Lemma 2.4 gezeigt. Die zweite Ungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung. Analoges gilt für  $\delta_l^2(s)$ .  $\square$

Falls die Streckungsfunktionen  $\delta_l^1(t)$  und  $\delta_l^2(s)$  oder die Terme  $\mu(v, m)$  und  $\mu(v, m')$  in der Form aus Lemma 2.4, in einer  $\epsilon$ -Umgebung um  $t_0$  bzw.  $s_0$  konstant in  $t$  bzw.  $s$  sind, sind diese auf ganz  $\mathbb{R}$  konstant in  $t$  bzw.  $s$ .

Denn ist für konstant bleibendes  $s$  einer dieser Terme, bezeichnet als  $f(t, s) = f(t)$ , konstant  $f(t) = c$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung um  $t_0$  für  $\epsilon > 0$ , dann hätte das Nullstellenproblem  $f(t) - c = 0$  unendlich viele Lösungen, da alle Punkte in der  $\epsilon$ -Umgebung um  $t_0$  eine Lösung wären. Allerdings führt das Nullstellenproblem  $f(t) - c = 0$  für die angegebenen Terme auf ein Nullstellenproblem von Polynomen vom Grad höchstens zwei und da diese höchstens zwei Nullstellen haben können, muss somit  $f(t) - c$  konstant 0 sein und somit  $f(t) = c$  auf  $\mathbb{R}$  sein.

Sind  $\delta_l^1(t)$  und  $\delta_l^2(s)$  oder  $\mu(v, m)$  und  $\mu(v, m')$  also nicht konstant in  $t$  bzw.  $s$ , dann sind diese als Folgerung aus Lemma 2.4 und 2.6 sogar streng monoton für  $t \in [0, 1]$  bzw.  $s \in [0, 1]$ . Es gilt also folgendes Korollar.

**Korollar 2.7.** *Die Streckungsfunktionen  $\delta_l^1(t)$  und  $\delta_l^2(s)$  und die Terme  $\mu(v, m)$  und  $\mu(v, m')$  in der Form aus Lemma 2.4 sind entweder konstant in  $t$  bzw.  $s$  oder streng monoton für  $t \in [0, 1]$  bzw.  $s \in [0, 1]$ .*

Seien nun

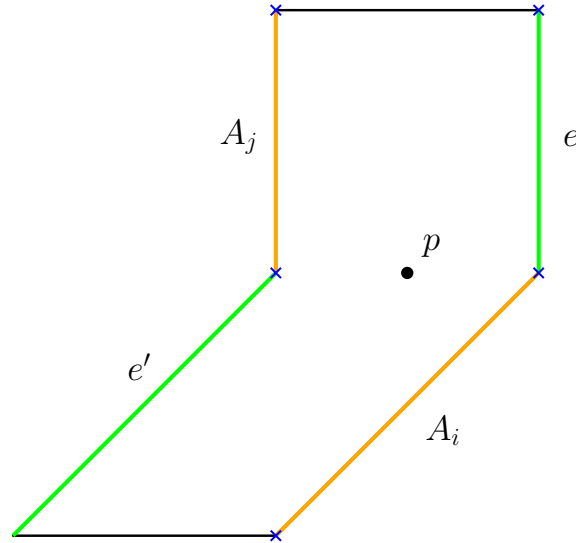
$$\delta^1(t) := \max_{s_l \in P(s_{j+1}, s_i)} \delta_l^1(t),$$

$$\delta^2(s) := \max_{s_l \in P(s_{i+1}, s_j)} \delta_l^2(s),$$

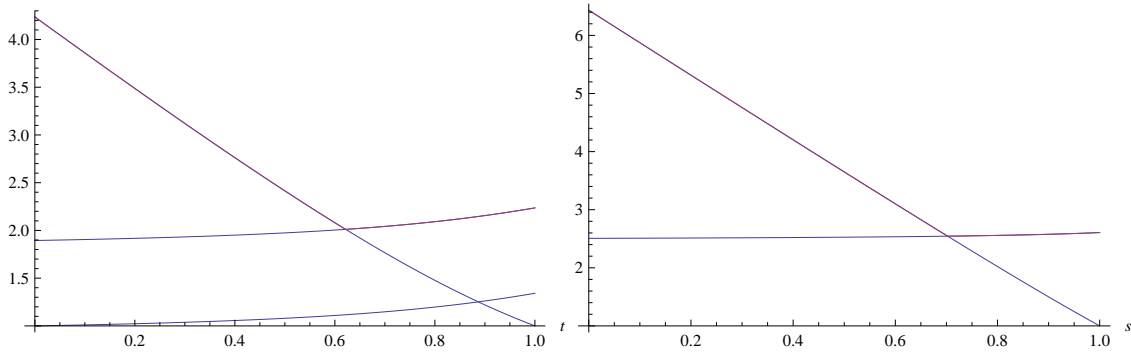
die maximalen Streckungen der Punkte  $s_l$  für  $l \in \{1, \dots, k\}$ , deren kürzester Weg über den Feedlink an  $q_1$  bzw.  $q_2$  führt. Die Funktion  $\delta^1(t)$  lässt sich durch das Bilden der oberen Hülle der Funktionen  $\delta_l^1(t)$  mit  $s_l \in P(s_{j+1}, s_i)$  mit dem Algorithmus von Hershberger [Her89] ermitteln (und damit natürlich auch  $\delta^2(s)$ ). Da sich die  $\delta_l^1(t)$  mit  $s_l \in P(s_{j+1}, s_i)$  paarweise höchstens zweimal schneiden, ist der Zeitaufwand hierfür  $\mathcal{O}(\lambda_3(k) \cdot \log k)$ . Abbildung 2.4 zeigt zu einer Beispiel-Instanz für eine gegebene Wahl von Kanten  $e$  und  $e'$  sowie Abschnitten  $A_i$  und  $A_j$ , die zugehörigen Streckungsfunktionen der Sites und deren obere Hüllen.

Dabei ist  $\lambda_s(n)$  die maximale Länge einer Davenport-Schinzel-Folge der Ordnung  $s$  mit  $n$  unterschiedlichen Zeichen. Eine Davenport-Schinzel-Folge der Ordnung  $s$  mit  $n$  unterschiedlichen Zeichen ist eine Folge über  $n$  unterschiedlichen Zeichen, in der gleiche Zeichen nicht aufeinander folgen und in der alle alternierenden Teilfolgen zweier unterschiedlicher Zeichen höchstens Länge  $s + 1$  haben. Der Term  $\lambda_s(n)$  hat für ein festes  $s$  asymptotisch nur ein unwesentlich schnelleres Wachstum als lineares Wachstum [ASS89].

Stimmt  $\delta_l^1(t)$  für ein Intervall  $I$  mit der oberen Hülle  $\delta^1(t)$  überein, also gilt  $\delta^1(t) = \delta_l^1(t)$  für  $t \in I$ , nennen wir  $\delta_l^1(t)$  *sichtbar* in  $I$ . Diese Bezeichnung benutzen wir auch, falls dasselbe für  $\delta_l^2(s)$  und ein Intervall  $J$  gilt.



(a) Polygon einer Beispiel-Instanz mit Wahl von Kanten und Abschnitten.



(b) Streckungsfunktionen der Sites auf  $P(s_{j+1}, s_i)$  (c) Streckungsfunktionen der Sites auf  $P(s_{i+1}, s_j)$

Abbildung 2.4: Wir sehen eine Instanz des Feed-link Problems mit zwei Feed-links. Oben ist ein Polygon mit einigen Sites (blaue Kreuze) abgebildet. Unten sind die Streckungsfunktionen der Sites auf  $P(s_{j+1}, s_i)$  (links) und  $P(s_{i+1}, s_j)$  (rechts) zu sehen. Die obere Hülle der Streckungsfunktionen dieser Sites ist lila markiert.

Wenn wir vom Punkt  $(0, \infty)$  auf die oberen Hüllen  $\delta^1(t)$  bzw.  $\delta^2(s)$  "herab sehen", bezeichnen wir Abschnitte von Funktionen  $\delta_{l_1}^1(t)$  bzw.  $\delta_{l_2}^2(s)$  für  $l \in \{1, \dots, k\}$ , die mit der entsprechenden oberen Hülle übereinstimmen, also sichtbar sind, als *Funktionssegmente*. Die Funktion  $\delta_l^1(t)$  kann mehrfach sichtbar sein, kann also mehrere Funktionssegmente haben.

Da sich die Funktionen  $\delta_l^1(t)$  für  $l \in \{1, \dots, k\}$  paarweise höchstens zweimal schneiden, können je zwei Funktionen  $\delta_{l_1}^1(t)$  und  $\delta_{l_2}^1(t)$  für  $l_1, l_2 \in \{1, \dots, k\}$  und  $l_1 \neq l_2$  nur dreimal abwechselnd sichtbar sein ( $\delta_{l_1}^1(t)$  und  $\delta_{l_2}^1(t)$  sind insbesondere nicht deckungsgleich, sonst wäre  $l_1 = l_2$ ). Das gilt auch für  $\delta_{l_1}^2(s)$  und  $\delta_{l_2}^2(s)$  für  $l_1, l_2 \in \{1, \dots, k\}$ .

Betrachten wir also die aufeinanderfolgenden Funktionssegmente der oberen Hüllen  $\delta^1(t)$  und  $\delta^2(s)$ , so bilden diese Davenport-Schinzel-Sequenzen der Ordnung 2. Die *Komplexität* der oberen Hülle  $\delta^1(t)$  sei definiert als die Anzahl der unterschiedlichen Funktionssegmente in der oberen Hülle. Die Komplexität der oberen Hülle  $\delta^1(t)$  ist dann also höchstens  $\lambda_2(k) = 2k - 1 = \mathcal{O}(k)$ . Dasselbe gilt natürlich auch für die Komplexität der oberen Hülle  $\delta^2(s)$ .

Unser Ziel ist es, die Gesamt-Streckung  $\delta(t, s) := \max\{\delta^1(t), \delta^2(s)\}$  zu minimieren. Um die Minimierung weiter zu vereinfachen, betrachten wir eine 2-Kombinationen ohne Wiederholung der Funktionssegmente von Funktionen  $\delta_{l_1}^1(t)$  und  $\delta_{l_2}^2(s)$  für  $s_{l_1}$  auf  $P(s_{j+1}, s_i)$  und  $s_{l_2}$  auf  $P(s_{i+1}, s_j)$  der beiden oberen Hüllen  $\delta^1(t)$  sowie  $\delta^2(s)$  und die zugehörigen Intervalle  $t \in I$  bzw.  $s \in J$ , auf denen dieses Paar von Funktionssegmenten in der entsprechenden oberen Hülle  $\delta_1(t)$  bzw.  $\delta_2(s)$  sichtbar ist. Wir sind dabei nur an den Funktionssegmenten interessiert, deren zugehörige Intervalle auf denen diese sichtbar sind, einen nichtleeren Schnitt mit  $(0, 1)$  haben. Falls  $I$  bzw.  $J$  nur teilweise in  $(0, 1)$  liegen, setzen wir  $I = I \cap [0, 1]$  bzw.  $J = J \cap [0, 1]$ . Für eine feste Kombination von Funktionssegmenten der Funktionen  $\delta_{l_1}^1(t), \delta_{l_2}^2(s)$  erhalten wir also die Bedingungen

$$t \in I = [a_I, b_I], \quad (2.17)$$

$$s \in J = [a_J, b_J], \quad (2.18)$$

für die  $\delta(t, s) = \max\{\delta_{l_1}^1(t), \delta_{l_2}^2(s)\}$  gilt. Um die Maximumfunktion zu entfernen, benutzen wir die Nebenbedingungen

$$\delta_{l_2}^2(s) - \delta_{l_1}^1(t) \leq 0 \quad (2.19)$$

bzw.

$$\delta_{l_1}^1(t) - \delta_{l_2}^2(s) \leq 0. \quad (2.20)$$

Ist (2.19) erfüllt, so gilt  $\delta(t, s) = \delta_{l_1}^1(t)$ . Ist hingegen (2.20) erfüllt, so gilt  $\delta(t, s) = \delta_{l_2}^2(s)$ . Somit können wir uns nun, unter Einhaltung aller bisher gesammelten Nebenbedingungen, ganz der Minimierung jedes Funktionssegmentes einzeln widmen.

### 2.1.2 Analyse des Minimalwertproblems

Im Folgenden wollen wir genauer auf die eigentliche Minimierung der Streckung eingehen, für die wir jetzt alle Voraussetzungen geschaffen haben. Wir tragen die erhaltenen Ergebnisse zusammen und stellen zwei nichtlineare Programme auf, deren Lösungen uns den minimalen Wert für die gewählte Abschnittskombination, die gewählte Kantenkombination und die gewählte Funktionssegment-Kombination von Funktionen  $\delta_{l_1}^1(t)$  und  $\delta_{l_2}^2(s)$  nebst den Intervallen  $I$  und  $J$  liefern. Zu minimieren sind Zielfunktionen von der Form (2.15) bzw. (2.16) also

$$f_1(t) := \delta_{l_1}^1(t) = (\sqrt{At^2 + Bt + C} \pm at + C_1)C_2$$

bzw.

$$f_2(s) := \delta_{l_2}^2(s) = (\sqrt{Ds^2 + Es + F} \pm cs + \tilde{C}_1)\tilde{C}_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(t, s) := -\sqrt{At^2 + Bt + C} + \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + C_3 \leq 0,$$

$$g_2(t, s) := \sqrt{At^2 + Bt + C} - \sqrt{Ds^2 + Es + F} - at - cs + C_4 \leq 0,$$

$$g_3(t, s) := \sqrt{At^2 + Bt + C} - \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs + C_5 \leq 0,$$

$$g_4(t, s) := -\sqrt{At^2 + Bt + C} + \sqrt{Ds^2 + Es + F} - at - cs + C_6 \leq 0$$

welche wir für geeignete Konstanten  $C_3, \dots, C_6$  aus (2.4) und (2.5) erhalten. Aus (2.19) erhalten wir außerdem die Nebenbedingung

$$g_5(t, s) := (\sqrt{Ds^2 + Es + F} \pm cs + \tilde{C}_1)\tilde{C}_2 - (\sqrt{At^2 + Bt + C} \pm at + C_1)C_2 \leq 0$$

falls  $f_1$  die Zielfunktion ist, bzw.

$$g_5(t, s) := (\sqrt{At^2 + Bt + C} \pm at + C_1)C_2 - (\sqrt{Ds^2 + Es + F} \pm cs + \tilde{C}_1)\tilde{C}_2 \leq 0$$

aus (2.20) falls  $f_2$  die Zielfunktion ist. Zudem müssen die Bedingungen (2.17) und (2.18) eingehalten werden, weshalb wir uns auf den Suchraum auf  $I \times J$  beschränken können.

Wir analysieren nun das erhaltene Optimierungsproblem auf  $I \times J$  mit den Nebenbedingungsfunktionen  $g_1, \dots, g_5$ . Dazu wählen wir zunächst  $f(t) = f_1(t)$  als Zielfunktion, so dass diese nur von  $t$  abhängt. Der Fall  $f(s) = f_2(s)$  funktioniert analog.

Wir stellen fest, dass mit Lemma 2.4 und 2.6 folgt:  $f$  ist entweder monoton fallend oder monoton steigend für  $t \in I \subseteq [0, 1]$ ,  $g_1, \dots, g_5$  sind monoton (steigend oder fallend) für  $t \in I \subseteq [0, 1]$  und  $s \in J \subseteq [0, 1]$ . Aus Symmetrie-Gründen reicht es nur den Fall, dass  $f$  monoton fallend ist, zu betrachten. Außerdem sind  $f$  und  $g_1, \dots, g_5$  als Kompositionen stetiger Funktionen stetig. Wir gehen zunächst davon aus, dass  $f$  nicht konstant in  $t$  ist und behandeln diesen Fall später. Also ist  $f$  nach Korollar 2.7 streng monoton fallend.

Ein Punkt  $(t, s) \in I \times J$  heißt *zulässig*, wenn für diesen alle Nebenbedingungen erfüllt sind, das heißt für den  $g_i(t, s) \leq 0$  für  $i \in \{1, \dots, 5\}$  gilt. Sei  $(t^*, s^*) \in I \times J$  eine zulässige Minimalstelle der Optimierungsfunktion  $f$ , die außerdem den größten Wert für die zweite Komponente  $s$  unter allen zulässigen Minimalstellen von  $f$  hat, falls es mehrere gibt.

Für  $i \in \{1, \dots, 5\}$  kann entweder  $g_i(t^*, s^*) = 0$  sein, in diesem Fall heißt  $g_i$  *aktiv*, oder  $g_i(t^*, s^*) < 0$  sein, in diesem Fall heißt  $g_i$  *inaktiv*. Wir überlegen uns Minimierungsstrategien für die möglichen Fälle, die sich ergeben, wenn unterschiedliche Anzahlen der  $g_i$  an  $(t^*, s^*)$  als aktiv angenommen werden.

**Fall 1.** Wir nehmen an, keines der  $g_i$  ist an  $(t^*, s^*) \in I \times J$  aktiv. Dann befindet sich  $(t^*, s^*)$  im Inneren  $M^\circ$  der Menge  $M = \{(t, s) \mid g_i(t, s) \leq 0, i = 1, \dots, 5\}$ . Denn wäre  $(t^*, s^*)$  am Rand  $\partial M$  von  $M$ , dann wäre  $g_i(t^*, s^*) = 0$  für ein  $i = 1, \dots, 5$ . Der Punkt  $(t^*, s^*)$  hat somit eine  $\epsilon$ -Umgebung mit einem  $\epsilon > 0$ , welche vollständig in  $M$  liegt. Das bedeutet, dass wir  $f$  lokal ohne Nebenbedingungen minimieren können. Der Wert für den  $f$  minimal wird, ist  $t^* = b_I$ , da  $f$  streng monoton fällt.

Wir haben also noch zu prüfen, ob ein  $s^*$  existiert, sodass  $g_i(b_I, s^*) \leq 0$  für  $i = 1, \dots, 5$  ist. Wir lösen dazu die Gleichungssysteme  $g_i(b_I, s) = 0$ . Diese Gleichungen führen auf Nullstellenprobleme von Polynomen vom Grad höchstens zwei und haben jeweils höchstens zwei Lösungen. Da die  $g_i$  monoton in  $s$  sind, erhalten wir Intervalle für jedes  $i = 1, \dots, 5$ , in denen  $g_i(b_I, s) \leq 0$  erfüllt ist. Ist der Schnitt dieser Lösungs-Intervalle und dem Intervall  $J$  nichtleer, dann erhalten wir also eine Menge, in der alle Nebenbedingungen erfüllt sind und die Teilmenge von  $J$  ist, und wählen daraus einen Wert  $s^*$ . Der Punkt  $(b_I, s^*)$  ist dann eine Lösung des Minimierungsproblems. Ist diese Schnittmenge leer, so gibt es auch kein  $s^*$  zu  $t^* = b_I$ , das alle Nebenbedingungen erfüllt und wir können zum nächsten Fall übergehen.

**Fall 2.** Angenommen genau ein  $g_i$  ist an der zu suchenden Minimalstelle  $(t^*, s^*) \in I \times J$  aktiv. Dann müssen wir  $f$  entlang der Höhenlinie  $H_i := \{(t, s) \mid g_i(t, s) = 0\}$  minimieren.

Da sowohl  $f$  als auch  $g_i$  monoton und stetig sind, muss  $H_i$  einen nichtleeren Schnittpunkt mit dem Rand von  $I \times J$  haben. Angenommen es wäre  $H_i \cap (I \times J) = \emptyset$ , das heißt für alle Randpunkte  $(t, s)$  wäre  $g_i(t, s) > 0$  oder  $g_i(t, s) < 0$ . Falls es zwei Punkte  $(t_1, s_1)$ ,  $(t_2, s_2)$  gäbe mit  $g_i(t_1, s_1) > 0$  und  $g_i(t_2, s_2) < 0$ , dann gäbe es nach dem Zwischenwertsatz einen Punkt  $(t_3, s_3)$  auf dem Rand von  $I \times J$  mit  $g_i(t_3, s_3) = 0$ , da der Rand von  $I \times J$  zusammenhängend ist. Das heißt für alle Randpunkte  $(t, s)$  des Randes von  $I \times J$  müsste ausschließlich  $g_i(t_1, s_1) > 0$  (oder ausschließlich  $g_i(t_1, s_1) < 0$ , analog) gelten. Damit wäre also  $g_i(a_I, s^*) > 0$  und  $g_i(b_I, s^*) > 0$ , aber wegen  $g_i(t^*, s^*) = 0$  wäre dann aber  $g_i$  nicht monoton in  $t$ , Widerspruch.

Da  $f$  streng monoton fallend und  $g$  monoton ist, muss sich  $(t^*, s^*)$  an einem Randpunkt von  $I \times J$  befinden. Angenommen  $(t^*, s^*)$  wäre im Inneren von  $I \times J$ . Wäre  $g_i$  konstant in

$s$ , dann müsste für  $\epsilon > 0$  gelten  $g_i(t^*, s^*) = g_i(t^*, s^* + \epsilon) = 0$ . Da  $f_i$  nicht von  $s$  abhängt, wäre somit  $(t^*, s^* + \epsilon)$  ebenfalls zulässige Minimalstelle von  $f$  und somit  $(t^*, s^*)$  nicht das Minimum mit dem größten Wert für  $s$ . Widerspruch zur Voraussetzung. Das bedeutet also nach Korollar 2.7, dass  $g_i$  sogar streng monoton in  $s$  sein muss. Wir können nun den Wert von  $t^*$  um  $\epsilon_1 > 0$  vergrößern und im Gegenzug  $s^*$  um  $\epsilon_2 \neq 0$  verändern, dass  $g_i(t^* + \epsilon_1, s^* + \epsilon_2) = 0$  bleibt und  $(t^* + \epsilon_1, s^* + \epsilon_2)$  immer noch im Inneren von  $I \times J$  liegt und die restlichen Nebenbedingungen erfüllt. Also ist  $(t^* + \epsilon_1, s^* + \epsilon_2)$  zulässig und  $f(t^* + \epsilon_1) < f(t^*)$ , da  $f$  streng monoton fällt. Dies führt uns auf den Widerspruch, dass  $(t^*, s^*)$  Minimalstelle war.

Somit gibt es zulässige Punkte am Rand von  $I \times J$ , an denen sich auch eine Minimalstelle befinden muss, falls es überhaupt zulässige Punkte gibt. Wir überprüfen also lediglich, ob wir an den Rändern von  $I \times J$  eine zulässige Minimalstelle finden. Wir setzen zunächst  $t^* = a_I$  sowie  $t^* = b_I$  und prüfen jeweils, ob die Gleichung  $g_i(t^*, s) = 0$  eine Lösung  $s \in J$  besitzt (Diese Gleichung führt wieder auf ein Nullstellenproblem eines Polynoms vom Grad höchstens zwei und hat somit höchstens zwei Lösungen). Dann setzen wir  $s^* = a_J$  sowie  $s^* = b_J$  und ermitteln analog Lösungskandidaten durch Lösen der Gleichung  $g_i(t, s^*) = 0$ . Wir verwerfen die Lösungskandidaten, welche mindestens eine der anderen Nebenbedingungen  $g_j$  für  $j \in \{1, \dots, 5\}$  und  $j \neq i$  nicht erfüllt. Aus den ermittelten zulässigen Punkten wählen wir einen, der bezüglich  $f$  den kleinsten Funktionswert hat. Falls es keine gültigen Punkte geben sollte, dann könnte  $(t^*, s^*)$  im Inneren von  $I \times J$  liegen, was im nächsten Fall behandelt wird.

**Fall 3.** Angenommen mindestens zwei Nebenbedingungen  $g_i$  und  $g_j$  für  $i \neq j$  sind aktiv. In diesem Fall schließen sich bereits die Konstellationen  $i = 1, j = 2$  sowie  $i = 3, j = 4$  (oder  $i$  und  $j$  jeweils vertauscht) durch analytische und geometrische Betrachtungen aus. Angenommen es gilt  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ , wobei die obigen Konstellationen ausgeschlossen sind. Dann erhalten wir durch geeignete Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen  $g_i(t, s) = 0$  und  $g_j(t, s) = 0$  einen linearen Zusammenhang der Form

$$t = Xs + Y$$

für zwei Konstanten  $X, Y$  als Obermenge der Lösungsmenge. Es lässt sich einfach feststellen, ob es eine Schnittmenge dieser Geraden mit der Rechteckmenge  $I \times J$  gibt. Falls es diese gibt, muss zudem die Gleichung

$$\sqrt{A(Xs + Y)^2 + B(Xs + Y) + C} = \sqrt{Ds^2 + Es + F} + Z$$

für eine Konstante  $Z$  gelten, welche wir umgekehrt durch geeignete Subtraktion bzw. Addition von  $g_i(t, s) = 0$  und  $g_j(t, s) = 0$  und nachfolgendem Eliminieren von  $t$  mit  $t = Xs + Y$  erhalten. Die Lösung dieser Gleichung führt auf ein Nullstellenproblem eines Polynoms vom Grad höchstens vier, ist also analytisch lösbar. Unter den Lösungen, die auch die anderen Nebenbedingungen erfüllen, wählen wir  $(t^*, s^*)$ , so dass  $t^*$  möglichst groß ist. Gibt es keine zulässigen Lösungen, müssen wir die nächste Möglichkeit untersuchen.

Ist  $i \in \{1, \dots, 4\}$  und  $j = 5$ , dann teilen wir die Gleichung  $g_5(t, s) = 0$  zunächst durch  $C_2$  und erhalten:

$$(\sqrt{Ds^2 + Es + F} \pm cs + \tilde{C}_1) \frac{\tilde{C}_2}{C_2} - \sqrt{At^2 + Bt + C} \pm at + C_1 = 0.$$

Wir addieren bzw. subtrahieren die Gleichung  $g_i(t, s) = 0$  auf die obige Gleichung, um den Wurzelterm in  $t$  zu eliminieren. Aufgelöst nach  $t$  erhalten wir den Zusammenhang

$$t = X\sqrt{Ds^2 + Es + F} + Ys + Z$$

für Konstanten  $X, Y, Z$  als Obermenge der Lösungsmenge. Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$s = \tilde{X}\sqrt{At^2 + Bt + C} + \tilde{Y}t + \tilde{Z}$$

für Konstanten  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ . Wir setzen eine der oberen Gleichungen in die andere ein, was uns nach Umformungen der Wurzeln wieder auf ein Polynom vierten Grades führt, da zweimaliges Quadrieren ausreicht, um alle Wurzeln zu entfernen. Wir erhalten somit wieder eine endliche Menge von Lösungen. Wir wählen  $(t^*, s^*)$  aus den möglichen Lösungen, so dass  $t^*$  möglichst groß ist und die anderen Nebenbedingungen erfüllt sind.

Sollte es in den Fällen 1 bis 3 keine zulässige Lösung  $(s^*, t^*)$  geben, so kann es für diese Wahl von Kanten  $e, e'$  und Abschnitten  $A_i, A_j$  sowie von Funktionssegmenten  $\delta_{l_1}^1(t), \delta_{l_2}^2(s)$  insgesamt keinen Anbindungspunkt für die Feed-links an  $e, e'$  geben, so dass alle Nebenbedingungen erfüllt sind, da bereits zwei aktive Nebenbedingungen auf eine endliche Menge von zulässigen Lösungen führen, falls  $f$  nicht konstant ist. Fälle mit mehr als zwei aktiven Nebenbedingungen brauchen also nicht untersucht werden.

Wir behandeln noch den Fall das  $f$  konstant in  $t$  ist. Dann beschränkt sich das Minimierungsproblem auf das Finden zulässiger Punkte. Es folgt nach analytischer Betrachtung, dass in diesem Fall auch  $g_5$  konstant in  $t$  ist und dass entweder  $g_1$  und  $g_2$  konstant in  $t$  oder  $g_3$  und  $g_4$  konstant in  $t$  sind (je nachdem ob in  $f$  ein  $+$  oder ein  $-$  eingesetzt wird). Wir gehen davon aus, dass  $g_1$  und  $g_2$  konstant in  $t$  sind (der Fall, dass  $g_3$  und  $g_4$  konstant in  $t$  sind, geht ähnlich). Dann hängen also  $g_1$  und  $g_2$  genauso wie  $g_5$  nicht von  $t$  ab.

Wir lösen die quadratischen Nullstellenprobleme  $g_i(s) = 0$  für  $i = 1, 2, 5$ , welche höchstens zwei Lösungen haben. Aus diesen Lösungen bestimmen wir zulässige Mengen  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 5$ , für die  $g_i(s) \leq 0$  für  $s \in M_i$  ist, welche jeweils Vereinigungen von höchstens zwei Intervallen sind. In dem Schnitt  $M^* = M_1 \cap M_2 \cap M_5 \cap J$ , in dem  $g_i(s) \leq 0$  für  $s \in M^*$  und  $i = 1, 2, 5$  ist, suchen wir nun einen Punkt, welcher  $g_3(t, s) \leq 0$  und  $g_4(t, s) \leq 0$  erfüllt. Wir untersuchen zunächst alle Randpunkte von  $s' \in \partial M^*$ . Das sind endlich viele, da  $M^*$  ein Schnitt aus endlich vielen Intervallen ist. Haben die Gleichungen  $g_3(t, s') = 0$  und  $g_4(t, s') = 0$  (das sind wieder Nullstellenprobleme quadratischer Gleichungen) eine gemeinsame Lösung  $t'$ , so ist  $(t', s')$  ein zulässiger Punkt.

Falls sich ein zulässiger Punkt  $(t', s')$  im Inneren von  $M^*$  befindet, sind  $g_i$  für  $i = 1, 2, 5$  inaktiv. Die Funktion

$$y(t, s) := \sqrt{At^2 + Bt + C} - \sqrt{Ds^2 + Es + F} + at + cs$$

muss dann einen Wert  $y(t', s')$  im Intervall  $[C_6, -C_5]$  annehmen, damit  $g_3(t', s') \leq 0$  und  $g_4(t', s') \leq 0$  gilt. Sei  $(t_{min}, s_{min})$  der Punkt, an dem  $y$  sein globales Minimum, und  $(t_{max}, s_{max})$  der Punkt, an dem  $y$  sein globales Maximum annimmt. Ist  $y(t_{min}, s_{min}) \in [C_6, -C_5]$  oder  $y(t_{max}, s_{max}) \in [C_6, -C_5]$ , so ist  $(t_{min}, s_{min})$  oder  $(t_{max}, s_{max})$  ein zulässiger Punkt (falls  $(t_{min}, s_{min})$  bzw.  $(t_{max}, s_{max})$  nicht existiert, sei  $y(t_{min}, s_{min}) := -\infty$  bzw.  $y(t_{max}, s_{max}) := \infty$ ). Gilt allerdings  $y(t_{min}, s_{min}), y(t_{max}, s_{max}) < C_6$  oder  $y(t_{min}, s_{min}), y(t_{max}, s_{max}) > -C_5$ , so gibt es keinen zulässigen Punkt.

Falls andernfalls  $y(t_{min}, s_{min}) < C_6$  und  $y(t_{max}, s_{max}) > -C_5$  sind, muss  $y$  wegen der Stetigkeit nach dem Zwischenwertsatz alle Werte im Intervall  $[C_6, -C_5]$  annehmen. Um ein  $(t', s') \in I \times J$  mit  $y(t', s') \in [C_6, -C_5]$  zu finden, prüfen wir für die vier möglichen Kombinationen von  $t' \in \{a_I, b_I\}$  und  $s' \in \{a_J, b_J\}$ , ob diese die Aussage  $y(t', s') \in [C_6, -C_5]$  erfüllen. Sonst testen wir noch, ob für  $t' \in \{a_I, b_I\}$  die Gleichungen  $y(t', s) = C_6$  oder  $y(t', s) = -C_5$  Lösungen  $s' \in J$  haben (das sind wieder Nullstellenprobleme quadratischer Gleichungen) und analog ob für  $s' \in \{a_J, b_J\}$  die Gleichungen  $y(t, s') = C_6$  oder  $y(t, s') = -C_5$  Lösungen  $t' \in I$  haben. Für die erhaltenen Lösungen  $(t', s')$  prüfen wir durch Einsetzen in  $g_1, g_2, g_5$ , ob sie auch zulässig sind.

In der Anwendung prüfen wir zuerst, ob  $f$  konstant ist oder nicht. Ist  $f$  nicht konstant, so prüfen wir entsprechend dem Vorgehen aus Fall 1, ob es eine zulässige Minimalstelle  $(t^*, s^*)$  von  $f$  gibt, für die alle Nebenbedingungen inaktiv sind. Existiert sie, so brauchen die Fälle mit aktiven Nebenbedingungen nicht durchgespielt werden, da der Suchraum im Folgenden lediglich eingeschränkt wird und keine besseren Lösungen mehr gefunden werden können. Falls nicht, überprüfen wir ob es Lösungen für eine aktive Nebenbedingung gibt, indem wir jedes  $g_i$  einmal als aktiv annehmen und damit das in Fall 2 beschriebene Vorgehen anwenden. Ist eine zulässige Lösung gefunden, können wir das Verfahren abbrechen, da der Suchraum in Fall 3 wieder verkleinert wird. Falls dies jedoch wieder zu keiner zulässigen Lösung führt, testen wir, ob dies für zwei aktive Nebenbedingungen der Fall ist. Wir setzen dazu alle 2-Kombinationen ohne Wiederholung von je zwei der 5 Nebenbedingungen aktiv (außer den in Fall 3 ausgeschlossenen) und wenden das in Fall 3 beschriebene Vorgehen an. Ist  $f$  hingegen konstant, so wenden wir das für diesen Fall beschriebene Verfahren an.

Die Minimierung ist in konstanter Zeit möglich und liefert, falls sie existiert, eine Lösung  $(t^*, s^*) \in I \times J$ , aus welcher wir die optimale Platzierung  $q_1(t^*) = (1 - t^*)u_1 + t^*u_2$  und  $q_2(s^*) = (1 - s^*)u'_1 + s^*u'_2$  für die beiden Feed-links auf  $e$  bzw.  $e'$  für das gewählte Abschnittspaar  $A_i, A_j$  gewinnen können. Damit erhalten wir das folgende Lemma.

**Lemma 2.8.** *Seien  $P$  ein einfaches Polygon,  $p$  ein Punkt im Inneren von  $P$ ,  $s_1, \dots, s_k$  Punkte (Sites) auf dem Rand von  $P$ ,  $e, e'$  Kanten auf dem Rand von  $P$ , und  $A_i, A_j$  zwei Abschnitte auf dem Rand von  $P$ . Zwei bezüglich der resultierenden Streckung optimale Feed-links, die  $p$  und den Rand von  $P$  an den Kanten  $e$  bzw.  $e'$  verbinden und welche die Bedingungen  $m \in A_i$  und  $m' \in A_j$  einhalten, können in  $\mathcal{O}(k^2)$  Zeit berechnet werden.*

*Beweis.* Um zwei minimale Punkte  $q_1$  und  $q_2$  mit den geforderten Eigenschaften zu erhalten, führen wir das oben beschriebene Verfahren durch. Wir ermitteln also zunächst die obere Hülle aller Streckungsfunktionen  $\delta_l^1$  für  $s_l \in P(s_{j+1}, s_i)$  und ebenso die obere Hülle aller Streckungsfunktionen  $\delta_l^2$  mit  $s_l \in P(s_{i+1}, s_j)$ . Dies verursacht einen Zeitaufwand von  $\mathcal{O}(\lambda_4(k) \cdot \log k) = \mathcal{O}(k^2)$  [ASS89].

Nun kombinieren wir Funktionssegmente in den beiden oberen Hüllen miteinander und da jede der oberen Hüllen eine Komplexität von höchstens  $\lambda_2(k) = 2k - 1$  hat, erhalten wir höchstens  $\lambda_2(k)^2$  2-Kombinationen ohne Wiederholung. Für jede dieser Kombinationen führen wir das Minimierungsverfahren wie in den Fällen oben beschrieben durch und zwar jeweils für beide Streckungsfunktionen, die durch die beiden Funktionssegmente der Kombination repräsentiert werden. Da die Minimierung an sich nur einen konstanten Zeitaufwand verursacht, haben wir also einen Zeitaufwand von  $\mathcal{O}(\binom{\lambda_2(k)}{2}) = \mathcal{O}(k^2)$ . Falls unter den gegebenen Voraussetzungen keine zwei gültigen Feed-links existieren sollten, also die Minimierung für alle Kombinationen von Funktionssegmenten ergebnislos bleibt, wird kein Mehraufwand verursacht.  $\square$

Wir wiederholen das Verfahren für alle 2-Kombinationen von Abschnitten, sowie allen 2-Kombinationen von Kanten wie oben beschrieben und merken uns dabei stets den kleinsten aufgetretenen Wert für die Streckung nebst zugehöriger Feed-links. Da es  $\mathcal{O}\left(\binom{k}{2} \cdot \binom{n}{2}\right) = \mathcal{O}(k^2 \cdot n^2)$  mögliche Kombinationen gibt, hat dies nach Lemma 2.8 eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(k^4 \cdot n^2)$ . Das Verfahren liefert uns schließlich zwei Feed-links an den Rand von  $P$ , welche die Streckung bezüglich allen Punkten in  $S$  minimieren.

**Satz 2.9.** *Sei  $P$  ein einfaches Polygon mit  $n$  Knoten,  $p$  ein Punkt im Inneren von  $P$  und  $s_1, \dots, s_k$  Punkte (Sites) auf dem Rand von  $P$  welche ohne Einschränkung auf den Knoten von  $P$  liegen. Zwei bezüglich der resultierenden Streckung optimale Feed-links an den Rand von  $P$  können in  $\mathcal{O}(k^4 \cdot n^2)$  Zeit berechnet werden.*



## 2.2 Erweiterungen

Wie in [ABB<sup>+</sup>11] betrachten wir die Situation, in der sich Hindernisse  $R_1, \dots, R_h$ , dargestellt als Polygone mit zusammen  $b$  Knoten, in  $P$  befinden, welche nicht von den Feed-links gekreuzt werden dürfen. Feed-links sind in diesem Kontext kürzeste Pfade, welche  $p$  mit einem Punkt auf dem Rand von  $P$  verbinden, so dass keines der Hindernisse  $R_1, \dots, R_h$  gekreuzt wird, das heißt der Feed-link und das Innere der Polygone  $R_1, \dots, R_h$  eine leere Schnittmenge haben (siehe Abbildung 2.5).

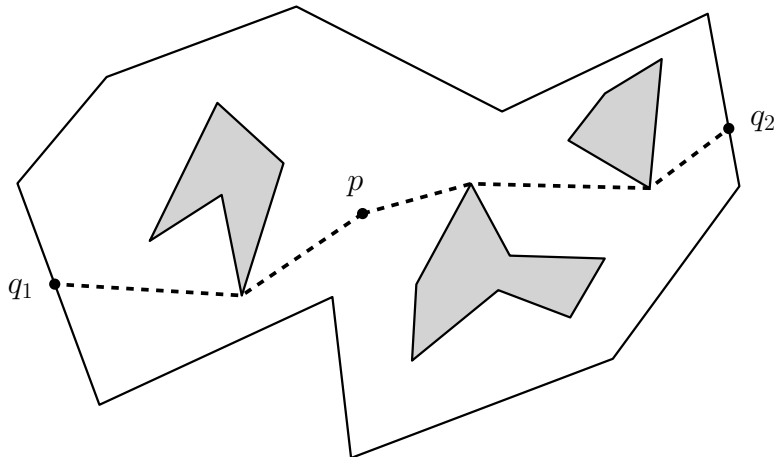


Abbildung 2.5: Abgebildet ist ein einfaches Polygon, in dem sich Hindernisse befinden, welche von Feed-links nicht gekreuzt werden dürfen. Kürzeste Feed-links, die  $p$  mit einem Punkt auf dem Rand von  $P$  verbinden, müssen also um Hindernisse herum geführt werden.

Das Vorgehen beschrieben in [ABB<sup>+</sup>11] benutzt den Algorithmus von Hershberger und Suri [HS99] angewendet auf  $p$  und  $R_1, \dots, R_h$ , um eine Zerlegung der Ebene in Zellen in  $\mathcal{O}(b \log b)$  zu erhalten, so dass kürzeste Pfade von Punkten einer Zelle zu  $p$  den ersten Knoten eines Hindernisses oder  $p$  gemeinsam haben. Wir "überlagern"  $P$  mit der erhaltenen Zerlegung der Ebene, das heißt wir trennen Kanten von  $P$  an den Grenzen der Zellen auf.

Alle Punkte einer Kante von  $P$  haben nach dieser Aufteilung den selben ersten Knoten (Ankerknoten) auf dem kürzesten Pfad zu  $p$  gemeinsam. Parametrisieren wir die Punkte dieser Kante mit einem Parameter  $t$  (bzw.  $s$ ) wie in Abschnitt 2.1, so ist die Entfernung zum Ankerknoten  $\sqrt{At^2 + Bt + C}$  für geeignete Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Die gesamte Weglänge ist dann  $\sqrt{At^2 + Bt + C} + \bar{C}$ , wobei  $\bar{C}$  die Länge des Weges vom Ankerknoten zu  $p$  darstellt, welche auch vom Algorithmus von Hershberger und Suri berechnet wird.

Das bedeutet, dass sich die Form der Streckung  $\delta_l^1(t)$  einer Site  $s_l \in S$  über den Feed-link an  $q_1$  aus Lemma 2.5 in seiner grundsätzlichen analytischen Form nicht ändert. Auch die Aussagen von Lemma 2.6 und Korollar 2.7 ändern sich nicht. Das selbe gilt natürlich auch für die Streckung  $\delta_l^2(t)$  einer Site  $s_l \in S$  über den Feed-link an  $q_2$ . Somit lassen sich zwei bezüglich der optimalen Streckung optimale Feed-links mit dem selben Verfahren berechnen, das wir für den Fall ohne Hindernisse angegeben haben. Wir erhalten folgenden Satz.

**Satz 2.10.** *Sei  $P$  ein einfaches Polygon,  $p$  ein Punkt im Inneren von  $P$ ,  $s_1, \dots, s_k$  Punkte (Sites) auf dem Rand von  $P$  und  $R_1, \dots, R_h$  Hindernisse in  $P$  mit zusammen  $b$  Knoten, welche nicht von Feed-links gekreuzt werden dürfen. Zwei bezüglich der resultierenden Streckung optimale Feed-links an den Rand von  $P$  können in  $\mathcal{O}(k^4 \cdot n^2 + b \log b)$  Zeit berechnet werden.*



### 3. Feed-link Problem in rektilinearen Polygonen zur $L_1$ -Metrik

Im folgenden Kapitel werden wir die Fragestellung optimaler Feed-links abändern, indem wir rektilineare, einfache Polygone und rektilineare Feed-links fordern, das heißt sowohl Feed-links als auch das Polygon  $P$  bestehen aus lediglich horizontalen oder vertikalen Kanten. Die Streckung werden wir dabei mit der  $L_1$ -Metrik (Manhattan-Metrik) statt der Euklid-Metrik messen, so wie im Folgenden definiert. Man kann sich das gegebene Szenario als Netzwerk-Erweiterungsproblem vorstellen, bei dem das Netzwerk auf einem rektilinearen, nicht notwendigerweise äquidistanten Gitter verläuft.

#### 3.1 Mehrere optimale Feed-Links

Wir betrachten nun die Streckung bezüglich der  $L_1$ -Norm  $\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$  für einen Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und der dazugehörigen Metrik. Gegeben sei dazu zunächst ein rektilineares, einfaches Polygon  $P$ , d.h. ein Polygon mit lediglich horizontalen oder vertikalen Kanten und  $n$  Knoten, ein Punkt  $p$  im Inneren von  $P$ , dabei entspreche  $p$  ohne Einschränkung dem Ursprung  $(0, 0)$ , sowie eine Menge von  $k$  paarweise verschiedenen Punkten  $S = \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  auf dem Rand von  $P$ .

Wir suchen  $m$  rektilineare Feed-links, also Verbindungen von  $p$  mit dem Rand von  $P$ , bestehend aus Wegen von lediglich horizontalen oder vertikalen Kanten und einer Länge, die gerade der  $L_1$ -Distanz von  $p$  zum entsprechenden Anbindungspunkt entspricht, so dass die resultierende Streckung bezüglich der  $L_1$ -Metrik minimal wird. In diesem Kapitel sei die Streckung bezüglich der  $L_1$ -Metrik dann wie folgt definiert.

**Definition 3.1.** Gegeben sei eine Menge von  $m$  Feed-links die  $p$  mit dem Rand von  $P$  an den Punkten  $q_0, \dots, q_{m-1}$  verbinden. Wir definieren die Streckung einer Site  $s_j$ ,  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  über den Feedlink an  $q_i$ ,  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  als

$$\delta_i(s_j) := \frac{\|p - q_i\|_1 + bdl(q_i, s_j)}{\|p - s_j\|_1}.$$

Die Streckung der Site  $s_j$  (über einen beliebigen Feedlink) sei definiert durch

$$\delta(s_j) := \min_{i=0, \dots, m-1} \delta_i(s_j).$$

Die Streckung aller Sites  $s_1, \dots, s_k$  sei dann definiert als

$$\delta := \max_{j=0, \dots, k-1} \delta(s_j).$$

Anders als im euklidischen Fall sind nicht alle Positionen am Rand von  $P$  als Anbindungspunkte für Feed-links sinnvoll. Wir zeigen im Folgenden, dass wir eine Menge von Kandidaten  $C = \{c_0, \dots, c_{l-1}\}$  angeben können, die als Anbindungspunkte für Feed-links ausreichend sind, um die minimale Streckung mit Feed-links zu erreichen, wie wir anhand von Abbildung 3.1 erkennen können.

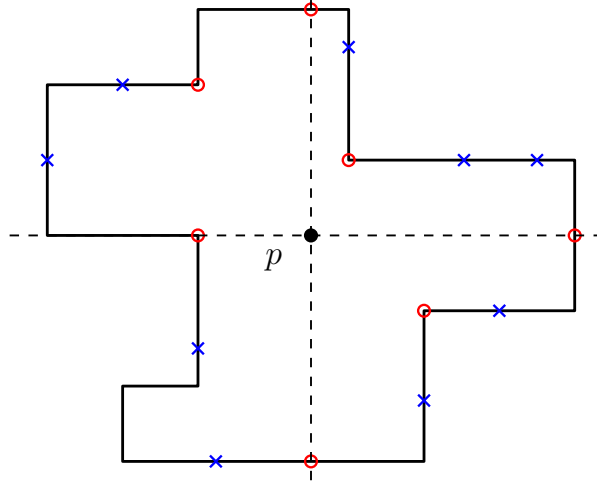


Abbildung 3.1: Wir sehen ein rektilineares Polygon und eine Menge von Sites (blaue Kreuze). Die Menge der eingezeichneten Kandidaten (rote Kreise) reichen als Verbindungspunkte für Feed-links, um minimale Streckung zu erreichen.

Zunächst stellen wir dabei fest, dass es für alle Sites auf einer Kante im Sinne der Streckung mindestens genau so günstig (evtl. sogar besser) ist den Feed-link an dem Knoten anzubinden, der näher an  $p$  liegt, als an irgendeinem anderen Punkt auf der Kante. Wir trennen Kanten an ihren Schnittpunkten mit dem Achsenkreuz (falls vorhanden) auf. Damit verdoppelt sich im schlimmsten Fall die Knotenzahl, da jede Kante nur höchstens einmal aufgeteilt werden kann.

Wir nennen Kanten, die bei Ablaufen des Randes von  $P$  im Uhrzeigersinn von  $p$  wegführen, das heißt deren  $L_1$ -Distanz dabei größer wird, *steigend*, sonst *fallend* (durch die Auftrennung der Kanten an den Achsenschnittpunkten, gibt es nur eindeutig steigende oder fallende Kanten). Wir nennen eine Menge von steigenden (fallenden) Kanten von  $P$ , welche im Uhrzeigersinn direkt aufeinanderfolgen, eine steigende (fallende) Folge von  $P$  und zeigen das folgende Lemma.

**Lemma 3.2.** *Gegeben sei eine steigende (fallende) Folge eines rektilinearen, einfachen Polygons  $P$  mit einem Punkt  $p$  im Inneren von  $P$ . Falls wir einen Feed-link an dem näher an  $p$  liegenden Endpunkt der im Uhrzeigersinn ersten (letzten) Kante der Folge anbinden, dann ist die Streckung für alle Sites  $s \in S$  höchstens genauso groß, wie wenn wir den Feed-link an einem beliebigen anderen Punkt der Kanten-Folge anbinden.*

*Beweis.* Sei  $e$  eine steigende Kante und  $s \in S$  eine Site. Sei  $q$  der Endpunkt von  $e$ , welcher näher an  $p$  liegt. Falls im ersten Fall die Netzwerkdistanz von  $p$  über den Rand von  $P$  zu

$s$  über einen Feed-link am Anbindungspunkt  $q_i$  im Uhrzeigersinn mindestens so kurz wie gegen den Uhrzeigersinn ist, dann bleiben die Distanzen über die Netzwerke gleich, also

$$\|p - q_i\|_1 + \text{bdl}(q_i, s) = \|p - q\|_1 + \text{bdl}(q, s)$$

wenn wir  $q_i$  startend bei  $q$  auf  $e$  von  $p$  wegbewegen (wir uns also auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn bewegen), falls wir dabei  $s$  nicht überschreiten (siehe Abbildung 3.2). Damit bleibt auch die Streckung  $\delta_i(s)$  über einen Feed-link an  $q_i$  gleich der Streckung von  $s$  mit einem Feed-link an  $q$ . Falls wir  $s$  überschreiten, müssen wir einen Umweg über den Feed-link an  $q_i$  gegenüber einem Feed-link an  $q$  in Kauf nehmen, wodurch die Streckung für  $s$  größer wird (siehe zweiter Fall).

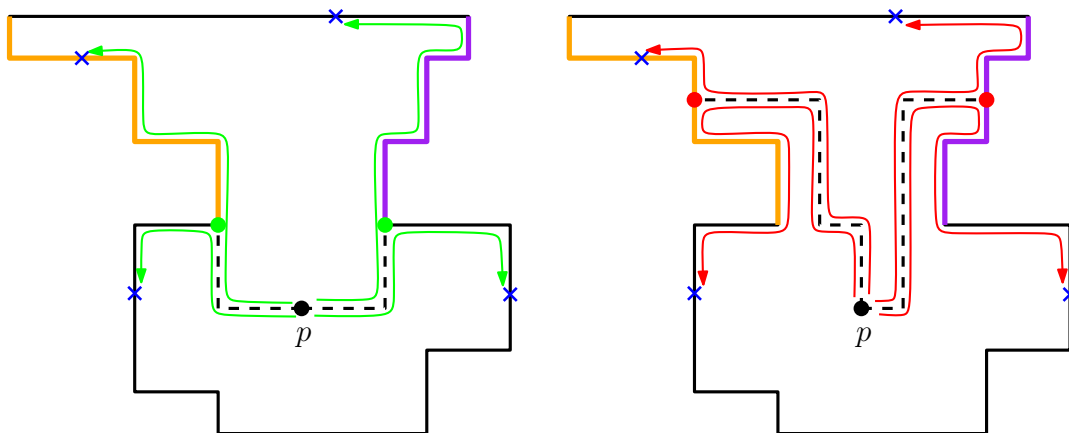
Falls im zweiten Fall die Netzwerkdistanz von  $p$  über den Rand von  $P$  zu  $s$  über einen Feed-link am Anbindungspunkt  $q_i$  im Uhrzeigersinn länger als gegen den Uhrzeigersinn ist, gilt

$$\|p - q_i\|_1 + \text{bdl}(q_i, s) > \|p - q\|_1 + \text{bdl}(q, s)$$

das heißt dann wird die Streckung von  $s$  über einen Feed-link an  $q_i$  größer, wenn wir  $q_i$  startend bei  $q$  auf  $e$  von  $p$  wegbewegen. Damit hat  $s$  eine größere Streckung  $\delta_i(s)$  für einen Feed-link an  $q_i$  als für einen an  $q$ .

Für eine steigende Folge von  $P$  gilt mit ähnlicher Argumentation, dass  $s$  für den näher an  $p$  liegende Endpunkt  $q$ , der im Uhrzeigersinn ersten Kante der Folge, für  $q_i = q$  die kleinste Streckung  $\delta_i(s)$  hat (siehe Abbildung 3.2).

Aus Symmetrie-Gründen gilt die Aussage auch für fallende Folgen von  $P$  (zum Beispiel durch Spiegelung des Polygons an der Y-Achse).  $\square$



(a) Feed-link bindet an den ersten (letzten) Punkt der steigenden (fallenden) Folge an.

(b) Feed-link bindet an irgend einen Punkt der steigenden (fallenden) Folge an.

Abbildung 3.2: In  $P$  markiert ist jeweils in (a) und (b) eine steigende Folge (orange) und eine fallende Folge (lila). Für Feed-links an beliebigen Punkten der Folgen (rote Punkte, siehe (b)) ist die Netzwerk-Distanz (rote Pfeile) zu Sites auf dem Rand von  $P$  (blaue Kreuze) genauso hoch oder höher wie die Netzwerk-Distanz (grüne Pfeile) für Feed-links an den zu  $p$  nächsten Punkten der Folgen (grüne Punkte, siehe (a)).

**Korollar 3.3.** Für eine fallende Folge, auf die im Uhrzeigersinn direkt eine steigende Folge folgt, ist die Streckung aller Sites auf dem Rand von  $P$ , für einen Feed-link, der am gemeinsamen Punkt zwischen den beiden Folgen anbindet, höchstens so groß, wie für einen Feed-link an einem beliebigen anderen Punkt einer der beiden Folgen.

Wir geben folgende Berechnungsvorschrift zur Bestimmung einer Menge  $C$  von Kandidaten an, welche als Anbindungspunkte zum Erreichen der minimalen Streckung ausreichen. Zunächst trennen wir Kanten an den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen auf. Wir iterieren dann die Kanten von  $P$  im Uhrzeigersinn. Wir nehmen jeden Punkt in die Menge  $C$  auf, welcher im Uhrzeigersinn letzter Punkt einer fallenden und erster Punkt einer steigenden Kante ist.

**Lemma 3.4.** *Für ein rektilineares, einfaches Polygon  $P$  mit  $n$  Knoten können wir eine Menge von Kandidaten  $C$  mit  $|C| \leq n$ , welche als Anbindungspunkte für Feed-links ausreichend sind, um die minimale Streckung zu erreichen, mit einem Zeitaufwand von  $\mathcal{O}(n)$  berechnen.*

*Beweis.* Die beschriebene Berechnungsvorschrift liefert gerade die Punkte, die zwischen fallenden und im Uhrzeigersinn direkt darauffolgenden steigenden Folgen von  $P$  liegen. Diese sind nach Korollar 3.3 bezüglich der Streckung aller Sites mindestens genauso gut wie alle anderen Punkte der beiden Folgen, wodurch wir eine gültige Menge von Kandidaten erhalten.

Da höchstens jeder zweite Knoten von  $P$  in  $C$  enthalten sein kann und wir höchstens  $2n$  Knoten haben (im schlimmsten Fall haben wir jede Kante einmal halbiert), ist  $|C| \leq n$ . Die Laufzeit von  $\mathcal{O}(n)$  ergibt sich leicht, da die Knoten nach der Reihenfolge ihres Auftretens auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn sortiert vorliegen müssen (die Struktur von  $P$  muss durch eine Sortierung der Knoten gegeben sein) und da wir bei den Iterationsschritten über die Knoten jeweils einen konstanten Zeitaufwand haben. Auch das Teilen der Kanten an den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen geht in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit.  $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun den folgenden naiven, kombinatorischen Ansatz für die Bestimmung einer Menge von  $m$  Feed-links mit minimaler resultierender Streckung angeben. Gegeben sei eine Menge von Kandidaten  $C = \{c_0, \dots, c_{l-1}\}$  entsprechend Lemma 3.4. Wir berechnen  $\mu(c_0, s_j)$ ,  $\|p - s_j\|_1$  für  $j = 0, \dots, k-1$  und  $\mu(c_0, c_i)$ ,  $\|p - c_i\|_1$  für  $i = 0, \dots, l-1$  vor (die Speicherung benötigt  $\mathcal{O}(k+n)$  Platz). Damit können wir jede beliebige Netzwerkdistanz eines Punktes  $q_1 \in S \cup C$  zu jedem anderen Punkt  $q_2 \in S \cup C$  einfach wie folgt berechnen:

$$\mu(q_1, q_2) = \begin{cases} \mu(c_0, q_2) - \mu(c_0, q_1), & \text{falls } \mu(c_0, q_2) \geq \mu(c_0, q_1) \\ \mu(P) + \mu(c_0, q_2) - \mu(c_0, q_1), & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir berechnen nun für eine  $m$ -Kombination (ohne Wiederholung)  $(c_{i_1}, \dots, c_{i_m})$  über  $C$  die Streckung  $\delta$  von  $P$  für hypothetische Feed-links, die an den Kandidaten der  $m$ -Kombination anbinden. Dazu bestimmen wir zunächst die Streckung  $\delta_{i_t}(s_j)$  für eine Site  $s_j$  bezüglich eines Feed-links, der an  $c_{i_t}$  anbindet, für  $t = 1, \dots, m$  und  $j = 0, \dots, k-1$  aus den vorberechneten Daten. Daraus erhalten wir die Streckung  $\delta$  von  $P$  gemäß Definition 3.1. Wir wiederholen diesen Vorgang für jede  $m$ -Kombinationen (ohne Wiederholung) über  $C$ , um die  $m$ -Kombinationen zu ermitteln, welche die kleinste Streckung  $\delta$  von  $P$  induziert.

**Satz 3.5.** *Für ein rektilineares, einfaches Polygons  $P$  mit  $n$  Knoten und einem Punkt  $p$  im Inneren von  $P$ , sowie  $k$  Sites auf dem Rand von  $P$  lässt sich eine Menge von  $m$  rektilinearen Feed-links, welche die Streckung bezüglich der  $L_1$ -Metrik minimieren, in  $\mathcal{O}(m \cdot k \cdot \binom{n}{m})$  berechnen.*

*Beweis.* Die Korrektheit ist bei diesem naiven Ansatz klar. Nach Lemma 3.4 können wir eine Menge  $C$  von Kandidaten mit  $|C| \leq n$  in  $\mathcal{O}(n)$  bestimmen. Die Vorberechnung geht

in  $\mathcal{O}(n + k)$ . Zu einer gegebenen  $m$ -Kombinationen (ohne Wiederholung)  $(c_{i_1}, \dots, c_{i_m})$  über  $C$  geht die Bestimmung eines  $\delta_{i_t}(s_j)$  für  $t = 1, \dots, m$  und  $j = 0, \dots, k - 1$  dank der Vorberechnung der Distanzen in konstanter Zeit, weshalb wir einen Aufwand von  $\mathcal{O}(n \cdot k)$  für die Berechnung von allen  $\delta_{i_t}(s_j)$  haben. Da die Anzahl der  $m$ -Kombinationen über  $C$  gerade  $\binom{l}{m}$  ist, gilt wegen  $l \leq n$  die Aussage.  $\square$

Aus Satz 3.5 erhält man einen Polynomialzeit-Algorithmus, falls die Anzahl der Feed-links  $m$  konstant ist. Zum Beispiel ist die Laufzeit für die Berechnung von  $m = 2$  Feed-links mit dem oben genannten Algorithmus  $\mathcal{O}(k \cdot n^2)$  und  $\mathcal{O}(k \cdot n^m)$  für beliebiges aber festes  $m$ .

## 3.2 Ein optimaler Feed-Link in Linearzeit

Wir zeigen, dass das Feed-link Problem mit lediglich einem Feed-link in einem rektilinearen Polygon und  $L_1$ -Metrik in Linearzeit lösbar ist. Wir nutzen dazu eine Datenstruktur, welche die mehrfache Betrachtung von Sites beim Ermitteln von deren Streckungen vermeidet. Auf Basis dieser Datenstruktur geben wir dann einen Algorithmus an, welcher in der Lage ist die gegebene Problemstellung in Linearzeit zu lösen.

### 3.2.1 Vorbereitung

Gegeben sei ein rektilineares, einfaches Polygon  $P$  mit  $n$  Knoten einem Punkt  $p$  im Inneren von  $P$  und  $k \geq 2$  Zielpunkten (Sites)  $S = \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  auf dem Rand von  $P$ . Die Knoten und Sites auf dem Rand von  $P$  seien dabei nach der Reihenfolge ihres Auftretens auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn sortiert. Seien  $C = \{c_0, \dots, c_{l-1}\}$  die Kandidaten von  $P$  wie in Abschnitt 3.1. Sei ohne Einschränkung  $c_0$  der Kandidat, auf den im Uhrzeigersinn direkt  $s_0$  folgt.

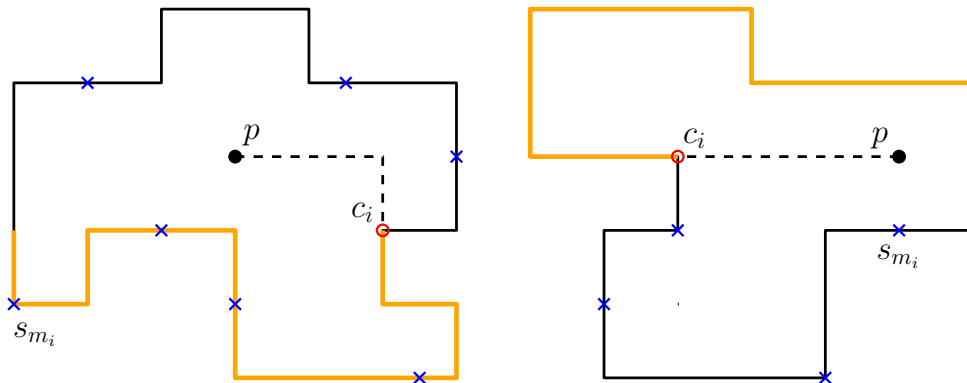


Abbildung 3.3: Wir sehen die zwei Fälle für den Index  $m_i$ , welcher entweder der Bedingung 3.1 (links) oder 3.2 (rechts) genügen muss. Der orange markierte Teil des Randes von  $P$  entspricht dabei der "Hälfte" des Randes von  $P$  von  $c_i$  aus. Gilt Bedingung 3.1 so existieren Sites (blaue Kreuze), die auf dieser "Hälfte" liegen, was nicht der Fall ist wenn Bedingung 3.2 gilt.

Wir sind zunächst an der Site  $s \in S$  interessiert, welche unter allen Sites auf dem Teil des Randes von  $P$ , dessen Punkte im Uhrzeigersinn nicht mehr als  $\frac{\mu(P)}{2}$  von  $c_i$  entfernt sind, also auf der "Hälfte" des Randes von  $P$  von  $c_i$  aus liegen, die größte Entfernung im Uhrzeigersinn ausgehend von  $c_i$  hat. Falls keine Site auf dieser "Hälfte" existiert, suchen wir die Site  $s$ , welche die kleinste Entfernung im Uhrzeigersinn ausgehend von  $c_i$  hat (siehe

Abbildung 3.3). Sei dazu  $m_i \in \{0, \dots, l-1\}$  so definiert, dass gilt

$$\begin{aligned} & \exists s \in S : \mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2} \\ \text{und} \quad & s_{m_i} = \arg \max_{s \in S, \mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}} \mu(c_i, s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Oder

$$\begin{aligned} & \forall s \in S : \mu(c_i, s) > \frac{\mu(P)}{2} \\ \text{und} \quad & s_{m_i} = \arg \min_{s \in S} \mu(c_i, s) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Genügt  $s_{m_i}$  der Bedingung 3.1, stellt  $s_{m_i}$  also die Site dar, die unter allen Sites, die von  $c_i$  aus über den Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn kürzer erreichbar sind als gegen den Uhrzeigersinn, am weitesten von  $c_i$  entfernt ist. Falls kein  $m_i$  existiert, das der Bedingung 3.1 genügt (das ist der Fall wenn für alle Sites der Weg gegen den Uhrzeigersinn von  $c_i$  aus über den Rand von  $P$  kürzer ist als der im Uhrzeigersinn), ist  $m_i$  der Index der ersten Site, die im Uhrzeigersinn über den Rand von  $P$  auf  $c_i$  folgt, welchen wir im Folgenden mit  $f_i$  bezeichnen. Dieser Index genügt dann Bedingung 3.2. Für alle  $s \in S$  mit  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt dann, dass  $s \in P(c_i, s_{m_i})$  ist.

Der iterative Algorithmus 1 berechnet  $m_i$  mit Kenntnis von  $m_{i-1}$  und  $f_i$ . Wir nehmen an, dass die  $f_i, i = 0 \dots l-1$  lokal gespeichert vorliegen, denn deren Vorberechnung ist leicht in  $\mathcal{O}(n+k)$  möglich.

---

**Algorithmus 1:** calculateMiddle

---

**input** : Index  $m_{i-1}$

**output** : Index  $m_i$ , welcher entweder Bedingung 3.1 oder 3.2 genügt.

```

1  $m_i \leftarrow f_i$ 
2 if  $\mu(c_i, s_{f_i}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  then
3   if  $\mu(c_i, s_{m_{i-1}}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  then
4      $m_i \leftarrow m_{i-1}$ 
5   while  $\mu(c_i, s_{(m_i+1) \bmod k}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  and  $(m_i + 1 \bmod k) \neq f_i$  do
6      $m_i \leftarrow m_i + 1 \bmod k$ 
7 return  $m_i$ 

```

---

**Lemma 3.6.** Für ein rektilineares, einfaches Polygon  $P$  mit  $n$  Knoten und einem Punkt  $p$  im Inneren von  $P$  und  $k \geq 2$  Sites auf dem Rand von  $P$ , die nach der Reihenfolge ihres Auftretens im Uhrzeigersinn auf dem Rand von  $P$  sortiert sind, lassen sich  $m_0, \dots, m_{l-1}$  in  $\mathcal{O}(n+k)$  ermitteln.

*Beweis.* Wir rufen die Operation `calculateMiddle`, beschrieben in Algorithmus 1, in einer Schleife auf, um alle  $m_i$  für  $i = 1, \dots, l-1$  iterativ zu berechnen, wobei wir einmalig  $m_0$  in  $\mathcal{O}(k)$  Zeit vorberechnen. Wir zeigen die Korrektheit des Algorithmus 1, woraus wir induktiv die Korrektheit aller  $m_i$  für  $i = 0, \dots, l-1$  erhalten.

Falls  $\mu(c_i, f_i) > \frac{\mu(P)}{2}$  ist, muss  $f_i$  offensichtlich Bedingung 3.2 genügen und wir können  $f_i$  zurückgeben. Ist  $\mu(c_i, f_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ , gibt es ein  $m_i$ , welches Bedingung 3.1 erfüllt, da zumindest  $f_i$  die Bedingung  $\mu(c_i, f_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  erfüllt. In diesem Fall iteriert Algorithmus 1 in Zeile 5 solange Sites  $s$  im Uhrzeigersinn von  $f_i$  bzw.  $s_{m_{i-1}}$  aus, bis die Bedingung



$\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  nicht mehr gilt oder wenn die nächste Site im Uhrzeigersinn wieder  $f_i$  wäre (letzteres passiert wenn es kein  $s \in S$  gibt, für das  $\mu(c_i, s) > \frac{\mu(P)}{2}$  ist). Der Index der Site vor  $s$  erfüllt dann Bedingung 3.1 und wird zurückgegeben.

Die Berechnung der  $m_i$  geht in  $\mathcal{O}(n+k)$  Zeit, was wir im Folgenden zeigen. Falls  $\mu(c_i, f_i) > \frac{\mu(P)}{2}$  ist, ist nichts weiter zu tun als  $f_i$  zurückzugeben, was lediglich einen konstanten Zeitaufwand verursacht. Falls  $\mu(c_i, f_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  ist, iterieren wir solange über die Sites, bis wir diejenige gefunden haben, die Bedingung 3.1 genügt. Die Suche wird dabei bei  $s_{m_{i-1}}$  fortgesetzt, bzw. im Uhrzeigersinn hinter  $s_{m_{i-1}}$  bei  $f_i$ .

Wir laufen also den Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn von  $c_0$  bis  $c_{l-1}$  ab und von  $c_{l-1}$  noch einmal höchstens  $\frac{\mu(P)}{2}$  auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn weiter, machen also höchstens eine und eine halbe Umdrehung im Uhrzeigersinn auf dem Rand von  $P$ . Da wir die Suche nach  $m_i$  frühestens beim Index  $m_{i-1} + 1 \pmod k$  fortsetzen, bei welchem wir im vorigen Iterationsschritt mit der Suche aufgehört haben, wird jede Site höchstens zwei mal betrachtet. Insgesamt betrachten wir in allen Aufrufen von `calculateMiddle` also höchstens  $\mathcal{O}(k)$  Sites und da `calculateMiddle` in einer Schleife genau  $l-1$  mal aufgerufen werden muss, ist wegen  $l \in \mathcal{O}(n)$  die Gesamtlaufzeit aller  $l-1$  Aufrufe von `calculateMiddle` zur Berechnung der  $m_i$  in  $\mathcal{O}(n+k)$ .  $\square$

Wir definieren für  $s_j, j = 0 \dots k-1$

$$\delta_i^{cw}(s_j) := \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j)}{\|p - s_j\|_1}.$$

Das ist die Streckung von  $s_j$  im Uhrzeigersinn (clockwise) mit einem hypothetischen Feed-link an  $c_i$ , die man erhält, wenn man bei der normalen Definition der Streckung lediglich die Netzwerkdistanz im Uhrzeigersinn berücksichtigt. Analog dazu definieren wir die Streckung gegen den Uhrzeigersinn (counterclockwise)

$$\delta_i^{ccw}(s_j) := \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(s_j, c_i)}{\|p - s_j\|_1}.$$

Es gilt der Zusammenhang  $\delta_i(s_j) = \max\{\delta_i^{cw}(s_j), \delta_i^{ccw}(s_j)\}$  für die Streckung einer Site  $s_j$ .

Aus Symmetrie-Gründen betrachten wir zunächst nur die Streckung im Uhrzeigersinn.

**Lemma 3.7.** *Sei  $s \in S$  eine Site, die auf einer steigenden Folge liegt und im Uhrzeigersinn die erste Site auf dieser Folge. Dann gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, l-1\}$  und für alle weiteren Sites  $s' \in S$  mit  $s' \neq s$ , die sich auf derselben steigenden Folge befinden, dass  $\delta_i^{cw}(s) \geq \delta_i^{cw}(s')$  ist.*

*Beweis.* Entsprechend Abschnitt 3.1 gilt für ein  $i'$ , dass  $c_{i'}$  derjenige Kandidat ist, der sich im Uhrzeigersinn am Anfang der steigenden Folge befindet. Es gilt der Zusammenhang  $\mu(c_{i'}, s^*) = \|c_{i'} - s^*\|_1$  für alle Sites  $s^* \in S$  auf der steigenden Folge. Außerdem muss sich  $c_{i'}$  in dem (evtl. entarteten) Rechteck befinden, welches durch die Ecken  $p$  und  $s^*$  definiert wird, denn sonst müsste die betrachtete steigende Folge fallende Kanten enthalten. Deshalb gilt auch der Zusammenhang

$$\|p - s^*\|_1 = \|p - c_{i'}\|_1 + \|c_{i'} - s^*\|_1$$

und damit

$$\|p - s^*\|_1 = \|p - c_{i'}\|_1 + \mu(c_{i'}, s^*).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\delta_i^{cw}(s) &= \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s)}{\|p - s\|_1} \\ &= \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, c_{i'}) + \mu(c_{i'}, s)}{\|p - c_{i'}\|_1 + \mu(c_{i'}, s)} \\ &= \frac{\Delta + \|p - c_{i'}\|_1 + \mu(c_{i'}, s)}{\|p - c_{i'}\|_1 + \mu(c_{i'}, s)} \\ &= \frac{\Delta + C_1}{C_1},\end{aligned}$$

für  $\Delta := \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, c_{i'}) - \|p - c_{i'}\|_1$  und  $C_1 := \|p - c_{i'}\|_1 + \mu(c_{i'}, s)$ . Analog gilt

$$\delta_i^{cw}(s') = \frac{\Delta + C_2}{C_2},$$

für  $C_2 := \|p - c_{i'}\|_1 + \mu(c_{i'}, s')$ . Nach Voraussetzung gilt  $\mu(c_{i'}, s) < \mu(c_{i'}, s')$  und somit ist  $C_1 < C_2$ . Wegen der Dreiecksungleichung ist  $\Delta \geq 0$  und somit gilt  $C_2\Delta \geq C_1\Delta$  mit Gleichheit nur für  $\Delta = 0$ . Es folgt die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned}C_2\Delta &\geq C_1\Delta \\ \iff C_2\Delta + C_1C_2 &\geq C_1\Delta + C_1C_2 \\ \iff \frac{\Delta + C_1}{C_1} &\geq \frac{\Delta + C_2}{C_2}.\end{aligned}$$

□

Da wir im Folgenden lediglich an dem Maximum der Streckung im Uhrzeigersinn  $\delta_i^{cw}(s)$  aller Sites  $s \in S$  interessiert sind, folgt aus Lemma 3.7, dass die Sites, die auf einer steigenden Folge liegen und dabei nicht der ersten Site auf dieser steigenden Folge entsprechen, weggelassen werden können, da die maximale Streckung für jeden Feed-link an einem der Kandidaten in  $C$  gleich bleibt.

Deshalb werden wir alle diese Sites (in  $\mathcal{O}(k+l)$ ) entfernen, um im Folgenden unangenehme Ausnahmefälle zu vermeiden. Wir nehmen deshalb ab jetzt an, dass es keine Site  $s_j \in \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  gibt, die auf einer steigenden Folge liegt und die im Uhrzeigersinn nicht die erste Site auf dieser steigenden Folge ist.

Zur bequemerem Behandlung setzen wir im Folgenden  $\delta_i^{cw}(\perp) = \delta_i^{ccw}(\perp) := 0$ , wobei  $\perp = s_\perp$  das leere Element darstellen soll. (Jegliche Vergleiche mit  $\perp$  werden wir in Zukunft mit falsch auswerten).

**Definition 3.8.** Sei  $w_i$  der Index derjenigen Site mit der größten Streckung im Uhrzeigersinn unter allen Sites  $s \in S$  mit  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  bei einem hypothetischen Feed-link an  $c_i$ . Das heißt für alle  $s \in S$  gilt  $\delta_i^{cw}(s_{w_i}) \geq \delta_i^{cw}(s)$ . Falls  $s_{w_i}$  nicht eindeutig ist, sei  $w_i$  der Index aus den in Frage kommenden Sites, welcher die größte Entfernung von  $c_i$  im Uhrzeigersinn hat. Falls keine Sites  $s \in S$  mit  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  existieren, also  $m_i$  der Bedingung 3.1 nicht genügt, sei  $w_i := \perp$ .

Wir bezeichnen einen Index  $j$  als  $i$ -gültig, falls für diesen  $s_j \in P(s_{w_i}, s_{m_i}) \setminus \{s_{w_i}\}$  und  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt. Ein Index  $j$  ist also  $i$ -gültig, wenn  $s_j$  im Uhrzeigersinn auf dem Rand von  $P$  höchstens  $\frac{\mu(P)}{2}$  von  $c_i$  entfernt ist und  $s_j$  sich im Uhrzeigersinn hinter  $w_i$  befindet.

Ist  $j$   $i$ -gültig, dann gilt, dass  $\|p - s_j\|_1 > \|p - w_i\|_1$  ist, denn da  $s_j \in P(s_{w_i}, s_{m_i}) \setminus \{s_{w_i}\}$  ist, muss  $\mu(c_i, s_j) > \mu(c_i, w_i)$  sein. Wenn nämlich  $\|p - s_j\|_1 \leq \|p - w_i\|_1$  wäre, dann wäre  $j = w_i$  entsprechend Definition 3.8, da  $s_j$  eine größere Streckung als  $s_{w_i}$  hätte. Widerspruch.

Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle der gegenseitigen Lage von  $c_{i-1}$  und  $c_i$  (Siehe Abbildung 3.4).

$$\begin{aligned} \text{Fall A: } \mu(c_{i-1}, c_i) &\leq \frac{\mu(P)}{2} \\ \text{Fall B: } \mu(c_{i-1}, c_i) &> \frac{\mu(P)}{2}. \end{aligned}$$

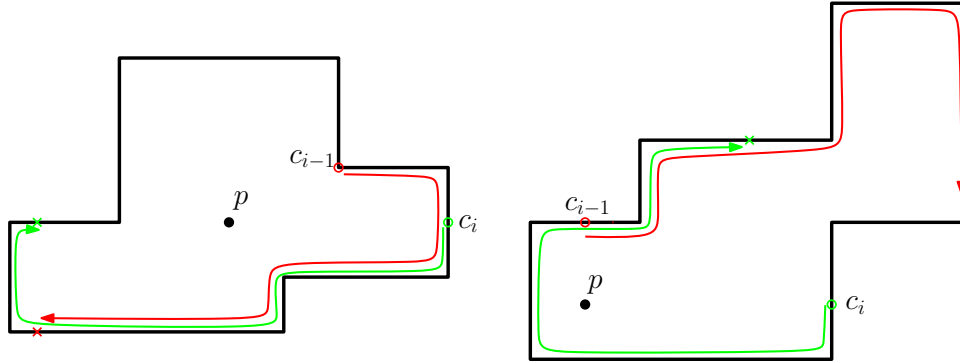


Abbildung 3.4: Zu sehen sind Beispiele für die zwei möglichen Fälle der gegenseitigen Lage von  $c_{i-1}$  und  $c_i$ . Das linke Polygon illustriert Fall A, für den  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt, und das rechte Polygon Fall B, für den  $\mu(c_{i-1}, c_i) > \frac{\mu(P)}{2}$  gilt. Die Pfeile illustrieren die jeweilige "Hälfte" des Randes von  $P$  von  $c_i$  aus, also den Teil des Randes von  $P$ , dessen Punkte nicht mehr als  $\frac{\mu(P)}{2}$  vom entsprechenden Kandidaten entfernt sind. Die Kreuze zeigen das Ende dieser Bereiche an.

Wir zeigen nun, dass wir im Fall A den Teil von  $P(c_{i-1}, s_{m_{i-1}})$ , in dem wir  $s_{w_i}$  suchen müssen, auf  $P(s_{w_{i-1}}, s_{m_i})$  einschränken können. Das heißt insbesondere, dass wir unter den Indizes auf  $P(c_{i-1}, s_{m_{i-1}})$  alle nicht  $(i-1)$ -gültigen Indizes für  $w_i$  ausschließen können.

**Lemma 3.9.** *Sei  $i \geq 1$  und  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  (Fall A) und  $w_{i-1}$  entsprechend Definition 3.8. Falls eine Site  $s \in S$  mit  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  existiert, dann gilt für den Index  $w_i$ , entsprechend Definition 3.8  $s_{w_i} \in P(s_{w_{i-1}}, s_{m_i})$ .*

*Beweis.* Da ein  $s \in S$  mit  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  existiert, gibt es auch einen Index  $m_i$ , der Bedingung 3.1 genügt. Falls nun  $P(c_i, s_{m_i}) \subseteq P(s_{w_{i-1}}, s_{m_i})$  ist, dann gilt die Aussage, da nach Definition 3.8  $s_{w_i} \in P(c_i, s_{m_i})$  sein muss.

Falls aber gilt  $P(c_i, s_{m_i}) \not\subseteq P(s_{w_{i-1}}, s_{m_i})$ , dann ist

$$P(c_i, s_{m_i}) \setminus P(s_{w_{i-1}}, s_{m_i}) = P(c_i, s_{w_{i-1}}) \setminus \{s_{w_{i-1}}\},$$

da  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt (Fall A). Sei  $s_j \in P(c_i, s_{w_{i-1}}) \setminus \{s_{w_{i-1}}\}$  (sollte kein  $s_j \in P(c_i, s_{w_{i-1}}) \setminus \{s_{w_{i-1}}\}$  existieren, gilt die Aussage).

Falls  $\|p - s_j\|_1 \geq \|p - s_{w_{i-1}}\|_1$  ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \delta_i^{cw}(s_j) &= \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j)}{\|p - s_j\|_1} \\ &\leq \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j)}{\|p - s_{w_{i-1}}\|_1} \\ &< \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{w_{i-1}})}{\|p - s_{w_{i-1}}\|_1} = \delta_i^{cw}(s_{w_{i-1}}). \end{aligned}$$

Sei hingegen  $\|p - s_j\|_1 < \|p - s_{w_{i-1}}\|_1$ . Nach Voraussetzung gilt

$$\delta_{i-1}^{cw}(s_j) \leq \delta_{i-1}^{cw}(s_{w_{i-1}}).$$

Damit folgt für  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$

$$\begin{aligned} \frac{\|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, s_j)}{\|p - s_j\|_1} &\leq \frac{\|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, s_{w_{i-1}})}{\|p - s_{w_{i-1}}\|_1} \\ \Leftrightarrow \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) + \Delta}{\|p - s_j\|_1} &\leq \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{w_{i-1}}) + \Delta}{\|p - s_{w_{i-1}}\|_1} \\ \Rightarrow \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j)}{\|p - s_j\|_1} &\leq \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{w_{i-1}})}{\|p - s_{w_{i-1}}\|_1} \\ \Leftrightarrow \delta_i^{cw}(s_j) &\leq \delta_i^{cw}(s_{w_{i-1}}). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$  der absolute Umweg der Distanz von  $p$  nach  $c_i$  über einen Feed-link an  $c_{i-1}$  gegenüber dem direkten Weg. Wegen der Dreiecksungleichung gilt  $\Delta \geq 0$ . Die Implikation gilt, da

$$\frac{\Delta}{\|p - s_j\|_1} \geq \frac{\Delta}{\|p - s_{w_{i-1}}\|_1}$$

ist, das heißt wir subtrahieren in diesem Schritt auf der linken Seite mindestens so viel wie auf der rechten Seite.

Damit gilt für  $s_j \in P(c_i, s_{w_{i-1}}) \setminus \{s_{w_{i-1}}\}$  die Ungleichung  $\delta_i^{cw}(s_j) \leq \delta_i^{cw}(s_{w_{i-1}})$ . Daraus folgt  $s_j \neq s_{w_i}$ , denn sonst müsste nach Definition 3.8  $\delta_i^{cw}(s_j) > \delta_i^{cw}(s_{w_{i-1}})$  sein, da  $s_{w_{i-1}}$  auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn weiter von  $c_i$  entfernt ist als  $s_j$ . Damit folgt die Aussage.  $\square$

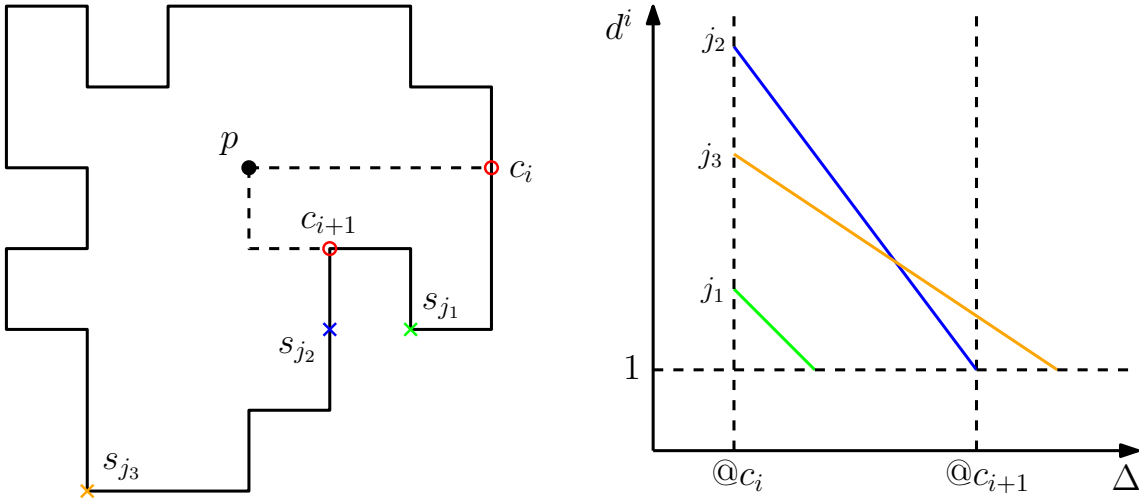


Abbildung 3.5: Links sind drei Sites (farbig markierte Kreuze) auf dem Rand eines Polygons markiert und rechts ist der Verlauf der Streckungen dieser Sites (in den zugehörigen Farben) eingezeichnet, wenn wir die Netzwerkdistanz durch Verschieben des Feed-links im Uhrzeigersinn um  $\Delta$  verringern.

Wir analysieren nun das Verhalten der Streckung  $\delta_i^{cw}(s_j)$  einer Site  $s_j$  mit  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ , wenn wir den Umweg von  $p$  nach  $s_j$  über das Netzwerk um einen Wert  $\Delta$  kürzen, indem wir den (hypothetischen) Anbindungspunkt des Feed-links im Uhrzeigersinn näher an  $s_j$

”heranschieben”. Wir erhalten eine Geradengleichung  $d_j^i(\Delta)$  der Streckung im Uhrzeigersinn von  $s_j$ , die abhängig von  $\Delta$  ist und durch folgenden Term beschrieben wird (siehe auch Abbildung 3.5)

$$d_j^i(\Delta) := \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) - \Delta}{\|p - s_j\|_1}.$$

Die Steigung der Gerade  $d_j^i$  ist dann  $-\frac{1}{\|p - s_j\|_1}$  und wegen  $\|p - s_j\|_1 > 0$  (es ist  $\|p - s_j\|_1 \neq 0$ , da  $p$  im Inneren von  $P$  liegt) fällt  $d_j^i$  streng monoton.

Es gilt der Zusammenhang  $d_j^i(0) = \delta_i^{cw}(s_j)$ . Außerdem gilt für  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  (Fall A),  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$ ,  $\mu(c_{i-1}, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  und ein reelles  $\Delta'$  die Aussage

$$d_j^{i-1}(\Delta' + \Delta) = d_j^i(\Delta')$$

und somit insbesondere  $d_j^{i-1}(\Delta) = d_j^i(0)$ , was sich leicht durch Einsetzen nachprüfen lässt.

**Lemma 3.10.** *Sei  $i > 0$  und  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  (Fall A). Für einen Index  $j$  mit  $\mu(c_{i-1}, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  und  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$  gilt dann*

$$d_j^{i-1}(\Delta) \geq 1 \iff \mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}.$$

*Beweis.* ” $\implies$ ”: Wir beweisen die Kontraposition, das heißt wir zeigen aus  $\mu(c_i, s_j) > \frac{\mu(P)}{2}$  folgt  $d_j^{i-1}(\Delta) < 1$ .

Wegen  $\mu(c_{i-1}, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt  $s_j \in P(c_{i-1}, s_{m_{i-1}})$ . Dann gilt wegen  $\mu(c_i, s_j) > \frac{\mu(P)}{2}$  und  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ , dass  $s_j \in P(c_{i-1}, c_i) \setminus \{c_i\}$  ist (siehe Abbildung 3.4). Für  $\Delta' = \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, s_j) - \|p - s_j\|_1$  gilt  $d_j^{i-1}(\Delta') = 1$ . Nach Voraussetzung ist  $\delta_{i-1}^{cw}(s_j) \geq 1$ , also  $d_j^{i-1}(0) \geq 1$ . Da  $d_j^{i-1}$  monoton fällt, ist somit  $\Delta' \geq 0$ . Außerdem gilt  $\Delta' \leq \Delta$ . Denn sonst wäre

$$\begin{aligned} & \Delta' > \Delta \\ \iff & \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, s_j) - \|p - s_j\|_1 > \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1 \\ & \iff \|p - c_i\|_1 > \|p - s_j\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \mu(c_{i-1}, s_j) \\ & \iff \|p - c_i\|_1 > \|p - s_j\|_1 + \mu(s_j, c_i), \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zur Dreiecksungleichung darstellt.

Falls nun  $\Delta' = \Delta$  wäre, wäre  $\|p - c_i\|_1 = \|p - s_j\|_1 + \mu(s_j, c_i)$ . Da aber der Punkt  $c_i$  gerade so gewählt ist, dass er sich genau zwischen einer steigenden und einer fallenden Folge befindet (Siehe Abschnitt 3.1) und da  $s_j \neq c_i$  ist, wäre  $\|p - c_i\|_1 = \|p - s_j\|_1 + \mu(s_j, c_i)$  ein Widerspruch, da der Weg auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn von  $c_i$  nach  $s_j$  auf jeden Fall eine fallende Kante beinhaltet, also der Weg  $\|p - s_j\|_1 + \mu(s_j, c_i)$  einen Umweg im Sinne der  $L_1$ -Metrik gegenüber dem direkten Weg  $\|p - c_i\|_1$  beinhalten müsste. Also gilt  $\Delta' \neq \Delta$  und damit sogar  $\Delta' < \Delta$ . Da  $d_j^{i-1}$  streng monoton fällt, gilt wegen  $\Delta' < \Delta$  die Ungleichung  $d_j^{i-1}(\Delta) < d_j^{i-1}(\Delta')$  und somit  $d_j^{i-1}(\Delta) < 1$ .

” $\impliedby$ ”: Angenommen es gilt  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  und  $d_j^{i-1}(\Delta) < 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & d_j^{i-1}(\Delta) < 1 \\ & \iff \delta_i^{cw}(s_j) < 1 \\ \iff & \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j)}{\|p - s_j\|_1} < 1 \\ & \iff \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) < \|p - s_j\|_1, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zur Dreiecksungleichung darstellt.  $\square$

Für zwei Indizes  $j_1, j_2$  mit  $j_1 \neq j_2$  und  $\mu(c_i, s_{j_1}), \mu(c_i, s_{j_2}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ , sei  $\Delta_{j_1, j_2}^i$  die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden  $d_{j_1}^i$  und  $d_{j_2}^i$ , also die Zahl, für die gilt:

$$\begin{aligned} d_{j_1}^i(\Delta_{j_1, j_2}^i) &= d_{j_2}^i(\Delta_{j_1, j_2}^i) \\ \iff \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_1}) - \Delta_{j_1, j_2}^i}{\|p - s_{j_1}\|_1} &= \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_2}) - \Delta_{j_1, j_2}^i}{\|p - s_{j_2}\|_1} \end{aligned}$$

bzw.  $\Delta_{j_1, j_2}^i := \perp$  falls keine solche Zahl existiert. Da es sich auf der rechten und linken Seite der Gleichung um Geraden in  $\Delta$  handelt, kann höchstens eine solche Zahl existieren, da wir gefordert haben, dass die Sites paarweise unterschiedlich sind, weshalb entweder Steigung oder Achsenabschnitt unterschiedlich sein müssen und darum  $d_{j_1}^i$  und  $d_{j_2}^i$  nicht aufeinander liegen können.

Der Wert  $\Delta_{j_1, j_2}^i$  entspricht der "Menge von Weg", die die Strecke von  $p$  nach  $s_{w_i}$  über das Netzwerk durch Verschieben des Feed-links kürzer oder länger werden müsste, damit die Streckung im Uhrzeigersinn von  $s_{j_1}$  gleich der von  $s_{j_2}$  wird. Der Wert  $\Delta_{j_1, j_2}^i$  ist genau dann  $\perp$ , wenn die Funktionsgraphen von  $d_{j_1}^i$  und  $d_{j_2}^i$  parallel sind, was bedeutet, dass deren Steigung gleich ist also  $\|p - s_{j_1}\|_1 = \|p - s_{j_2}\|_1$  sein muss. Für  $\Delta_{j, w_i}^i$  schreiben wir auch  ${}_w\Delta_j^i$ .

Der Zusammenhang  $\Delta_{j_1, j_2}^i = \Delta_{j_2, j_1}^i$  ist klar. Außerdem gilt für  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  (Fall A),  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$  und  $\mu(c_{i-1}, s_{j_1}), \mu(c_{i-1}, s_{j_2}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  der Zusammenhang

$$d_{j_1}^{i-1}(\Delta_{j_1, j_2}^i + \Delta) = d_{j_2}^{i-1}(\Delta_{j_1, j_2}^i + \Delta)$$

und somit ist  $\Delta_{j_1, j_2}^{i-1} = \Delta_{j_1, j_2}^i + \Delta$ .

**Lemma 3.11.** *Ist  $j$  ein  $i$ -gültiger Index, dann gilt  ${}_w\Delta_j^i > 0$  und  $d_j^i({}_w\Delta_j^i) \geq 1$ .*

*Beweis.* Nach Definition von  $w_i$  gilt  $\delta_i^{cw}(s_{w_i}) > \delta_i^{cw}(s_j)$ , also  $d_{w_i}^i(0) > d_j^i(0)$ . Außerdem ist  $d_{w_i}^i(0), d_j^i(0) \geq 1$ , denn sonst wäre

$$\begin{aligned} d_j^i(0) &< 1 \\ \iff \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) - 0}{\|p - s_j\|_1} &< 1 \\ \iff \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) &< \|p - s_j\|_1 \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Dreiecksungleichung wäre (analog lässt sich  $d_{w_i}^i(0) < 1$  ausschließen). Es gilt  $\|p - s_j\|_1 > \|p - s_{w_i}\|_1$  (sonst wäre  $\delta_i^{cw}(s_j) > \delta_i^{cw}(s_{w_i})$ ), d.h.  $d_j^i$  fällt langsamer als  $d_{w_i}^i$ . Da  $d_j^i$  und  $d_{w_i}^i$  monoton fallen und da  $d_{w_i}^i(0) > d_j^i(0)$  ist, muss  ${}_w\Delta_j^i > 0$  gelten.

Angenommen es wäre  $d_j^i({}_w\Delta_j^i) < 1$ . Da  $d_{w_i}^i(0) > d_j^i(0)$  sowie  $d_{w_i}^i(0), d_j^i(0) \geq 1$  ist, existiert somit auch ein  $0 \leq \Delta < {}_w\Delta_j^i$  mit  $d_j^i(\Delta) < 1$  und  $d_{w_i}^i(\Delta) = 1$ . Wir folgern

$$\begin{aligned} d_{w_i}^i(\Delta) &= 1 \\ \iff \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{w_i}) - \Delta}{\|p - s_{w_i}\|_1} &= 1 \\ \iff \Delta &= \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{w_i}) - \|p - s_{w_i}\|_1 \end{aligned}$$

und setzen ein

$$\begin{aligned}
& d_j^i(\Delta) < 1 \\
\iff & \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) - (\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{w_i}) - \|p - s_{w_i}\|_1)}{\|p - s_j\|_1} < 1 \\
\iff & \frac{\|p - s_{w_i}\|_1 + \mu(s_{w_i}, s_j)}{\|p - s_j\|_1} < 1 \\
\iff & \|p - s_{w_i}\|_1 + \mu(s_{w_i}, s_j) < \|p - s_j\|_1.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist ein Widerspruch zur Dreiecksungleichung.  $\square$

Für  $s_j \in P(c_i, s_{m_i})$  mit  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  sei  ${}_1\Delta_j^i$  definiert als die Zahl, für die gilt  $d_j^i({}_1\Delta_j^i) = 1$ .

Es gilt  ${}_1\Delta_j^i = \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) - \|p - s_j\|_1$  (nachrechnen). Für  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  (Fall A),  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$  und  $\mu(c_{i-1}, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt der Zusammenhang  ${}_1\Delta_j^{i-1} = {}_1\Delta_j^i + \Delta$ .

**Lemma 3.12.** Für  $s_{j_1}, s_{j_2} \in P(c_i, s_{m_i})$  mit  $j_1 \neq j_2$  und  $\mu(c_i, s_{j_1}), \mu(c_i, s_{j_2}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt  ${}_1\Delta_{j_1}^i \neq {}_1\Delta_{j_2}^i$ .

*Beweis.* Angenommen für  $s_{j_1}, s_{j_2} \in P(c_i, s_{m_i})$  mit  $j_1 \neq j_2$ ,  $\mu(c_i, s_{j_1}), \mu(c_i, s_{j_2}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  und (ohne Einschränkung)  $\mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2})$  gilt die Aussage  ${}_1\Delta_{j_1}^i = {}_1\Delta_{j_2}^i$ , so folgt

$$\begin{aligned}
& {}_1\Delta_{j_1}^i = {}_1\Delta_{j_2}^i \\
\iff & \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_1}) - \|p - s_{j_1}\|_1 = \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_2}) - \|p - s_{j_2}\|_1 \\
& \iff \mu(c_i, s_{j_1}) - \|p - s_{j_1}\|_1 = \mu(c_i, s_{j_2}) - \|p - s_{j_2}\|_1 \\
& \iff \|p - s_{j_2}\|_1 = \|p - s_{j_1}\|_1 + \mu(s_{j_1}, s_{j_2}).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, dass sich  $s_{j_1}$  und  $s_{j_2}$  auf der gleichen steigenden Folge befinden, denn falls sich eine fallende Kante auf  $P(s_{j_1}, s_{j_2})$  befände, würde für die obere Formel keine Gleichheit gelten. Da  $s_{j_2}$  im Uhrzeigersinn hinter  $s_{j_1}$  steht, hätten wir dann allerdings  $s_{j_2}$  zuvor aus  $S$  gelöscht (Siehe Lemma 3.7). Widerspruch. Also ist  ${}_1\Delta_{j_1}^i \neq {}_1\Delta_{j_2}^i$ .  $\square$

**Lemma 3.13.** Für  $s_{j_1}, s_{j_2} \in P(c_i, s_{m_i})$  mit  $\mu(c_i, s_{j_1}), \mu(c_i, s_{j_2}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt

$${}_1\Delta_{j_1}^i < {}_1\Delta_{j_2}^i \iff \mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2}).$$

*Beweis.* "←": Sei  $\mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2})$ . Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\|p - s_{j_2}\|_1 \leq \|p - s_{j_1}\|_1 + \mu(s_{j_1}, s_{j_2}).$$

Da  $\mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2})$  gilt und  $s_{j_1}, s_{j_2} \in P(c_i, s_{m_i})$  sind, gilt außerdem

$$\mu(c_i, s_{j_2}) - \mu(c_i, s_{j_1}) = \mu(s_{j_1}, s_{j_2}).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \|p - s_{j_2}\|_1 \leq \|p - s_{j_1}\|_1 + \mu(s_{j_1}, s_{j_2}) \\
\iff & \mu(c_i, s_{j_1}) - \|p - s_{j_1}\|_1 \leq \mu(c_i, s_{j_2}) - \|p - s_{j_2}\|_1 \\
\iff & \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_1}) - \|p - s_{j_1}\|_1 \leq \|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_2}) - \|p - s_{j_2}\|_1 \\
& \iff {}_1\Delta_{j_1}^i \leq {}_1\Delta_{j_2}^i.
\end{aligned}$$

Wegen  $\mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2})$  ist  $j_1 \neq j_2$  und mit Lemma 3.12 folgt dann  ${}_1\Delta_{j_1}^i < {}_1\Delta_{j_2}^i$ .

” $\implies$ ”: Sei hingegen  ${}_1\Delta_{j_1}^i < {}_1\Delta_{j_2}^i$ . Dann ist insbesondere  $j_1 \neq j_2$ , denn sonst wäre  ${}_1\Delta_{j_1}^i = {}_1\Delta_{j_2}^i$ . Angenommen es wäre  $\mu(c_i, s_{j_1}) \geq \mu(c_i, s_{j_2})$ . Dann muss wegen  $j_1 \neq j_2$  auch  $\mu(c_i, s_{j_1}) > \mu(c_i, s_{j_2})$  sein, da alle Sites nach Voraussetzung verschiedene Punkte sind. Damit folgt aber mit dem bereits bewiesenen Teil  ${}_1\Delta_{j_1}^i > {}_1\Delta_{j_2}^i$ . Widerspruch.  $\square$

### 3.2.2 Einführung der Datenstruktur

Für ein gegebenes  $i$  verwalten wir die Indizes von Sites auf  $P(c_i, s_{m_i})$ , die potentielle Kandidaten für  $w_{i+1}$  sind, in einer Datenstruktur, um eine mehrfache Betrachtung von Sites zu verhindern. Nach Lemma 3.9 kommen dazu nur die Sites auf  $P(c_i, s_{m_i})$  in Frage, die zu  $i$ -gültigen Indizes gehören. Sites, die zwar  $i$ -gültig sind aber aus gewissen Gründen dennoch nicht mehr betrachtet werden müssen (welche das sind definieren wir unten), sollen ebenfalls nicht in der Datenstruktur vorkommen. Zu diesem Zweck definieren wir eine doppelt verkettete Liste  $L$ , in der wir die passenden  $i$ -gültigen Indizes  $j$  bezüglich einer geeigneten Ordnung speichern.

Um die in  $L$  zu speichernden Indizes zu klassifizieren, definieren wir bezüglich  $i$  für zwei  $i$ -gültige Indizes  $j_1, j_2$  eine strikte Ordnung ” $\prec_i$ ”.

**Definition 3.14.** *Bezüglich  $i \in \{0, \dots, l-1\}$  und für zwei  $i$ -gültige Indizes  $j_1, j_2$  gelte  $j_1 \prec_i j_2$ , falls  $\Delta_{w_i, j_1}^i < \Delta_{w_i, j_2}^i$  ist. Falls hingegen  $\Delta_{w_i, j_1}^i = \Delta_{w_i, j_2}^i$  ist, gelte  $j_1 \prec_i j_2$  wenn  $\mu(s_{w_i}, s_{j_1}) > \mu(s_{w_i}, s_{j_2})$  ist.*

Dabei würde  $\Delta_{w_i, j_1}^i = \perp$  implizieren, dass  $\delta_i^{cw}(s_{j_1}) > \delta_i^{cw}(s_{w_i})$  ist, da  $\mu(c_i, s_{j_1}) > \mu(c_i, w_i)$  ist und  $\|p - s_{j_1}\|_1 = \|p - s_{w_i}\|_1$  wäre. Dann wäre aber  $j_1 = w_i$  und somit nicht  $i$ -gültig, weshalb wir  $\Delta_{w_i, j_1}^i = \perp$  ausschließen können (und analog  $\Delta_{w_i, j_2}^i = \perp$ ).

Die Asymmetrie von  $\prec_i$  folgt aus der Forderung, dass zwei Sites auf unterschiedlichen Stellen auf dem Rand von  $P$  liegen müssen. Die Transitivität gilt offensichtlich auch. Anschaulich stellt  $\prec_i$  die Reihenfolge dar, in der Sites bei zunehmender Verkürzung des Umweges  $\Delta$  eine größere Streckung im Uhrzeigersinn als  $w_i$  haben werden.

**Definition 3.15.** *Wir nennen  $L$  geordnet bezüglich  $i$ , falls die Indizes in  $L$  bezüglich  $\prec_i$  geordnet sind und ein  $i$ -gültiger Index  $j$  genau dann in  $L$  vorkommt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

- a) *Es gibt kein keinen  $i$ -gültigen Index  $j_1 \neq j$ , so dass  $j_1 \prec_i j$  und  ${}_1\Delta_{j_1}^i < {}_1\Delta_j^i$  ist.*
- b) *Es gibt keine  $i$ -gültigen Indizes  $j_1, j_2 \neq j$ , so dass  $j_1 \prec_i j \prec_i j_2$  und  ${}_w\Delta_{j_2}^i < \Delta_{j_2, j_2}^i \leq \Delta_{j_1, j_1}^i$  ist.*

Falls für einen  $i$ -gültigen Index  $j$  gilt  $j \notin L$ , dann gibt es einen  $i$ -gültigen Index  $j_1$ , welcher der Bedingung in Definition 3.15 a) entspricht oder zwei  $i$ -gültige Indizes  $j_1, j_2$ , welche der Bedingung in Definition 3.15 b) entsprechen. Im ersten Fall nennen wir  $j_1$  einen  $a$ -Zeugen (für die Nicht-Mitgliedschaft von  $j$  in  $L$  bezüglich Definition 3.15 a)). Im zweiten Fall bezeichnen wir  $j_1$  und  $j_2$  als  $b$ -Zeugen (für die Nicht-Mitgliedschaft von  $j$  in  $L$  bezüglich Definition 3.15 b)).

Um die Definition von  $L$  zu motivieren, beweisen wir das folgende Lemma, welches aussagt, dass alle nicht in  $L$  enthaltenen Indizes auf  $P(c_i, s_{m_{i-1}})$  nicht für  $w_i$  in Frage kommen, wenn  $L$  bezüglich  $i-1$  geordnet ist.

**Lemma 3.16.** *Sei  $L$  geordnet bezüglich  $i-1$  (für  $i > 0$ ) und  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  (Fall A). Ist ein Index  $j$   $(i-1)$ -gültig und  $j \notin L$ , dann gilt  $j \neq w_i$ .*



*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $s_j \in P(c_i, s_{m_{i-1}})$  und  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  ist, andernfalls können wir  $j$  nach Definition 3.8 für  $w_i$  ausschließen. Dann gilt insbesondere  $\mu(c_i, s_{m_{i-1}}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ , da Bedingung 3.1 erfüllt ist. Da  $j \notin L$  ist, gibt es einen  $a$ -Zeugen  $j_1$  (Fall 1) oder zwei  $b$ -Zeugen  $j_1, j_2$  (Fall 2).

Wir zeigen in der folgenden Fallunterscheidung, dass es entweder einen Index  $j'$  einer Site mit  $\mu(c_i, s_{j'}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gibt, welcher  $j$  nach Definition 3.8 für  $w_i$  ausschließt, oder der Widerspruch  $s_j \notin P(c_i, s_{m_{i-1}})$  gelten müsste.

Für die erste Aussage zeigen wir, dass entweder  $\delta_i^{cw}(s_{j'}) > \delta_i^{cw}(s_j)$  oder  $\delta_i^{cw}(s_j) = \delta_i^{cw}(s_{j'})$  und  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_{j'})$  gilt, womit  $j$  in beiden Fällen als Kandidat für  $w_i$  ausgeschlossen werden kann. Wir setzen dazu

$$\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$$

und da  $\delta_i^{cw}(s_j) = d_j^{i-1}(\Delta)$  bzw.  $\delta_i^{cw}(s_{j'}) = d_{j'}^{i-1}(\Delta)$  gilt, reicht es zu zeigen, dass  $d_{j'}^{i-1}(\Delta) > d_j^{i-1}(\Delta)$  oder  $d_j^{i-1}(\Delta) = d_{j'}^{i-1}(\Delta)$  und  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_{j'})$  gilt. Da  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  ist, gilt nach Lemma 3.11, dass  $d_j^{i-1}(\Delta) \geq 1$  ist. Deshalb ist dann auch  $d_{j'}^{i-1}(\Delta) \geq 1$  und somit nach Lemma 3.11 auch  $\mu(c_i, s_{j'}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ .

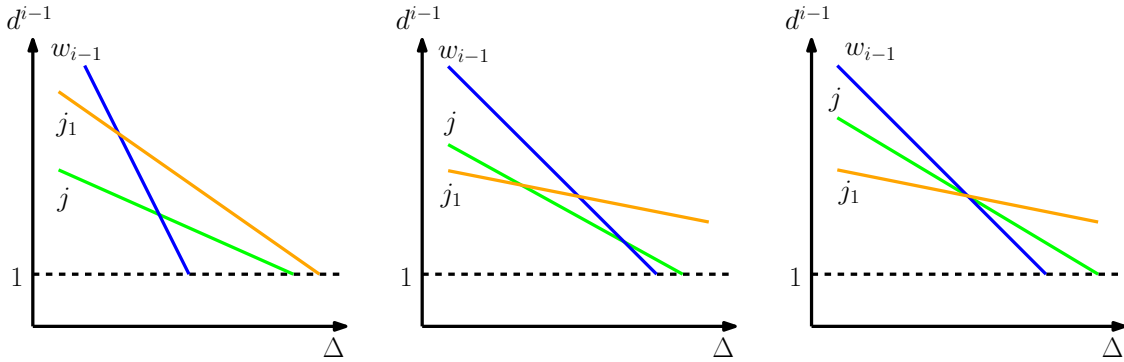


Abbildung 3.6: Beispiele möglicher Lagen von  $d_j^{i-1}, d_{j_1}^{i-1}$  und  $d_{w_{i-1}}^{i-1}$ , in denen  $j_1$   $a$ -Zeuge für  $j$  ist. Zu erkennen ist, dass  $d_j^{i-1}$  (grün) stets entweder von  $d_{j_1}^{i-1}$  (orange) oder  $d_{w_{i-1}}^{i-1}$  (blau) überdeckt wird und  $j$  somit nicht für  $w_i$  in Frage kommt.

**Fall 1:** Es gibt einen  $(i-1)$ -gültigen Index  $j_1 \neq j$ , so dass  $j_1 \prec_{i-1} j$  und  ${}_1\Delta_j^{i-1} < {}_1\Delta_{j_1}^{i-1}$  ist (siehe Abbildung 3.6).

Sei  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$ . Wir unterscheiden die Fälle  $\Delta < {}_w\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.1),  $\Delta > {}_w\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.2) und  $\Delta = {}_w\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.3).

**Fall 1.1:** Es gilt  $\delta_{i-1}^{cw}(s_{w_{i-1}}) > \delta_{i-1}^{cw}(s_j)$ , und damit folgt nach Lemma 3.8  $d_{w_{i-1}}^{i-1}(0) > d_j^{i-1}(0)$ . Das heißt der Funktionsgraph von  $d_j^{i-1}$  verläuft vor dem gemeinsamen Schnittpunkt unter dem Funktionsgraph von  $d_{w_{i-1}}^{i-1}$ . Deshalb gilt für  $\Delta < {}_w\Delta_j^{i-1}$  die Aussage  $d_{w_{i-1}}^{i-1}(\Delta) > d_j^{i-1}(\Delta)$ .

**Fall 1.2:** Es gilt  $\Delta > {}_w\Delta_j^{i-1}$ . Wir trennen die Fälle  $\Delta < {}_1\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.2.1)  $\Delta = {}_1\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.2.2) und  $\Delta > {}_1\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.2.3).

**Fall 1.2.1:** Nach Voraussetzung gilt  ${}_1\Delta_j^{i-1} < {}_1\Delta_{j_1}^{i-1}$ . Damit gilt auch  $d_{j_1}^{i-1}({}_1\Delta_j^{i-1}) > d_j^{i-1}({}_1\Delta_j^{i-1}) = 1$ , da  $d_{j_1}^{i-1}$  streng monoton fällt. Wegen  $j_1 \prec_{i-1} j$  gilt  ${}_w\Delta_{j_1}^{i-1} \leq {}_w\Delta_j^{i-1}$  und somit auch  $d_{j_1}^{i-1}({}_w\Delta_j^{i-1}) \geq d_j^{i-1}({}_w\Delta_j^{i-1})$ .

Damit muss  $d_{j_1}^{i-1}$  im Intervall  $(w\Delta_j^{i-1}, {}_1\Delta_j^{i-1})$  über  $d_j^{i-1}$  verlaufen. Nach Voraussetzung gilt  $w\Delta_j^{i-1} < \Delta < {}_1\Delta_j^{i-1}$ . Also gilt  $d_{j_1}^{i-1}(\Delta) > d_j^{i-1}(\Delta)$ .

**Fall 1.2.2:** Da nach Voraussetzung  ${}_1\Delta_j^{i-1} < {}_1\Delta_{j_1}^{i-1}$  ist, gilt  $d_{j_1}^{i-1}({}_1\Delta_j^{i-1}) > d_j^{i-1}({}_1\Delta_j^{i-1}) = 1$ , da  $d_{j_1}^{i-1}$  monoton fällt.

**Fall 1.2.3:** Aus  $\Delta > {}_1\Delta_j^{i-1}$  folgt  $d_j^{i-1}(\Delta) < 1$ , da  $d_j^{i-1}$  monoton fällt. Nach Lemma 3.10 folgt dann  $\mu(c_i, s_j) > \frac{\mu(P)}{2}$ . Dies bedeutet aber, dass  $s_j \notin P(c_i, s_{m_{i-1}})$  ist.

**Fall 1.3:** Es gilt  $\Delta = w\Delta_j^{i-1}$ . Wegen  $j_1 \prec_{i-1} j$  gilt  $w\Delta_{j_1}^{i-1} \leq w\Delta_j^{i-1}$ . Wir differenzieren die Fälle  $w\Delta_{j_1}^{i-1} < w\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.3.1) und  $w\Delta_{j_1}^{i-1} = w\Delta_j^{i-1}$  (Fall 1.3.2).

**Fall 1.3.1:** Wegen  $w\Delta_{j_1}^{i-1} < w\Delta_j^{i-1}$  gilt auch  $d_{j_1}^{i-1}(w\Delta_j^{i-1}) > d_j^{i-1}(w\Delta_j^{i-1})$ , da  $d_{j_1}^{i-1}$  und  $d_j^{i-1}$  streng monoton fallen und vor  $w\Delta_{j_1}^{i-1}$  unterhalb von  $d_{w_{i-1}}^{i-1}$  verlaufen (sonst wäre  $j = w_{i-1}$  oder  $j_1 = w_{i-1}$ ). Wegen  $\Delta = w\Delta_j^{i-1}$  gilt somit  $d_{j_1}^{i-1}(\Delta) > d_j^{i-1}(\Delta)$ .

**Fall 1.3.2:** Da nach Voraussetzung  $w\Delta_{j_1}^{i-1} = w\Delta_j^{i-1}$  gilt, muss wegen  $j_1 \prec_{i-1} j$  die Aussage  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_{j_1})$  gelten. Außerdem ist  $d_{j_1}^{i-1}(w\Delta_j^{i-1}) = d_j^{i-1}(w\Delta_j^{i-1})$ .

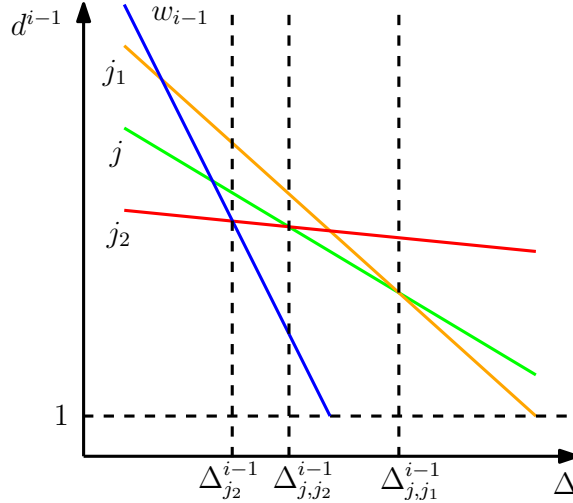


Abbildung 3.7: Wir sehen die Situation aus Fall 2 und erkennen, dass  $d_j^{i-1}$  (grün) von  $d_{j_1}^{i-1}$  (orange) oder  $d_{j_2}^{i-1}$  (rot) überdeckt wird und  $j$  somit nicht für  $w_i$  in Frage kommt.

**Fall 2:** Es gibt zwei  $(i-1)$ -gültig Indizes  $j_1, j_2 \neq j$ , so dass  $j_1 \prec_{i-1} j \prec_{i-1} j_2$  und  $w\Delta_{j_2}^{i-1} < \Delta_{j,j_2}^{i-1} \leq \Delta_{j,j_1}^{i-1}$  ist (Siehe auch Abbildung 3.7).

Für einen Feed-link an  $c_{i-1}$  gilt wegen  $j_1 \prec_{i-1} j \prec_{i-1} j_2$ , dass  $\delta_{i-1}^{cw}(s_{j_1}) > \delta_{i-1}^{cw}(s_j) > \delta_{i-1}^{cw}(s_{j_2})$  ist, denn sonst wäre  $\Delta_{j,j_1}^{i-1} \leq w\Delta_{j_2}^{i-1}$  oder  $\Delta_{j,j_2}^{i-1} \leq w\Delta_{j_2}^{i-1}$ . Da  $w\Delta_j^{i-1}, w\Delta_{j_1}^{i-1}, w\Delta_{j_2}^{i-1} \geq 0$  sind (nach Lemma 3.11), gilt also  $d_{j_1}^{i-1}(0) > d_j^{i-1}(0) > d_{j_2}^{i-1}(0)$ .

Sei  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$ . Wir unterscheiden die Fälle  $\Delta < \Delta_{j,j_2}^{i-1}$  (Fall 2.1),  $\Delta = \Delta_{j,j_2}^{i-1}$  (Fall 2.2) und  $\Delta > \Delta_{j,j_2}^{i-1}$  (Fall 2.3).

**Fall 2.1:** Da  $\Delta < \Delta_{j,j_2}^{i-1}$  ist, gilt nach Voraussetzung auch  $\Delta < \Delta_{j,j_1}^{i-1}$  woraus  $d_{j_1}^{i-1}(\Delta) > d_j^{i-1}(\Delta)$  folgt, weil  $d_{j_1}^{i-1}(0) > d_j^{i-1}(0)$  gilt.

**Fall 2.2:** Es gilt  $\Delta = \Delta_{j,j_2}^{i-1}$ , also insbesondere  $d_{j_1}^{i-1}(\Delta) = d_{j_2}^{i-1}(\Delta)$ . Wegen  $d_{j_1}^{i-1}(\Delta) \geq 1$  ist somit auch  $d_{j_2}^{i-1}(\Delta) \geq 1$ .

Da  $d_j^{i-1}(0) > d_{j_2}^{i-1}(0)$  ist und da wegen Lemma 3.11  $0 \leq w\Delta_{j_2}^{i-1} < \Delta_{j,j_2}^{i-1}$  ist, also  $\Delta_{j,j_2}^{i-1} > 0$  gilt, hat  $d_j^{i-1}$  eine kleinere Steigung als  $d_{j_2}^{i-1}$ , es gilt also  $\|p - j_2\|_1 > \|p - j\|_1$ . Es gilt weiter

$$\begin{aligned} d_j^{i-1}(\Delta) &= d_{j_2}^{i-1}(\Delta) \\ \iff \frac{\|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, s_j) - \Delta}{\|p - s_j\|_1} &= \frac{\|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, s_{j_2}) - \Delta}{\|p - s_{j_2}\|_1}. \end{aligned}$$

Wegen  $\|p - j_2\|_1 > \|p - j\|_1$  und  $d_j^{i-1}(\Delta), d_{j_2}^{i-1}(\Delta) \geq 1$  muss nun aber auch  $\mu(c_{i-1}, s_{j_2}) > \mu(c_{i-1}, s_j)$  sein, damit obige Gleichung erfüllt ist. Damit ist also  $\delta_i^{cw}(s_j) = \delta_i^{cw}(s_{j_2})$  und  $\mu(c_i, s_{j_2}) > \mu(c_i, s_j)$ .

**Fall 2.3:** Da  $\Delta > \Delta_{j,j_2}^{i-1} \geq 0$  ist, gilt  $d_j^{i-1}(\Delta) > d_{j_2}^{i-1}(\Delta)$ , da  $d_j^{i-1}(0) > d_{j_2}^{i-1}(0)$  gilt und sich  $d_j^{i-1}$  und  $d_{j_2}^{i-1}$  bei einer Kürzung der Netzwerkdistanz um  $\Delta$  kreuzen und deshalb ihre gegenseitige Lage tauschen.  $\square$

**Lemma 3.17.** *Sei  $L$  geordnet bezüglich  $i$  und  $j$  ein  $i$ -gültiger Index mit  $j \notin L$ . Dann ist ein  $i$ -gültiger Index  $j_1 \neq j$  ein  $a$ -Zeuge von  $j$ , genau dann wenn  $d_j^i$  von  $d_{j_1}^i$  im Intervall  $[w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i]$  überdeckt wird, das heißt genau dann wenn gilt*

$$\max\{d_j^i(\Delta), d_{j_1}^i(\Delta)\} = d_{j_1}^i(\Delta) \quad \forall \Delta \in [w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i].$$

*Ebenso sind  $i$ -gültige Indizes  $j_1, j_2 \neq j$  zwei  $b$ -Zeugen von  $j$  und weder  $j_1$  noch  $j_2$   $a$ -Zeugen von  $j$ , genau dann wenn  $d_j^i$  von  $d_{j_1}^i$  und  $d_{j_2}^i$  im Intervall  $[w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i]$  überdeckt wird und weder von  $d_{j_1}^i$  noch  $d_{j_2}^i$  alleine, das heißt genau dann wenn gilt*

$$\max\{d_j^i(\Delta), d_{j_1}^i(\Delta), d_{j_2}^i(\Delta)\} = \max\{d_{j_1}^i(\Delta), d_{j_2}^i(\Delta)\} \quad \forall \Delta \in [w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i].$$

und es gibt  $\Delta_1, \Delta_2 \in (w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i)$  mit  $d_j^i(\Delta_1) > d_{j_1}^i(\Delta_1)$  und  $d_j^i(\Delta_2) > d_{j_2}^i(\Delta_2)$ .

*Beweis.* Wir zeigen den ersten Teil:

Wenn  $j_1$   $a$ -Zeuge von  $j$  ist, dann gilt also  $j_1 \prec_i j$  und  $1\Delta_j^i < 1\Delta_{j_1}^i$ . Wegen  $j_1 \prec_i j$  ist  $w\Delta_{j_1}^i \leq w\Delta_j^i$ . Die Aussagen  $1\Delta_j^i < 1\Delta_{j_1}^i$  und  $w\Delta_{j_1}^i \leq w\Delta_j^i$  sind gleichbedeutend mit  $d_{j_1}^i(1\Delta_j^i) > d_j^i(1\Delta_j^i)$  und  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) \geq d_j^i(w\Delta_j^i)$ . Diese Situation ist genau dann der Fall, wenn  $d_j^i$  von  $d_{j_1}^i$  im Intervall  $[w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i]$  überdeckt wird, also genau dann wenn gilt

$$\max\{d_j^i(\Delta), d_{j_1}^i(\Delta)\} = d_{j_1}^i(\Delta) \quad \forall \Delta \in [w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i].$$

Nun beweisen wir den zweiten Teil:

” $\implies$ ”: Es gelte ohne Einschränkung  $j_1 \prec_i j_2$ . Da  $j_1$  und  $j_2$   $b$ -Zeugen von  $j$  sind, gilt somit  $j_1 \prec_i j \prec_i j_2$  und  $w\Delta_{j_2}^i < \Delta_{j,j_2}^i \leq \Delta_{j,j_1}^i$ . Aus  $j_1 \prec_i j \prec_i j_2$  folgt  $w\Delta_{j_1}^i \leq w\Delta_j^i \leq w\Delta_{j_2}^i$ . Nach Voraussetzung ist deshalb insbesondere  $w\Delta_{j_1}^i < \Delta_{j,j_1}^i$  und  $w\Delta_{j_2}^i < \Delta_{j,j_2}^i$ . Da  $w\Delta_{j_1}^i \leq w\Delta_j^i$  ist, gilt  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) \geq d_j^i(w\Delta_j^i)$ . Und da  $w\Delta_{j_1}^i \neq \Delta_{j,j_1}^i$  ist, muss sogar  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) > d_j^i(w\Delta_j^i)$  gelten, denn wäre  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) = d_j^i(w\Delta_j^i)$ , dann wären  $d_{j_1}^i$  und  $d_j^i$  deckungsgleich und somit  $j = j_1$ . Analog gilt  $d_{j_2}^i(w\Delta_j^i) < d_j^i(w\Delta_j^i)$ .

Wegen  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) > d_j^i(w\Delta_j^i)$  und  $w\Delta_j^i < \Delta_{j,j_1}^i$  verläuft  $d_{j_1}^i$  bis  $\Delta_{j,j_1}^i$  über  $d_j^i$  und wegen  $d_{j_2}^i(w\Delta_j^i) < d_j^i(w\Delta_j^i)$  und  $w\Delta_j^i < \Delta_{j,j_2}^i$  verläuft  $d_{j_2}^i$  ab  $\Delta_{j,j_2}^i$  über  $d_j^i$ . Da nach Voraussetzung  $\Delta_{j,j_2}^i \leq \Delta_{j,j_1}^i$  ist, gilt

$$\max\{d_j^i(\Delta), d_{j_1}^i(\Delta), d_{j_2}^i(\Delta)\} = \max\{d_{j_1}^i(\Delta), d_{j_2}^i(\Delta)\} \quad \forall \Delta \in [w\Delta_j^i, 1\Delta_j^i].$$

Da weder  $j_1$  noch  $j_2$   $a$ -Zeugen sind, dürfen nach dem bereits bewiesenen Teil deren Geraden die Gerade  $d_j^i$  nicht jeweils alleine überdecken, und deshalb muss  $w\Delta_j^i < \Delta_{j,j_2}^i$  und  $\Delta_{j,j_1}^i < {}_1\Delta_j^i$  sein. Damit gibt es ein  $\Delta_2 \in (w\Delta_j^i, \Delta_{j,j_2}^i)$  und ein  $\Delta_1 \in (\Delta_{j,j_1}^i, {}_1\Delta_j^i)$ , für die das Gewünschte gilt.

” $\Leftarrow$ .” Sei

$$\max\{d_j^i(\Delta), d_{j_1}^i(\Delta), d_{j_2}^i(\Delta)\} = \max\{d_{j_1}^i(\Delta), d_{j_2}^i(\Delta)\} \quad \forall \Delta \in [w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i].$$

und es gibt  $\Delta_1, \Delta_2 \in (w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i)$  mit  $d_{j_1}^i(\Delta_1) > d_{j_2}^i(\Delta_1)$  und  $d_{j_2}^i(\Delta_2) > d_{j_1}^i(\Delta_2)$ .

Es gilt  $\|p - s_{j_1}\|_1 \neq \|p - s_{j_2}\|_1$ , denn sonst wären  $d_{j_1}^i$  und  $d_{j_2}^i$  parallel, weshalb kein  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$  entsprechend der Voraussetzung existieren könnte. Sei ohne Einschränkung  $\|p - s_{j_1}\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$ , das bedeutet also, dass  $d_{j_1}^i$  schneller fällt als  $d_{j_2}^i$ .

Angenommen  $\|p - s_j\|_1 \leq \|p - s_{j_1}\|_1$ , also  $d_j^i$  würde mindestens so schnell fallen wie  $d_{j_1}^i$  und fällt somit auch schneller als  $d_{j_2}^i$ . Nach Voraussetzung muss  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) \geq d_j^i(w\Delta_j^i)$  oder  $d_{j_2}^i(w\Delta_j^i) \geq d_j^i(w\Delta_j^i)$  sein. Da  $d_j^i$  und  $d_{j_1}^i$  nicht deckungsgleich sein können, würde  $d_{j_1}^i$  oder  $d_{j_2}^i$  die Gerade  $d_j^i$  im Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  überdecken und somit gäbe es auch kein  $\Delta_1$  oder kein  $\Delta_2$  entsprechend der Voraussetzung. Widerspruch. Also ist  $\|p - s_{j_1}\|_1 < \|p - s_j\|_1$ , das heißt  $d_j^i$  fällt langsamer als  $d_{j_1}^i$ . Mit ähnlicher Argumentation zeigt man, dass  $\|p - s_j\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$  gilt. Das heißt es gilt  $\|p - s_{j_1}\|_1 < \|p - s_j\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$ .

Wegen  $\|p - s_j\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$  muss also  $d_{j_2}^i(w\Delta_j^i) < d_j^i(w\Delta_j^i)$  sein (denn sonst gäbe es wie oben kein  $\Delta_2$  entsprechend der Voraussetzung). Deshalb muss gelten  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) > d_j^i(w\Delta_j^i)$ , damit  $d_j^i$  im Schnitt einer  $\epsilon$ -Umgebung um  $w\Delta_j^i$  für ein  $\epsilon > 0$  und dem Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  von  $d_{j_1}^i$  überdeckt wird. Nun muss  $d_{j_1}^i({}_1\Delta_j^i) < d_j^i({}_1\Delta_j^i)$  sein (sonst gäbe es kein  $\Delta_1$  mit den vorausgesetzten Eigenschaften). Daraus folgt entsprechend  $d_{j_2}^i({}_1\Delta_j^i) > d_j^i({}_1\Delta_j^i)$ , da wir sonst analog im Schnitt einer Umgebung um  ${}_1\Delta_j^i$  und dem Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  keine Überdeckung hätten.

Anschaulich folgt aus  $\|p - s_{j_1}\|_1 < \|p - s_j\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$ , dass  $d_{j_1}^i$  die Gerade  $d_j^i$  im Intervall  $(-\infty, \Delta_{j,j_1}^i]$  überdeckt und  $d_{j_2}^i$  die Gerade  $d_j^i$  im Intervall  $[\Delta_{j,j_2}^i, \infty)$  überdeckt. Damit  $d_j^i$  also im gesamten Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  überdeckt ist, muss wegen  $d_{j_2}^i(w\Delta_j^i) < d_j^i(w\Delta_j^i)$  und  $d_{j_1}^i({}_1\Delta_j^i) < d_j^i({}_1\Delta_j^i)$  sowie  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) > d_j^i(w\Delta_j^i)$  und  $d_{j_2}^i({}_1\Delta_j^i) > d_j^i({}_1\Delta_j^i)$ , auch  $w\Delta_j^i < \Delta_{j,j_2}^i \leq \Delta_{j,j_1}^i < {}_1\Delta_j^i$  gelten.

Das heißt  $j_1$  und  $j_2$  sind  $b$ -Zeugen von  $j$  und wegen der vorausgesetzten Eigenschaften für  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ , können mit dem zuvor gezeigten Teil weder  $j_1$  noch  $j_2$   $a$ -Zeugen für  $j$  darstellen.  $\square$

Das vorangegangene Lemma gibt eine weitere Charakterisierung von Zeugen für einen  $i$ -gültigen Index  $j$ . Es zeigt, dass es ausreicht einen  $i$ -gültigen Index  $j_1$  oder zwei  $i$ -gültige Indizes  $j_1, j_2$  zu finden, deren Geraden  $d_{j_1}^i$  bzw.  $d_{j_1}^i$  und  $d_{j_2}^i$  die Gerade  $d_j^i$  im Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  überdecken, um die Nichtmitgliedschaft von  $j$  in  $L$  zu bezeugen. Das Lemma zeigt außerdem, dass  $L$  gerade die  $i$ -gültigen Indizes  $j$  enthält, welche im zugehörigen Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  nicht vollständig überdeckt sind, das heißt in einem nichttrivialen Teilintervall von  $[0, \infty)$  sichtbar sind, also dort mit der oberen Hülle aller Geraden  $i$ -gültiger Indizes und  $w_i$  übereinstimmen, wenn  $L$  bezüglich  $i$  geordnet ist.

Eine Menge von Indizes, deren Geraden die Gerade  $d_j^i$  im Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  überdecken, nennen wir im Folgenden eine *überdeckende Menge* von Indizes für  $j$ . Da wir aufgrund der Natur von Geraden in einer überdeckenden Menge von  $j$  immer eine überdeckende Teilmenge von  $j$  finden, welche eine Kardinalität von höchstens zwei hat, reicht es aus, eine überdeckende Menge von  $j$  beliebiger Kardinalität anzugeben, um die Nichtmitgliedschaft von  $j$  in  $L$  zu belegen.

**Lemma 3.18.** *Ist  $L$  geordnet bezüglich  $i$  und ist  $j$  ein  $i$ -gültiger Index mit  $j \notin L$ , dann gibt es entweder einen  $a$ -Zeugen  $j_1 \in L$  von  $j$ , oder zwei  $b$ -Zeugen  $j_1, j_2 \in L$  von  $j$ .*

*Beweis.* Da  $j \notin L$  ist, gibt es nach Definition 3.15 entweder einen  $a$ -Zeugen  $j_1$  oder zwei  $b$ -Zeugen  $j_1, j_2$  von  $j$ . Wir setzen  $M = \{j_1\}$ , falls ein  $a$ -Zeuge  $j_1$  für  $j$  existiert oder  $M = \{j_1, j_2\}$ , falls zwei  $b$ -Zeugen  $j_1, j_2$  für  $j$  existieren. Nach Lemma 3.17 gilt, dass  $M$  eine überdeckende Menge für  $j$  bildet. Falls für alle Indizes  $j' \in M$  gilt  $j' \in L$ , gilt die Aussage des Lemmas.

Falls ein  $j' \in M$  existiert mit  $j' \notin L$ , so entfernen wir  $j'$  aus  $M$  und fügen stattdessen die Zeugen von  $j'$  zu  $M$  hinzu. Man mache sich klar, dass  $M$  nach Lemma 3.17 immer noch eine überdeckende Menge für  $j$  bildet. Den vorangegangenen Schritt wiederholen wir so lange, wie ein  $j' \in M$  existiert mit  $j' \notin L$ . Da die Anzahl der Sites endlich ist und wir somit irgendwann Zeugen erhalten müssen, die im Intervall  $[0, \infty)$  sichtbar sind, also in diesem Intervall mit der oberen Hülle übereinstimmen und somit in  $L$  enthalten sein müssen, ist dieses Verfahren erschöpfend und wir erhalten schließlich eine endliche überdeckende Menge von Indizes  $M$  für  $j$ , deren Indizes alle in  $L$  enthalten sind.

Von dieser endlichen Menge  $M$  sei  $M'$  eine kleinste Teilmenge, welche immer noch eine überdeckende Menge für  $j$  ist. Die Menge  $M'$  enthält aufgrund der Natur von Geraden höchstens zwei Indizes. Diese Indizes (oder dieser Index) sind nach Lemma 3.17 wiederum Zeugen für  $j$ .  $\square$

**Lemma 3.19.** *Ist  $L$  geordnet bezüglich  $i$  und der Index  $j$   $i$ -gültig, dann ist ein  $i$ -gültiger Index  $j_1$  mit  $j_1 \prec_i j$  ein  $a$ -Zeuge von  $j$ , falls  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_{j_1})$  oder  $\Delta_{j,j_1}^i \leq w\Delta_{j_1}^i$  oder  $\Delta_{j,j_1}^i = \perp$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $j_1$  wie im Lemma. Da  $j_1 \prec_i j$  ist, gilt  $w\Delta_{j_1}^i \leq w\Delta_j^i$ .

**Fall 1:** Falls  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_{j_1})$  ist, gilt nach Lemma 3.13, dass  ${}_1\Delta_j^i < {}_1\Delta_{j_1}^i$  ist. Damit ist  $j_1$   $a$ -Zeuge von  $j$ .

**Fall 2:** Sei  $\Delta_{j,j_1}^i \leq w\Delta_{j_1}^i$  oder  $\Delta_{j,j_1}^i = \perp$ .

**Fall 2.1:** Falls  $w\Delta_{j_1}^i = w\Delta_j^i$  ist, gilt wegen der Voraussetzung  $j_1 \prec_i j$  und nach Definition von " $\prec_i$ " die Aussage  $\mu(s_{w_i}, s_j) < \mu(s_{w_i}, s_{j_1})$ . Das heißt  $j_1$  ist laut Fall 1 ein  $a$ -Zeuge von  $j$ .

**Fall 2.2:** Falls  $w\Delta_{j_1}^i < w\Delta_j^i$  ist, folgt  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) > d_j^i(w\Delta_j^i)$ .

Falls  $\Delta_{j,j_1}^i \leq w\Delta_{j_1}^i$  ist, dann gilt nach Voraussetzung insbesondere  $\Delta_{j,j_1}^i < w\Delta_j^i$ . Wegen  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) > d_j^i(w\Delta_j^i)$  verläuft  $d_j^i$  also ab  $w\Delta_j^i$  unter  $d_{j_1}^i$ . Deshalb überdeckt  $d_{j_1}^i$  die Gerade  $d_j^i$  im Intervall  $[w\Delta_j^i, {}_1\Delta_j^i]$  und somit ist  $j_1$  nach Lemma 3.17 ein  $a$ -Zeuge von  $j$ .

Falls  $\Delta_{j,j_1}^i = \perp$  ist, sind  $d_j^i$  und  $d_{j_1}^i$  parallel und wegen  $d_{j_1}^i(w\Delta_j^i) > d_j^i(w\Delta_j^i)$  überdeckt  $d_{j_1}^i$  die Gerade  $d_j^i$  und somit ist  $j_1$  nach Lemma 3.17 ein  $a$ -Zeuge von  $j$ .  $\square$

**Lemma 3.20.** *Ist  $L$  geordnet bezüglich  $i$  und sind  $j_1, j_2 \in L$  und gilt  $j_1 \prec_i j_2$ , dann gilt  $\mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2})$  und  $\|p - s_{j_1}\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$ .*

*Beweis.* Da  $j_1, j_2 \in L$  sind, sind diese  $i$ -gültig. Angenommen es wäre  $\mu(c_i, s_{j_1}) \geq \mu(c_i, s_{j_2})$ , dann gilt insbesondere  $\mu(c_i, s_{j_1}) > \mu(c_i, s_{j_2})$ , sonst wäre  $j_1 = j_2$ . Dann wäre aber  $j_1$  nach Lemma 3.19  $a$ -Zeuge von  $j_2$ , und somit  $j_2 \notin L$ , was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. Also gilt  $\mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2})$ .

Da  $j_1 \prec_i j_2$  ist, gilt auch  $w\Delta_{j_1}^i \leq w\Delta_{j_2}^i$  und somit gilt

$$\begin{aligned} d_{j_1}^i(w\Delta_{j_2}^i) &\geq d_{j_2}^i(w\Delta_{j_2}^i) \\ \iff \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_1}) - w\Delta_{j_2}^i}{\|p - s_{j_1}\|_1} &\geq \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_2}) - w\Delta_{j_2}^i}{\|p - s_{j_2}\|_1} \end{aligned}$$

Da nach Lemma 3.11 gilt  $d_{j_2}^i(w\Delta_{j_2}^i) \geq 1$  und somit auch  $d_{j_1}^i(w\Delta_{j_2}^i) \geq 1$  ist, muss wegen  $\mu(c_i, s_{j_1}) < \mu(c_i, s_{j_2})$  die Aussage  $\|p - s_{j_1}\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$  gelten, damit obige Ungleichung erfüllt ist.  $\square$

Ist  $L$  geordnet bezüglich  $i$ , dann gilt nach Lemma 3.20 für  $i$ -gültige Indizes  $j_1, j_2 \in L$  mit  $j_1 \prec_i j_2$ , dass  $\|p - s_{j_1}\|_1 < \|p - s_{j_2}\|_1$  ist. Da  $d_{j_1}^i$  somit schneller fällt als  $d_{j_2}^i$ , folgt insbesondere  $d_{j_1}^i(\Delta) > d_{j_2}^i(\Delta)$  für  $\Delta < \Delta_{j_1, j_2}^i$  und  $d_{j_1}^i(\Delta) < d_{j_2}^i(\Delta)$  für  $\Delta > \Delta_{j_1, j_2}^i$ .

**Lemma 3.21.** *Sei  $L$  geordnet bezüglich  $i$  und für  $t \leq k$  Indizes  $j_1, \dots, j_t \in L$  stehe  $j_a$  in  $L$  vor  $j_b$ , falls  $a < b$  ist. Für den  $r$ -ten Eintrag  $j_r$  in  $L$  gilt dann  $\Delta_{j_r, j_a}^i < \Delta_{j_r, j_b}^i$ , falls  $a < b$  ist. Insbesondere gilt dann für  $r \notin \{1, t\}$  dass  $\Delta_{j_{r-1}, j_r}^i < \Delta_{j_r, j_{r+1}}^i$  ist.*

Außerdem gilt für nichttriviale Intervalle  $I_r$  der Zusammenhang

$$d_{j_r}^i(\Delta) \geq d_j^i(\Delta), \text{ für } \Delta \in I_r, \forall j \in L.$$

Es gilt  $I_r = [\Delta_{j_{r-1}, j_r}^i, \Delta_{j_r, j_{r+1}}^i]$  für  $r \notin \{1, t\}$ . Für  $r \in \{1, t\}$  ist  $I_r = (-\infty, \Delta_{j_r, j_{r+1}}^i]$  bzw.  $I_r = [\Delta_{j_{r-1}, j_r}^i, \infty)$ .

*Beweis.* Für die Indizes  $j_1, \dots, j_t \in L$  zeigen wir zuerst, dass für den  $r$ -ten Eintrag  $j_r$  in  $L$  die Aussage  $\Delta_{j_r, j_a}^i < \Delta_{j_r, j_b}^i$  gilt, falls  $a < b$  ist.

Angenommen es wäre nicht  $\Delta_{j_r, j_a}^i < \Delta_{j_r, j_b}^i$ . Dann gilt  $\Delta_{j_r, j_b}^i \leq \Delta_{j_r, j_a}^i$  oder  $\Delta_{j_r, j_a}^i = \perp$  oder  $\Delta_{j_r, j_b}^i = \perp$ . Falls  $\Delta_{j_r, j_a}^i = \perp$  bzw.  $\Delta_{j_r, j_b}^i = \perp$  ist, dann ist nach Lemma 3.19  $j_a$  Zeuge von  $j_r$  bzw.  $j_r$  Zeuge von  $j_b$ . Das ist ein Widerspruch zu  $j_r, j_b \in L$ . Seien also  $\Delta_{j_r, j_b}^i \leq \Delta_{j_r, j_a}^i$  und  $\Delta_{j_r, j_a}^i, \Delta_{j_r, j_b}^i \neq \perp$ . Wir unterscheiden die Fälle  $r < a < b$  (Fall 1),  $a < b < r$  (Fall 2) und  $a < r < b$  (Fall 3).

**Fall 1:** Falls  $r < a < b$  ist, dann ist  $j_r \prec_i j_a \prec_i j_b$ , da  $L$  geordnet bezüglich  $i$  ist. Aus Lemma 3.20 folgt, dass die Gerade  $d_{j_r}^i$  schneller fällt als die Gerade  $d_{j_a}^i$ , welche wiederum schneller fällt als die Gerade  $d_{j_b}^i$ . Deshalb verläuft  $d_{j_r}^i$  bis  $\Delta_{j_r, j_a}^i$  über  $d_{j_a}^i$  und wegen der Voraussetzung auch bis  $\Delta_{j_r, j_b}^i$ . Es gilt also  $d_{j_r}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) \geq d_{j_a}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i)$ .

Es gilt  $d_{j_b}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) = d_{j_r}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i)$ . Somit gilt  $d_{j_b}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) = d_{j_r}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) \geq d_{j_a}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i)$  und deshalb  $d_{j_b}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) \geq d_{j_a}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i)$ . Darum verläuft  $d_{j_b}^i$  ab  $\Delta_{j_r, j_b}^i$  über  $d_{j_a}^i$ . Das heißt  $d_{j_r}^i$  überdeckt  $d_{j_a}^i$  im Intervall  $[-\infty, \Delta_{j_r, j_b}^i]$  und  $d_{j_b}^i$  überdeckt  $d_{j_a}^i$  im Intervall  $[\Delta_{j_r, j_b}^i, \infty]$ . Damit wäre  $\{j_r, j_b\}$  eine überdeckende Menge für  $j_a$  und somit nach Lemma 3.17  $j_a \notin L$ . Widerspruch.

**Fall 2:** Falls hingegen  $a < b < r$  ist, dann ist  $j_a \prec_i j_b \prec_i j_r$ , da  $L$  geordnet bezüglich  $i$  ist. Aus Lemma 3.20 folgt, dass die Gerade  $d_{j_a}^i$  schneller fällt als die Gerade  $d_{j_b}^i$ , welche wiederum schneller fällt als die Gerade  $d_{j_r}^i$ . Das heißt  $d_{j_r}^i$  verläuft ab  $\Delta_{j_r, j_b}^i$  über  $d_{j_b}^i$ . Außerdem verläuft  $d_{j_a}^i$  wegen der Annahme bis  $\Delta_{j_r, j_b}^i$  über  $d_{j_r}^i$ .

Also ist  $d_{j_a}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) \geq d_{j_r}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) = d_{j_b}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i)$ , also insbesondere  $d_{j_a}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i) \geq d_{j_b}^i(\Delta_{j_r, j_b}^i)$ . Das heißt  $d_{j_a}^i$  überdeckt  $d_{j_b}^i$  im Intervall  $[-\infty, \Delta_{j_r, j_b}^i]$  und  $d_{j_r}^i$  überdeckt  $d_{j_b}^i$  im Intervall  $[\Delta_{j_r, j_b}^i, \infty]$ . Also wäre  $\{j_r, j_a\}$  eine überdeckende Menge für  $j_b$  und deshalb nach Lemma 3.17  $j_b \notin L$ . Widerspruch.

**Fall 3:** Falls nun  $a < r < b$  ist, dann ist  $j_a \prec_i j_r \prec_i j_b$ , da  $L$  geordnet bezüglich  $i$  ist. Aus Lemma 3.20 folgt, dass die Gerade  $d_{j_a}^i$  schneller fällt als die Gerade  $d_{j_r}^i$ , welche wiederum schneller fällt als die Gerade  $d_{j_b}^i$ . Das heißt  $d_{j_a}^i$  überdeckt  $d_{j_r}^i$  im Intervall  $[-\infty, \Delta_{j_r, j_a}^i]$  und  $d_{j_b}^i$  überdeckt  $d_{j_r}^i$  im Intervall  $[\Delta_{j_r, j_b}^i, \infty]$ . Wegen der Annahme folgt also, dass  $\{j_a, j_b\}$  eine überdeckende Menge für  $j_r$  wäre, weshalb  $j_b \notin L$  wäre. Widerspruch.

Gegeben einen Index  $j_r \in L$ , gilt also für alle  $j_a \in L$ , die vor  $j_r$  stehen, und alle  $j_b \in L$ , die hinter  $j_r$  stehen, dass  $\Delta_{j_r, j_a}^i < \Delta_{j_r, j_b}^i$  ist. Da  $d_{j_a}^i$  bis  $\Delta_{j_r, j_a}^i$  nach Lemma 3.20 über  $d_{j_r}^i$  verläuft und  $d_{j_b}^i$  ab  $\Delta_{j_r, j_b}^i$  über  $d_{j_r}^i$  verläuft, gibt es ein Intervall  $I_r$ , für das gilt

$$d_{j_r}^i(\Delta) \geq d_j^i(\Delta), \text{ für } \Delta \in I_r, j \in L.$$

Da die Aussage für jeden Index  $j_1, \dots, j_t \in L$  gilt, erhalten wir insbesondere die Aussage  $\Delta_{j_{r-1}, j_r}^i < \Delta_{j_r, j_{r+1}}^i$  für  $j_r \in L$ , mit  $r \notin \{1, t\}$ . Deshalb gilt  $I_r = [\Delta_{j_{r-1}, j_r}^i, \Delta_{j_r, j_{r+1}}^i]$  und es ist  $I_r = (-\infty, \Delta_{j_r, j_{r+1}}^i]$  oder  $I_r = [\Delta_{j_{r-1}, j_r}^i, \infty)$  für  $r \in \{1, t\}$ .  $\square$

Lemma 3.21 verfeinert das Bild der Struktur der in  $L$  gespeicherten Indizes. Bilden wir die obere Hülle der  $d_j^i$  für  $j \in L$ , so sehen wir nun ein, dass jedes der  $d_j^i$  in einem nichttrivialen Intervall sichtbar ist (das heißt mit der oberen Hülle übereinstimmt) und dass die  $d_j^i$  in  $\Delta$ -Richtung in der selben Reihenfolge auf der oberen Hülle sichtbar sind, wie sie in  $L$  vorkommen (siehe Abbildung 3.8).

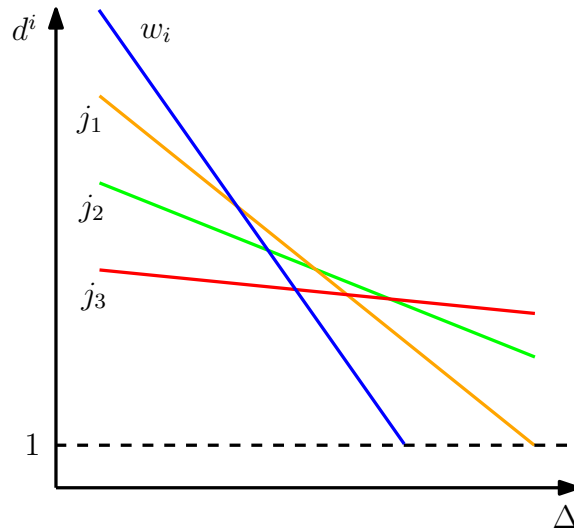


Abbildung 3.8: Zu sehen ist die Struktur der  $d_j^i$  für  $j \in L$ . Jedes der  $d_j^i$  ist in der oberen Hülle der  $d_j^i$  für  $j \in L$  genau einmal sichtbar und zwar in der Reihenfolge ihres Auftretens in  $L$ . In diesem Beispiel gilt  $j_1 \prec_i j_2 \prec_i j_3$ .

Wir verallgemeinern nun einige zuvor gemachte Definitionen und zeigen die Erweiterbarkeit der bisher getroffenen Aussagen auf diese Verallgemeinerungen.

Für einen Index  $j$  mit  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  bezeichnen wir einen Index  $x$  mit  $s_x \in P(c_i, s_j)$  als  $(i, j)$ -maximal, falls für alle Indizes  $j'$  mit  $s_{j'} \in P(c_i, s_j)$  gilt  $\delta_i^{cw}(s_x) \geq \delta_i^{cw}(s_{j'})$  oder  $\delta_i^{cw}(s_x) = \delta_i^{cw}(s_{j'})$  und  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_x)$ . Falls kein Index in  $P(c_i, s_j)$  existiert, sei  $x = \perp$ . Sonst ist der  $(i, j)$ -maximale Index  $x$  eindeutig.

Wir bezeichnen einen Index  $j'$ , für den gilt  $s_{j'} \in P(s_x, s_j) \setminus \{s_x\}$ , wobei  $x$  der  $(i, j)$ -maximale Index ist, als  $(i, j)$ -gültig.

Für den  $(i, j)$ -maximalen Index  $x$  definieren wir für zwei  $(i, j)$ -gültige Indizes  $j_1, j_2$  die Ordnung  $j_1 \prec_{i,j} j_2$  analog zu Definition 3.14, indem wir  $w_i$  mit  $x$  ersetzen.

Wir nennen  $L$  geordnet bezüglich  $(i, j)$ , falls  $L$  bezüglich " $\prec_{i,j}$ " sortiert ist und ein  $(i, j)$ -gültiger Index  $j'$  genau dann in  $L$  enthalten ist, falls Folgendes gilt

- a) Es gibt keinen  $(i, j)$ -gültigen Index  $j_1$ , so dass  $j_1 \prec_{i,j} j'$  und  ${}_1\Delta_j^i < {}_1\Delta_{j_1}^i$  ist.
- b) Es gibt keine  $(i, j)$ -gültigen Indizes  $j_1, j_2$ , so dass  $j_1 \prec_{i,j} j' \prec_{i,j} j_2$  und  $\Delta_{x,j_2}^i < \Delta_{j',j_2}^i \leq \Delta_{j',j_1}^i$  ist.

Gilt dabei Aussage a) bzw. b), nennen wir auch hier  $j_1$  einen  $a$ -Zeugen bzw.  $j_1, j_2$   $b$ -Zeugen.

**Lemma 3.22.** *Die bisher gemachten Aussagen ab Lemma 3.16 bleiben gültig, wenn wir für einen  $i$ -gültigen Index  $j$  in diesen Aussagen den Index  $w_i$  mit dem  $(i, j)$ -maximalen Index  $x$  ersetzen, den Index  $m_i$  mit  $j$  ersetzen (die Indizes  $w_{i-1}$  oder  $m_{i-1}$  ersetzen wir aber nicht, so zum Beispiel in Lemma 3.16), für einen  $(i, j)$ -gültigen Index  $j'$  den Wert  ${}_w\Delta_{j'}^i$  mit  $\Delta_{x,j'}^i$  ersetzen, die Ordnung " $\prec_i$ " mit der Ordnung " $\prec_{i,j}$ " ersetzen, anstatt  $i$ -gültiger Indizes  $(i, j)$ -gültige Indizes fordern und statt der Ordnung von  $L$  bezüglich  $i$  die Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$  fordern (ist die Ordnung von  $L$  bezüglich  $i - 1$  gefordert, bleibt dies ebenfalls unverändert). Falls in den Aussagen bereits ein Index  $j$  in anderem Kontext vorkommt, benennen wir diesen um.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass wir die verallgemeinerte Definition auf die bisherige zurückführen können. Es ist klar, dass für  $j = m_i$  und  $x$   $(i, j)$ -maximal der Zusammenhang  $x = w_i$  gilt, die Definition von " $(i, j)$ -gültig" mit der Definition von " $i$ -gültig" übereinstimmt, die Ordnung " $\prec_i$ " mit der Ordnung " $\prec_{i,j}$ " übereinstimmt und die Ordnung von  $L$  bezüglich  $i$  gleichbedeutend ist mit der Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$ .

Nun definieren wir eine Teilmenge  $S'$  der Menge von Sites  $S$ , indem wir  $S' = S \setminus \{s \in S \mid s \in P(s_j, s_{m_i}) \setminus \{s_j\}\}$  setzen, also in  $S'$  gegenüber  $S$  alle Sites auf  $P(s_j, s_{m_i}) \setminus \{s_j\}$  weglassen. Legen wir  $S'$  statt  $S$  für das Feed-link-Problem zu Grunde, gilt der Zusammenhang  $j = m_i$ . Das heißt die Beweise der bisher getroffenen Aussagen sind für die abgeänderte Menge von Sites  $S'$  auch auf die gerade eingeführten, verallgemeinerten Begriffe anwendbar, da diese dann mit den speziellen übereinstimmen.

Da die Sites, die sich nicht auf  $P(c_i, s_{m_i})$  befinden, in den zuvor gemachten Aussagen und Beweisen nicht vorkommen, bleiben die erhaltenen Ergebnisse, bei der Rückübertragung auf die ursprüngliche Problemstellung mit der Menge von Sites  $S$ , bestehen.  $\square$

Das Ergebnis von Lemma 3.9 lässt sich mit etwas Vorsicht ebenfalls übertragen, es gilt dann für den  $(i, j)$ -maximalen Index  $x$  die Aussage  $s_x \in P(s_{w_{i-1}}, s_j)$ .

### 3.2.3 Implementierung des Linearzeitalgorithmus

Neben den üblichen Listenoperationen soll  $L$  die Operationen bereitstellen, die in Algorithmus 2 und 3 beschrieben sind. Auf Basis von  $L$  geben wir den Algorithmus 4 zur Berechnung von  $w_0, \dots, w_{l-1}$  an. Dieser benutzt Algorithmus 1 zur Bestimmung von  $m_1, \dots, m_{l-1}$ .



**Algorithmus 2:** Listenoperation next

---

```

input      : Index  $i$  und Index  $j$  der Site, mit der bisher größten Streckung bezüglich
                eines Feed-links an  $c_i$ .
output    : Index in  $L$ , dessen Site unter allen Sites von  $i$ -gültigen Indizes in  $L$  die
                größte Streckung hat.

1 if  $L = \emptyset$  then
2   | return  $j$ 
3 else
4   |  $j_{head} \leftarrow L.head()$ 
5   | if  $\mu(c_i, s_{j_{head}}) > \frac{\mu(P)}{2}$  then                                // falls  $s_{j_{head}} \notin P(c_i, s_{m_i})$  ist
6   |   |  $L.delete(j_{head})$ 
7   |   | return  $L.next(i, j)$ 
8   | else if  $\delta_i^{cw}(s_{j_{head}}) \geq \delta_i^{cw}(s_j)$  then
9   |   |  $L.delete(j_{head})$ 
10  |   | return  $L.next(i, j_{head})$ 
11  | else
12  |   | return  $j$ 

```

---

**Algorithmus 3:** Listenoperation insert

---

```

input      : Index  $i$  des aktuellen Kandidaten  $c_i$ , einzufügender Index  $j$  und
                 $(i, j)$ -maximaler Index  $x$ .

1 if  $L = \emptyset$  then
2   |  $L.append(j)$ 
3 else
4   |  $j_{tail} \leftarrow L.tail()$ 
5   |  $j_{pred} \leftarrow L.pred(j_{tail})$ 
6   | if  $j \prec_{i,j} j_{tail}$  und  ${}_1\Delta_{j_{tail}}^i < {}_1\Delta_j^i$  then                                //  $j$  ist  $a$ -Zeuge von  $j_{tail}$ 
7   |   |  $L.delete(j_{tail})$ 
8   |   |  $L.insert(i, j, x)$ 
9   | else if  $j_{pred} \prec_{i,j} j_{tail} \prec_{i,j} j$  und  $\Delta_{x,j}^i < \Delta_{j_{tail},j}^i \leq \Delta_{j_{tail},j_{pred}}^i$  then    //  $j$  und  $j_{pred}$ 
                sind  $b$ -Zeugen von  $j_{tail}$ 
10  |   |  $L.delete(j_{tail})$ 
11  |   |  $L.insert(i, j, x)$ 
12  | else
13  |   |  $L.append(j)$ 

```

---

---

**Algorithmus 4:** Berechne  $w_0, \dots, w_{l-1}$ 


---

**input** : Polygon  $P$ , Punkt  $p$ , Menge von Sites  $S$  indiziert nach der Reihenfolge ihres Vorkommens auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn.

**output** : Indizes  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, l-1$  entsprechend Definition 3.8.

```

1  $\{s_0, \dots, s_{k-1}\} \leftarrow S \setminus \{s \in S \mid s \text{ ist nicht erste Site im UZS auf einer steigenden Folge}\}$ 
2 Berechne  $c_0, \dots, c_{l-1}$  //  $s_0$  folgt direkt auf  $c_0$  s. Abschnitt 3.1
3 Berechne  $\mu(c_0, s_j), \|p - s_j\|_1$  für  $j = 0, \dots, k-1$  // Vorberechnung s. Abschnitt 3.1
4 Berechne  $\mu(c_0, c_i), \|p - c_i\|_1, f_i$  für  $i = 0, \dots, l-1$  Berechne  $m_0$  // Durch Iteration über
   alle Sites
5 Lege doppelt verkettete Liste  $L$  an
6 if  $\mu(c_0, s_{m_0}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  then // Initialisierung von  $L$  und  $w_0$ 
7    $x \leftarrow \perp$ 
8   for  $j \bmod k$  from  $f_0$  to  $m_0$  do
9     if  $\delta_0^{cw}(s_j) \geq \delta_0^{cw}(s_x)$  then
10       $x \leftarrow j$ 
11       $L.\text{flush}()$ 
12     else
13        $L.\text{insert}(0, j, x)$ 
14    $w_0 \leftarrow x$ 
15 else
16    $w_0 \leftarrow \perp$ 
17 for  $i$  from 1 to  $l-1$  do
18    $m_i \leftarrow \text{calculateMiddle}(i)$  // Berechnung von  $m_i$ 
19   if  $\mu(c_i, s_{m_i}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  then // Falls für  $m_i$  Bedingung 3.1 gilt
20     if  $\mu(c_{i-1}, c_i) > \frac{\mu(P)}{2}$  then // Fall B
21        $x \leftarrow \perp$ 
22       for  $j \bmod k$  from  $f_i$  to  $m_i$  do
23         if  $\delta_i^{cw}(s_j) \geq \delta_i^{cw}(s_x)$  then
24            $x \leftarrow j$ 
25            $L.\text{flush}()$ 
26         else
27            $L.\text{insert}(i, j, x)$ 
28        $w_i \leftarrow x$ 
29     else // Fall A
30       if  $\mu(c_i, s_{w_{i-1}}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  then // Betrachtung der  $s_j \in P(c_{i-1}, s_{m_{i-1}})$ 
31          $x \leftarrow L.\text{next}(i, w_{i-1})$ 
32       else
33          $x \leftarrow L.\text{next}(i, \perp)$ 
34        $j_{\text{start}} \leftarrow m_{i-1} + 1 \bmod k$ 
35       for  $j \bmod k$  from  $j_{\text{start}}$  to  $m_i$  do
36         if  $\delta_i^{cw}(s_j) \geq \delta_i^{cw}(s_x)$  then
37            $x \leftarrow j$ 
38            $L.\text{flush}()$ 
39         else
40            $L.\text{insert}(i, j, x)$ 
41        $w_i \leftarrow x$ 
42     else // Falls für  $m_i$  Bedingung 3.2 gilt
43        $w_i \leftarrow \perp$ 
44        $L.\text{flush}()$ 

```

---

Um Satz 3.25 zu beweisen, welcher die Korrektheit und Laufzeit von Algorithmus 4 zeigt, benötigen wir zunächst folgende Lemmata, welche notwendige Aussagen über Algorithmus 2 und 3 liefern.

**Lemma 3.23.** *Ist  $L$  geordnet bezüglich  $i - 1$  und ist  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  (Fall A), dann gibt der Aufruf  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$ , mit  $j_{\text{init}} = w_{i-1}$ , falls  $s_{w_{i-1}} \in P(c_i, s_{m_{i-1}})$  und  $j_{\text{init}} = \perp$ , sonst, den  $(i, m_{i-1})$ -maximalen Index  $x \in L$  zurück. Nach der Abarbeitung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  ist  $L$  geordnet bezüglich  $(i, m_{i-1})$ .*

*Beweis.* Falls  $L$  leer ist, wird in Zeile 1 der Index  $j_{\text{init}}$  zurückgegeben und die Aussage gilt, da es keine  $(i - 1)$ -gültigen Indizes, also keine Sites auf  $P(c_{i-1}, s_{m_{i-1}})$  gibt. Falls  $L$  nicht leer ist, werden in Zeile 5 zunächst alle Indizes  $j$ , für die gilt  $\mu(c_i, s_j) > \frac{\mu(P)}{2}$  vom Anfang von  $L$  rekursiv gelöscht. Da für alle Indizes  $j \in L$  gilt  $\mu(c_{i-1}, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ , folgt aus  $\mu(c_{i-1}, c_i) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  die Aussage (siehe auch Abbildung 3.4)

$$s_j \in P(c_{i-1}, c_i) \setminus \{c_i\} \Leftrightarrow \mu(c_i, s_j) > \frac{\mu(P)}{2} \quad \forall j \in L.$$

Da nach Lemma 3.20 die Indizes in  $L$  bezüglich ihrer Entfernung zu  $c_{i-1}$  auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn sortiert sind, werden also *genau* die Indizes in  $L$  gelöscht, für die gilt  $s_j \in P(c_{i-1}, c_i) \setminus \{c_i\}$ . Die gelöschten Indizes kommen nicht für den  $(i, m_{i-1})$ -maximalen Index  $x$  in Frage, da sie nicht  $(i, m_{i-1})$ -gültig sein können. Da  $L$  laut Definition 3.15 nur Indizes auf  $P(c_{i-1}, s_{m_{i-1}})$  enthielt, liegen die verbleibenden Indizes auf  $P(c_i, s_{m_{i-1}})$ .

Ist  $L$  nach dem Löschen der Indizes von Sites, die auf  $P(c_{i-1}, c_i) \setminus \{c_i\}$  liegen, leer, dann enthielt  $L$  keine  $(i - 1)$ -gültigen Indizes auf  $P(c_i, s_{m_{i-1}})$ . Angenommen es gäbe eine Site  $s_j \in P(c_i, s_{m_{i-1}})$ . Dann wäre  $j \notin L$  und müsste einen  $a$ -Zeugen oder zwei  $b$ -Zeugen haben, die nach Lemma 3.18 in  $L$  sind und deren zugehörige Sites somit auf  $P(c_{i-1}, c_i) \setminus \{c_i\}$  gelegen haben. Nach Lemma 3.13 können diese jedoch keine überdeckende Menge von  $j$  bilden und somit wäre  $j \in L$ . Widerspruch. In diesem Fall gibt es also keine Sites auf  $P(c_i, s_{m_{i-1}})$  und es wird in Zeile 1 wieder  $j_{\text{init}}$  zurückgegeben und die Aussage gilt.

Falls sonst  $j \in L$  mit  $s_j \in P(c_i, s_{m_{i-1}})$  existieren, werden diese in Zeile 8 solange rekursiv iteriert, bis ein Index  $x$  erreicht wird, so dass die Site, die zu dessen Nachfolger-Index  $\text{succ}(x)$  gehört, eine echt kleinere Streckung aufweist, also  $\delta_i^{cw}(s_x) > \delta_i^{cw}(s_{\text{succ}(x)})$  gilt, oder  $x$  schon der letzte Index in  $L$  war.

Die Sites aller Indizes  $j \neq x$ , die wir dabei überspringen und löschen, haben durch die Abfrage in Zeile 8 eine Streckung höchstens so groß wie  $s_x$ , es gilt also  $\delta_i^{cw}(s_x) \geq \delta_i^{cw}(s_j)$ . Da für diese Sites außerdem gilt  $j \prec_{i-1} x$ , da  $j$  in  $L$  vor  $x$  stand, ist nach Lemma 3.20  $\mu(c_{i-1}, s_j) < \mu(c_{i-1}, s_x)$  und somit  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_x)$ .

Wir zeigen noch, dass für alle Indizes  $j \in L$ , die in  $L$  hinter  $x$  stehen, gilt  $\delta_i^{cw}(s_x) > \delta_i^{cw}(s_j)$ . Falls es keine Nachfolger von  $x$  gibt, ist die Aussage erfüllt. Seien also  $j_1, \dots, j_t \in L$  die Indizes, die (in der Reihenfolge der Nummerierung) in  $L$  auf  $x$  folgen. Nach Lemma 3.20 gilt, dass  $d_{j_r}^{i-1}$  für  $r \in \{1, \dots, t\}$  vor  $\Delta_{x, j_r}^{i-1}$  unter  $d_x^{i-1}$  verläuft. Sei  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$ . Da für  $j_1 = \text{succ}(x)$  laut Algorithmus gilt  $\delta_i^{cw}(s_x) > \delta_i^{cw}(s_{j_1})$ , also insbesondere  $d_x^{i-1}(\Delta) > d_{j_1}^{i-1}(\Delta)$  ist, muss  $\Delta < \Delta_{x, j_1}^i$  sein. Nach Lemma 3.21 gilt außerdem  $\Delta_{x, j_1}^i < \Delta_{x, j_2}^i < \dots < \Delta_{x, j_t}^i$ . Also ist  $\Delta < \Delta_{x, j_r}^i$  für alle  $r \in \{1, \dots, t\}$  und somit  $\delta_i^{cw}(s_x) > \delta_i^{cw}(s_{j_r})$ .

Wir haben also für alle Indizes  $j \in L$  mit  $s_j \in P(c_i, s_{m_{i-1}})$  gezeigt, dass  $\delta_i^{cw}(s_x) > \delta_i^{cw}(s_j)$  oder  $\delta_i^{cw}(s_x) = \delta_i^{cw}(s_j)$  und  $\mu(c_i, s_j) < \mu(c_i, s_x)$  gilt. Nach Lemma 3.16 kamen nur die Indizes in  $L$  für den  $(i, m_{i-1})$ -maximalen Index in Frage, also ist  $x$   $(i, m_{i-1})$ -maximal. Abbildung 3.9 verdeutlicht die Arbeitsweise von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$ .

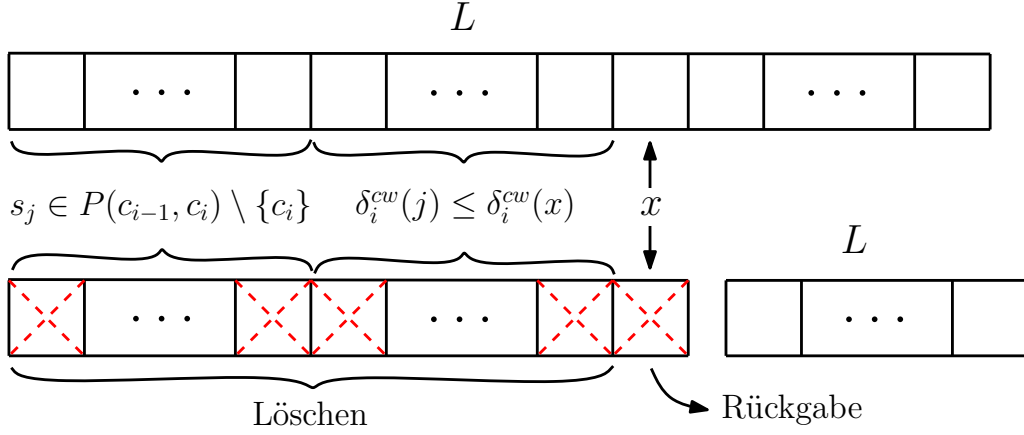


Abbildung 3.9: Die Abbildung zeigt den Zustand von  $L$  vor der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  (oben) und danach (unten). Vor der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  ist  $L$  geordnet bezüglich  $(i-1)$ . Alle Indizes  $j$ , für die gilt  $s_j \in P(c_{i-1}, c_i) \setminus \{c_i\}$  oder  $\delta_i^{cw}(s_j) \leq \delta_i^{cw}(s_x)$ , sowie der Index  $x$ , wobei  $x$  der  $(i, m_{i-1})$ -maximale Index ist, werden bei der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  gelöscht. Der Index  $x$  wird zurückgegeben. Nach der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  ist  $L$  geordnet bezüglich  $(i, m_{i-1})$ .

Nach der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  sind alle Indizes, die in  $L$  vor  $x$  standen, einschließlich  $x$  rekursiv gelöscht und da die Indizes in  $L$  nach Lemma 3.20 bezüglich ihrer Entfernung auf  $P$  im Uhrzeigersinn von  $c_{i-1}$  aus sortiert waren, liegen die verbleibenden Indizes auf  $P(s_x, s_{m_{i-1}}) \setminus \{s_x\}$ , sind also  $(i, m_{i-1})$ -gültig. Falls es keine oder nur einen  $(i, m_{i-1})$ -gültigen Index gibt, ist  $L$  geordnet bezüglich  $(i, m_{i-1})$ .

Sonst gilt nach Voraussetzung und Lemma 3.21 für zwei verbleibende Indizes  $j_1, j_2$  in  $L$  mit  $j_1 \prec_{i-1} j_2$  die Aussage  $\Delta_{x, j_1}^{i-1} \leq \Delta_{x, j_2}^{i-1}$ . Da  $j_1, j_2$  insbesondere  $i$ -gültig sind, gelten für  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$  die Zusammenhänge  $\Delta_{x, j_1}^i = \Delta_{x, j_1}^{i-1} - \Delta$  und  $\Delta_{x, j_2}^i = \Delta_{x, j_2}^{i-1} - \Delta$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{x, j_1}^{i-1} &\leq \Delta_{x, j_2}^{i-1} \\ \iff \Delta_{x, j_1}^{i-1} - \Delta &\leq \Delta_{x, j_2}^{i-1} - \Delta \\ \iff \Delta_{x, j_1}^i &\leq \Delta_{x, j_2}^i. \end{aligned}$$

Also gilt  $j_1 \prec_{i, j} j_2$ , woraus folgt, dass  $L$  geordnet bezüglich " $\prec_{i, j}$ " ist, wobei wir hier und im Folgenden abkürzend  $j := m_{i-1}$  setzen.

Wir zeigen nun noch die Äquivalenz, dass ein  $(i, j)$ -gültiger Index genau dann in  $L$  enthalten ist, wenn für ihn weder  $a$ -Zeugen noch  $b$ -Zeugen im Sinne der Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$  existieren.

Wir zeigen zuerst, dass nach der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  für die in  $L$  enthaltenen Indizes weder  $a$ -Zeugen noch  $b$ -Zeugen im Sinne der Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$  existieren. Da nach Voraussetzung keine Menge von  $(i-1)$ -gültigen Indizes existiert, welche einen Index  $j' \in L$  im Intervall  $[w\Delta_{j'}^{i-1}, 1\Delta_{j'}^{i-1}]$  überdeckt, existiert auch keine Menge von  $(i, j)$ -gültigen Indizes, welche  $j'$  im Intervall  $[\Delta_{x, j'}^{i-1}, 1\Delta_{j'}^{i-1}]$  überdeckt (wir legen dabei die Streckungsfunktionen  $d^{i-1}$  bezüglich eines Feed-links an  $c_{i-1}$  zugrunde), da die  $(i, j)$ -gültigen Indizes eine Teilmenge der  $(i-1)$ -gültigen Indizes sind (es ist  $P(s_x, s_{m_{i-1}}) \subseteq P(s_{w_{i-1}}, s_{m_{i-1}})$ , da nach Lemma 3.9 für den  $(i, m_{i-1})$ -maximalen Index  $x$  gilt  $s_x \in P(s_{w_{i-1}}, s_{m_{i-1}})$ ) und da  $[\Delta_{x, j'}^{i-1}, 1\Delta_{j'}^{i-1}] \subseteq [w\Delta_{j'}^{i-1}, 1\Delta_{j'}^{i-1}]$  ist.

Die Teilmengen-Beziehung der Intervalle gilt, da  ${}_w\Delta_{j'}^{i-1} \leq \Delta_{x,j'}^{i-1}$  ist. Das ist klar für  $x = w_{i-1}$  und für  $x \neq w_{i-1}$  wäre der Index  $x$  bei Annahme von  $\Delta_{x,j'}^{i-1} < {}_w\Delta_{j'}^{i-1}$  wegen  $x \prec_{i-1} j'$  nach Lemma 3.19 ein  $a$ -Zeuge von  $j'$ , im Sinne der Ordnung von  $L$  bezüglich  $i$ , also  $j' \notin L$ . Widerspruch.

Da für ein beliebiges  $\Delta'$ , eine beliebige Site  $s_j \in P(c_i, s_{m_i})$  und  $\Delta := \|p - c_{i-1}\|_1 + \mu(c_{i-1}, c_i) - \|p - c_i\|_1$  die Zusammenhänge  $d_j^{i-1}(\Delta' + \Delta) = d_j^i(\Delta')$  und  $\Delta_{x,j'}^{i-1} = \Delta_{x,j'}^i + \Delta$  gelten, ist insbesondere

$$d_j^{i-1}(\Delta_{x,j'}^{i-1}) = d_j^{i-1}(\Delta_{x,j'}^i + \Delta) = d_j^i(\Delta_{x,j'}^i)$$

und analog  $d_j^{i-1}({}_1\Delta_{j'}^{i-1}) = d_j^i({}_1\Delta_{j'}^i)$ . Deshalb existiert auch keine Menge von  $(i, j)$ -gültigen Indizes, welche  $j'$  im Intervall  $[\Delta_{x,j'}^i, {}_1\Delta_{j'}^i]$  überdecken, wenn wir Streckungsfunktionen  $d^i$  bezüglich eines Feed-links an  $c_i$  zugrunde legen. Also gibt es nach Lemma 3.17 für  $j'$  weder  $a$ -Zeugen noch  $b$ -Zeugen im Sinne der Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$ .

Zu zeigen bleibt noch, dass nach der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  ein  $(i, j)$ -gültiger Index  $j'$  mit  $j' \notin L$  einen  $a$ -Zeugen oder zwei  $b$ -Zeugen im Sinne der Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$  besitzt. Da nach der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  genau diejenigen Indizes in  $L$  verblieben sind, die  $(i, j)$ -gültig waren, war auch vor der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$   $j' \notin L$ , das heißt es war  $j \notin L$  für  $L$  geordnet bezüglich  $i - 1$ . Das heißt es gibt nach Voraussetzung und Lemma 3.18 einen  $a$ -Zeugen oder zwei  $b$ -Zeugen in  $L$  im Sinne der Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i - 1)$  für  $j'$ .

Falls  $j'$  einen  $a$ -Zeugen  $j_1 \in L$  für  $L$  geordnet bezüglich  $(i - 1)$  hat, dann gilt für diesen  $j_1 \prec_{i-1} j'$  und  ${}_1\Delta_{j'}^{i-1} < {}_1\Delta_{j_1}^{i-1}$  und somit  ${}_1\Delta_{j'}^i < {}_1\Delta_{j_1}^i$ . Aus Lemma 3.13 folgt damit außerdem  $\mu(c_i, s_{j'}) < \mu(c_i, s_{j_1})$ . Nach Lemma 3.9 gilt für den  $(i, m_{i-1})$ -maximalen Index  $x$ , dass  $s_x \in P(s_{w_{i-1}}, s_{m_{i-1}})$  ist. Da nach Voraussetzung  $j'$   $(i, j)$ -gültig ist, also  $s_{j'} \in P(s_x, s_{m_i}) \setminus \{s_x\}$  ist, sowie  $j_1$   $(i - 1)$ -gültig ist, also  $s_{j_1} \in P(s_{w_{i-1}}, s_{m_{i-1}})$  ist, folgt  $s_{j_1} \in P(s_x, s_{m_{i-1}}) \setminus \{s_x\}$ . Also ist  $j_1$  ebenfalls  $(i, j)$ -gültig. Wegen  $j_1 \prec_{i-1} j'$  gilt außerdem  $j_1 \prec_{i,j} j'$  und somit ist  $j_1$  nach Lemma 3.19 ein  $a$ -Zeuge im Sinne der Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$ .

Falls  $j'$  zwei  $b$ -Zeugen  $j_1, j_2 \in L$  für  $L$  geordnet bezüglich  $(i - 1)$  hat, dann gilt (ohne Einschränkung)  $j_1 \prec_{i-1} j' \prec_{i-1} j_2$  und  ${}_w\Delta_{j_2}^{i-1} < \Delta_{j',j_2}^{i-1} \leq \Delta_{j',j_1}^{i-1}$  und damit auch  $\Delta_{j',j_2}^i \leq \Delta_{j',j_1}^i$ .

Falls  $j_1$   $a$ -Zeuge von  $j'$  für  $L$  geordnet bezüglich  $(i - 1)$  ist, haben wir schon gezeigt, dass  $j_1$  auch  $a$ -Zeuge von  $j'$  für  $L$  geordnet bezüglich  $(i, j)$  ist. Wir gehen also davon aus, dass  $j_1$  kein  $a$ -Zeuge von  $j'$  ist. Dann ist  $\{j_1\}$  auch keine überdeckende Menge für  $j'$  (denn sonst wäre  $j_1$  laut Lemma 3.17  $a$ -Zeuge von  $j'$ ). Wegen  $j_1 \prec_{i-1} j'$  gilt  $d_{j_1}^{i-1}({}_w\Delta_{j'}^{i-1}) \geq d_{j'}^{i-1}({}_w\Delta_{j'}^{i-1})$ . Deshalb muss  $d_{j_1}^{i-1}$  schneller fallen als  $d_{j'}^{i-1}$  (sonst wäre  $\{j_1\}$  eine überdeckende Menge für  $j'$ ). Damit folgt  $d_{j_1}^{i-1}({}_1\Delta_{j'}^{i-1}) < d_{j'}^{i-1}({}_1\Delta_{j'}^{i-1})$  (sonst wäre  $\{j_1\}$  wieder eine überdeckende Menge für  $j'$ ).

Da  $\{j_1, j_2\}$  eine überdeckende Menge für  $j'$  ist, muss deshalb  $d_{j_2}^{i-1}({}_1\Delta_{j'}^{i-1}) \geq d_{j'}^{i-1}({}_1\Delta_{j'}^{i-1})$  gelten, womit  ${}_1\Delta_{j'}^{i-1} \leq {}_1\Delta_{j_2}^{i-1}$  folgt, da  $d_{j_2}^{i-1}$  monoton fällt. Laut Lemma 3.12 gilt dann sogar  ${}_1\Delta_{j'}^{i-1} < {}_1\Delta_{j_2}^{i-1}$ . Aus Lemma 3.13 folgt damit, dass  $\mu(c_{i-1}, s_{j'}) < \mu(c_{i-1}, s_{j_2})$  ist, woraus wir schließen, dass  $j_2$   $(i, j)$ -gültig ist.

Weil  $[\Delta_{x,j'}^{i-1}, {}_1\Delta_{j'}^{i-1}] \subseteq [{}_w\Delta_{j'}^{i-1}, {}_1\Delta_{j'}^{i-1}]$  ist, überdecken  $d_{j_1}^{i-1}$  und  $d_{j_2}^{i-1}$  die Gerade  $d_{j'}^{i-1}$  auch im Intervall  $[\Delta_{x,j'}^{i-1}, {}_1\Delta_{j'}^{i-1}]$ . Deshalb überdecken  $d_{j_1}^i$  und  $d_{j_2}^i$  die Gerade  $d_{j'}^i$  im Intervall  $[\Delta_{x,j'}^i, {}_1\Delta_{j'}^i]$ . Falls  $j_1$  nun ebenfalls  $(i, j)$ -gültig ist, sind  $j_1$  und  $j_2$  nach Lemma 3.17  $b$ -Zeugen für  $j'$ .

Falls  $j_1$  nicht  $(i, j)$ -gültig ist, so muss  $\mu(c_{i-1}, s_{j_1}) < \mu(c_{i-1}, s_x)$  sein. Da für  $L$  geordnet bezüglich  $(i-1)$  die Indizes  $j_1 \in L$  und  $x \in L$  sind und  $L$  nach Lemma 3.20 bezüglich der Entfernung von  $c_{i-1}$  aufsteigend sortiert ist, muss  $j_1$  in  $L$  vor  $x$  stehen. Da laut Lemma 3.20  $\|p - j_1\|_1 \leq \|p - x\|_1$  ist, fällt  $j_1$  schneller als  $x$ .

Da  $j'$   $(i, j)$ -gültig ist, gilt  $\mu(c_{i-1}, s_x) < \mu(c_{i-1}, s_{j'})$  und somit nach Lemma 3.13 die Aussage  ${}_1\Delta_x^{i-1} < {}_1\Delta_{j'}^{i-1}$ . Dann gilt  $d_{j'}^{i-1}({}_1\Delta_x^{i-1}) > d_x^{i-1}({}_1\Delta_x^{i-1})$ , da  $d_{j'}^{i-1}$  monoton fällt. Deshalb muss  $d_x^{i-1}$  schneller fallen als  $d_{j'}^{i-1}$ , sonst wäre  $x$  nicht  $(i, j)$ -maximal.

Außerdem muss  $d_{j'}^{i-1}$  schneller fallen als  $d_{j_2}^{i-1}$ , denn sonst würde  $d_{j_2}^{i-1}$  ab  $\Delta_{j', j_2}^{i-1}$  unter  $d_{j'}^{i-1}$  verlaufen und da  ${}_w\Delta_{j'}^{i-1} < \Delta_{j', j_2}^{i-1} \leq \Delta_{j', j_1}^{i-1}$  und  $j_1$  kein  $a$ -Zeuge von  $j'$  ist, wäre  $\{j_1, j_2\}$  somit keine überdeckende Menge von  $j'$ .

Es gilt also die "fällt schneller als"-Beziehung zwischen den Geraden der folgenden Indizes in der Reihenfolge:  $d_{j_1}^{i-1}, d_x^{i-1}, d_{j'}^{i-1}, d_{j_2}^{i-1}$ . Angenommen es wäre  $\Delta_{x, j'}^{i-1} < \Delta_{j_1, j'}^{i-1}$ , das heißt die Gerade  $d_{j'}^{i-1}$  schneidet  $d_x^{i-1}$  bevor sie  $d_{j_1}^{i-1}$  schneidet. Damit dies möglich ist, muss aufgrund der Steigungen der Geraden  $\Delta_{j_1, j'}^{i-1} < \Delta_{x, j_1}^{i-1}$  gelten. Wegen der Voraussetzung  $\Delta_{j_2, j'}^{i-1} \leq \Delta_{j_1, j'}^{i-1}$  gilt dann  $\Delta_{j_2, j'}^{i-1} < \Delta_{x, j_1}^{i-1}$ . Da insbesondere  $\Delta_{x, j'}^{i-1} < \Delta_{x, j_1}^{i-1}$  ist, muss  $\Delta_{x, j_2}^{i-1} < \Delta_{x, j_1}^{i-1}$  gelten, da  $d_{j'}^{i-1}$  schneller fällt als  $d_{j_2}^{i-1}$ . Dann wäre wegen dem Zusammenhang  $j_1 \prec_{i-1} x \prec_{i-1} j_2$  aber  $\{j_1, j_2\}$  eine überdeckende Menge von  $x$  und nach Lemma 3.17  $x \notin L$  für  $L$  geordnet bezüglich  $i$ . Widerspruch.

Damit gilt  $\Delta_{j_1, j'}^{i-1} \leq \Delta_{x, j'}^{i-1}$ . Daraus folgt  $\Delta_{j_1, j'}^i \leq \Delta_{x, j'}^i$  und somit ist  $j_2$  nach Lemma 3.19 ein  $a$ -Zeuge von  $j'$  für  $L$  geordnet bezüglich  $(i, j)$ .

Mit den erhaltenen Aussagen ergibt sich, dass  $L$  geordnet bezüglich  $(i, j)$  ist.  $\square$

**Lemma 3.24.** *Es werde  $L.\text{insert}(i, j, x)$  mit einem Index  $j$  mit  $\mu(c_i, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  und dem  $(i, j)$ -maximalen Index  $x$  aufgerufen, wobei  $j \neq x$  gelte.*

*Falls  $j$  der Index der Site ist, die im Uhrzeigersinn direkt auf  $c_i$  folgt, gelte  $L = \emptyset$ . Andernfalls sei  $L$  bezüglich  $(i, \overleftarrow{j})$  geordnet, wobei  $\overleftarrow{j}$  der Index ist, dessen zugehörige Site  $s_{\overleftarrow{j}}$  sich im Uhrzeigersinn auf dem Rand von  $P$  direkt vor  $s_j$  befindet.*

*Mit diesen Voraussetzungen gilt, dass  $L$  nach der Ausführung von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  bezüglich  $(i, j)$  geordnet ist.*

*Beweis.* Falls  $L$  leer ist, dann erfüllt das einzige in der Abfrage in Zeile 1 eingefügte Element  $j$  in  $L$  nach dem Aufruf von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  die Eigenschaften.

Falls  $L$  nicht leer ist, zeigen wir, dass bei der Durchführung von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  alle Indizes aus  $L$  entfernt werden, für die  $j$  ein  $a$ -Zeuge ist und ebenso alle Indizes, für die  $j$  zusammen mit einem weiteren  $(i, j)$ -gültigen Index  $j^*$   $b$ -Zeugen bilden. Abbildung 3.10 gibt eine Übersicht über die Funktionsweise von  $L.\text{insert}(i, j, x)$ . Wir zeigen außerdem, dass keine Indizes aus  $L$  gelöscht werden, für die es keine Zeugen gibt. Da  $L$  nach Voraussetzung bezüglich  $(i, \overleftarrow{j})$  geordnet war und die Ordnung " $\prec_{i, \overleftarrow{j}}$ " der Ordnung " $\prec_{i, j}$ " entspricht, weil  $j \neq x$  ist, reicht dies aus um zeigen, dass die Ordnung von  $L$  bezüglich  $(i, j)$  nach der Ausführung von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  hergestellt ist.

Falls also ein Index  $j'$  in  $L$  existiert für den  $j$  ein  $a$ -Zeuge ist, dann gilt  $j \prec_{i, j} j'$  und  ${}_1\Delta_{j'}^i < {}_1\Delta_j^i$ . Falls  $j'$  keine Nachfolger hat, also am Ende der Liste  $L$  steht, dann wird für  $j_{\text{tail}} = j'$  die Bedingung in der Verzweigung in Zeile 6 wahr. In Zeile 7 wird daraufhin  $j'$  aus  $L$  gelöscht und  $L.\text{insert}(i, j, x)$  rekursiv aufgerufen.

Wenn  $j'$  Nachfolger hat, seien  $j_1, \dots, j_t \in L$  die Indizes, die in der Reihenfolge ihrer Nummerierung auf  $L$  folgen. Da  $L$  bezüglich " $\prec_{i, j}$ " sortiert ist, gilt  $j' \prec_{i, j} j_1 \prec_{i, j} \dots \prec_{i, j} j_t$ .

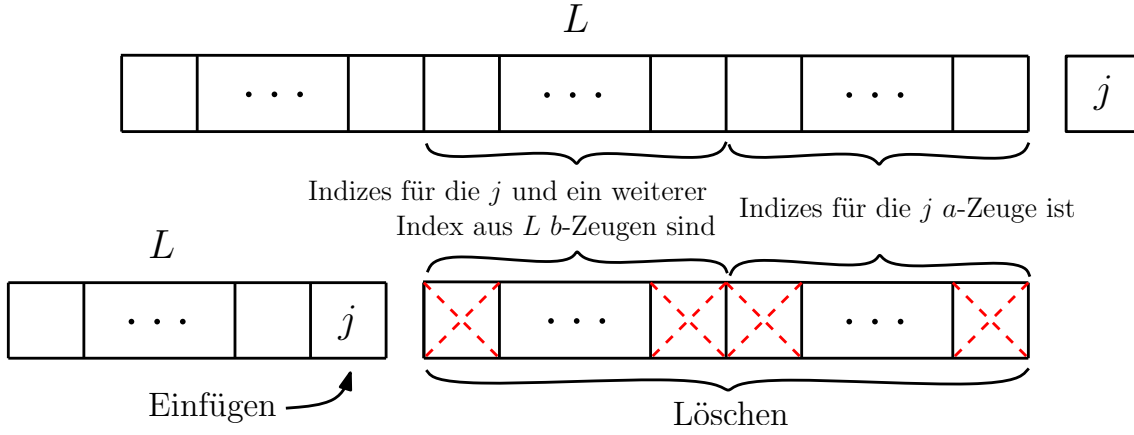


Abbildung 3.10: Die Abbildung zeigt den Zustand von  $L$  vor der Ausführung von  $L.insert(i, j, x)$  (oben) und danach (unten). Vor der Ausführung von  $L.insert(i, j, x)$  ist  $L$  geordnet bezüglich  $(i, \overleftarrow{j})$ . Alle Indizes für die  $j$  ein  $a$ -Zeuge ist oder  $j$  und ein weiterer Index  $j^*$   $b$ -Zeugen sind, werden bei der Ausführung von  $L.insert(i, j, x)$  gelöscht. Danach wird der Index  $j$  in  $L$  hinten angehängt und  $L$  ist geordnet bezüglich  $(i, j)$ .

Wegen  $j \prec_{i,j} j'$  und da " $\prec_{i,j}$ " transitiv ist, gilt auch  $j \prec_{i,j} j_r$  für  $r \in \{1, \dots, t\}$ . Da  $j_1, \dots, j_t$   $(i, j)$ -gültig sind, gilt  $\mu(s_x, s_j) > \mu(s_x, s_{j_r})$  für  $r \in \{1, \dots, t\}$  und deshalb ist  $j$  nach Lemma 3.19 auch ein  $a$ -Zeuge für  $j_1, \dots, j_t$ . Nun greift der vorherige Fall (siehe oben) und wir löschen die Indizes  $j_1, \dots, j_t$  in Zeile 7 mittels rekursiver Aufrufe von hinten beginnend bei  $j_t$ , bis  $j'$  in  $L$  am Ende steht und wir auch diesen Index wie im vorherigem Fall löschen. Das Löschen der Indizes  $j_1, \dots, j_t$  ist dabei erlaubt, da für diese die Nichtmitgliedschaft in  $L$  bereits durch  $j$  bezeugt ist.

Wir können nun davon ausgehen, dass  $L$  keine Indizes enthält, für die  $j$  ein  $a$ -Zeuge war, da diese zuvor in der Verzweigung in Zeile 6 mittels Rekursion gelöscht wurden. Das heißt für die in  $L$  verbleibenden Indizes gilt, dass sie bezüglich " $\prec_{i,j}$ " "kleiner" sind (denn gäbe es Indizes, die bezüglich " $\prec_{i,j}$ " "größer" als  $j$  sind, wäre  $j$  ein  $a$ -Zeuge für diese Indizes).

Falls nun ein Index  $j'$  in  $L$  und ein weiterer Index  $j^* \in P(s_x, s_j)$  existieren, so dass  $j^*$  zusammen mit  $j$   $b$ -Zeugen bilden, dann gilt also  $j^* \prec_{i,j} j' \prec_{i,j} j$  (die Konstellation  $j \prec_{i,j} j' \prec_{i,j} j^*$  ist nicht möglich, da  $j' \prec_{i,j} j$  gilt) sowie  $\Delta_{x,j}^i < \Delta_{j',j}^i \leq \Delta_{j',j^*}^i$ . Wir führen eine Fallunterscheidung über die Position von  $j^*$  und  $j'$  in  $L$  durch. Dabei führen wir höhere Fälle auf die zuvor gezeigten Basisfälle zurück.

**Fall 1:** Falls  $j^* \in L$  ist und  $j^*$  der vorletzte Index in  $L$  ist, dann muss also  $j'$  der letzte Eintrag in  $L$  sein, da  $L$  bezüglich " $\prec_{i,j}$ " geordnet ist. In diesem Fall wird die Bedingung der Verzweigung in Zeile 9 für  $j_{pred} = j^*$  und  $j_{tail} = j'$  wahr und wir löschen  $j'$  in Zeile 10 aus  $L$ .

**Fall 2:** Ist  $j^*$  nicht der vorletzte Index in  $L$ , seien  $j_1, \dots, j_t$  die Indizes, die in der Reihenfolge ihrer Nummerierung auf  $j^*$  folgen und es sei  $j' = j_t$ , also  $j'$  der letzte Index in  $L$ . Dann gilt nach Voraussetzung  $\Delta_{x,j}^i < \Delta_{j_t,j}^i \leq \Delta_{j_t,j^*}^i$ . Nach Lemma 3.21 gilt  $\Delta_{j_t,j^*}^i < \Delta_{j_t,j_{t-1}}^i$ . Deshalb gilt aber auch  $\Delta_{x,j}^i < \Delta_{j_t,j}^i \leq \Delta_{j_t,j_{t-1}}^i$  und wegen  $j_{t-1} \prec_{i,j} j_t$  folgt, dass  $j_{t-1}$  und  $j$  ebenfalls  $b$ -Zeugen für  $j'$  bilden und  $j'$  somit beim Aufruf von  $L.insert(i, j, x)$  gelöscht wird (siehe Fall 1).

**Fall 3:** Da  $j$  nicht  $a$ -Zeuge von  $j_r$  für ein beliebiges  $r \in \{1, \dots, t\}$  ist, gilt  $j_r \prec_{i,j} j$  und

somit  $\Delta_{x,j_r}^i \leq \Delta_{x,j}^i$ . Deshalb gilt auch

$$\begin{aligned} d_j^i(\Delta_{x,j}^i) &\leq d_{j_r}^i(\Delta_{x,j}^i) \\ \iff \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_j) - \Delta_{x,j}^i}{\|p - s_j\|_1} &\leq \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s_{j_r}) - \Delta_{x,j}^i}{\|p - s_{j_r}\|_1}. \end{aligned}$$

Da nach Lemma 3.11  $d_j^i(\Delta_{x,j}^i) \geq 1$  und  $\mu(c_i, s_j) > \mu(c_i, s_{j_r})$  ist, muss  $\|p - s_j\|_1 > \|p - s_{j_r}\|_1$  sein, damit die obige Ungleichung erfüllt ist, was bedeutet, dass  $d_j^i$  langsamer fällt, als  $d_{j_r}^i$  für ein beliebiges  $r \in \{1, \dots, t\}$ .

Sei nun  $j' = j_r$  für ein  $r \in \{1, \dots, t-1\}$ . Nach Voraussetzung gilt  $\Delta_{j_r,j}^i \leq \Delta_{j_r,j^*}^i$  und nach Lemma 3.21 gilt  $\Delta_{j_r,j^*}^i < \Delta_{j_r,j_t}^i$ . Damit gilt also auch  $\Delta_{j_r,j}^i < \Delta_{j_r,j_t}^i$ .

Angenommen es wäre  $\Delta_{j_r,j}^i < \Delta_{j_t,j}^i$ . Da nach Lemma 3.20  $d_{j_r}^i$  schneller fällt als  $d_{j_t}^i$ , verläuft  $d_{j_r}^i$  vor dem gemeinsamen Schnittpunkt  $\Delta_{j_r,j_t}^i$  über  $d_{j_t}^i$ . Da  $d_{j_r}^i$  und  $d_{j_t}^i$  beide schneller fallen als  $d_j^i$ , verlaufen  $d_{j_r}^i$  und  $d_{j_t}^i$  vor  $\min\{\Delta_{j_r,j}^i, \Delta_{j_t,j}^i\} = \Delta_{j_r,j}^i$  über  $d_j^i$ . In diesem Fall müssten allerdings  $d_{j_r}^i$  und  $d_{j_t}^i$  ihre gegenseitige Lage vor  $\Delta_{j_r,j}^i$  tauschen, damit  $d_{j_r}^i$  die Gerade  $d_j^i$  vor  $d_{j_t}^i$  schneidet. Dann wäre also  $\Delta_{j_r,j_t}^i \leq \Delta_{j_r,j}^i$ , was aber einen Widerspruch darstellt.

Es gilt also  $\Delta_{j_t,j}^i \leq \Delta_{j_r,j}^i$  und nach Lemma 3.21  $\Delta_{j_r,j^*}^i < \Delta_{j_t,j^*}^i$ . Mit der Voraussetzung  $\Delta_{j_r,j}^i \leq \Delta_{j_r,j^*}^i$  gilt also  $\Delta_{j_t,j}^i \leq \Delta_{j_r,j}^i \leq \Delta_{j_r,j^*}^i < \Delta_{j_t,j^*}^i$ , woraus  $\Delta_{j_t,j}^i < \Delta_{j_t,j^*}^i$  folgt. Außerdem gilt  $\Delta_{x,j}^i < \Delta_{j_t,j}^i$ , denn wäre  $\Delta_{j_t,j}^i \leq \Delta_{x,j}^i$ , dann wäre  $j$  nach Lemma 3.19  $a$ -Zeuge für  $j_t$  und wir hätten  $j_t$  bereits zuvor gelöscht.

Insgesamt gilt also  $\Delta_{x,j}^i < \Delta_{j_t,j}^i < \Delta_{j_t,j^*}^i$ , weshalb  $j^*$  und  $j$  auch  $b$ -Zeugen von  $j_t$  sind. Da diese Situation für  $j_t$  gerade Fall 2 entspricht wird  $j_t$  beim Aufruf von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  gelöscht. Durch sukzessives Löschen der Indizes hinter  $j_r = j'$  (Fall 3 ist nach dem Löschen von  $j_t$  auch auf  $j_{t-1}$  anwendbar) steht irgendwann  $j_r$  am Ende von  $L$  und wird entsprechend Fall 2 ebenfalls gelöscht. Die Nichtmitgliedschaft in  $L$  der gelöschten Indizes ist dabei, wie gezeigt, immer durch  $j^*$  und  $j$  bezeugt.

**Fall 4:** Falls  $j^* \notin L$  ist, dann existieren nach Lemma 3.18 ein  $a$ -Zeuge  $j_a \in L$  von  $j^*$  oder zwei  $b$ -Zeugen  $j_a, j_b \in L$  von  $j^*$ . Dann bilden aber  $\{j_a, j\}$  bzw.  $\{j_a, j_b, j\}$  nach Lemma 3.17 eine überdeckende Menge für  $j'$ . Sei diese  $M$ . Wir wählen eine kleinste Teilmenge  $M'$  aus  $M$ , die noch eine überdeckende Menge für  $j'$  darstellt. Die Menge  $M'$  hat aufgrund der Natur von Geraden höchstens zwei Elemente. Hätte es ein Element, wäre dieses nach Lemma 3.18  $a$ -Zeuge für  $j'$  und wir hätten  $j'$  schon zuvor gelöscht. Deshalb enthält  $M'$  genau zwei Elemente. Wäre  $M' = \{j_a, j_b\}$ , wären nach Lemma 3.17  $j_a, j_b \in L$   $b$ -Zeugen für  $j'$ , was die Voraussetzung verletzt. Das heißt es gilt  $M' = \{j_a, j\}$  oder  $M' = \{j_b, j\}$ . Nach Lemma 3.17 enthält  $M'$  also  $b$ -Zeugen aus  $L$  für  $j'$  und wir haben die Situation aus Fall 3. Also wird  $j'$  auch in diesem Fall mittels  $L.\text{insert}(i, j, x)$  gelöscht.  $\square$

**Satz 3.25.** Für ein rektilineares, einfaches Polygon  $P$  mit  $n$  Knoten und einem Punkt  $p$  im Inneren von  $P$  und  $k \geq 2$  Sites auf dem Rand von  $P$ , die nach der Reihenfolge ihres Auftretens im Uhrzeigersinn auf dem Rand von  $P$  sortiert vorliegen, lässt sich ein rektilinearere Feed-link, der die Streckung bezüglich der  $L_1$ -Metrik minimiert, in  $\mathcal{O}(n+k)$  Zeit bestimmen.

*Beweis.* Nach Lemma 3.2 in Abschnitt 3.1 lässt sich die Menge der Kandidaten in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit bestimmen.

Wir zeigen die Korrektheit des Algorithmus 4 zur Bestimmung von  $w_0, \dots, w_{l-1}$ . Als erstes werden in Zeile 1 alle Sites in  $S$ , die auf einer steigenden Folge nicht die erste Site im Uhrzeigersinn sind, gelöscht. Nach Lemma 3.7 ändert dies die maximale Streckung für



einen Feed-link, der an einem beliebigen Kandidaten aus  $C$  anbindet, nicht. Als nächstes wird in Zeile 2 bis 4 eine Vorberechnung durchgeführt. Mit den erhaltenen Daten können wir, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, sämtliche Distanzen zwischen gegebenen Punkten auf dem Rand von  $P$  bestimmen.

Dann wird die Liste  $L$  angelegt und  $m_0$  auf naive Weise vorberechnet (durch Iteration über alle möglichen Sites). Gilt Bedingung 3.2 für  $m_0$ , so wird die Abfrage in Zeile 6 wahr und es gibt keine Indizes  $j$  mit  $\mu(c_0, s_j) \leq \frac{\mu(P)}{2}$ , weshalb  $w_0 = \perp$  gesetzt wird, was Definition 3.8 entspricht. Sonst wird in der Schleife in Zeile 8 die Liste  $L$  initialisiert, indem wir uns den aktuell  $(0, j)$ -maximalen Index  $x$  merken und die 0-gültigen Indizes  $j$  mittels  $L.\text{insert}(0, j, x)$  iterativ in  $L$  einfügen.

Wir zeigen die Schleifeninvariante, dass  $L$  nach jedem Schleifendurchlauf der Schleife in Zeile 8 geordnet bezüglich  $(0, j)$  ist und dass  $x$   $(0, j)$ -maximal ist. Im Induktionsanfang ist  $j = f_0$  und die Prüfung  $\delta_0^{cw}(s_j) \geq \delta_0^{cw}(s_x)$  wird auf jeden Fall zu wahr ausgewertet, da  $x = \perp$  ist. Es wird  $x = j = f_0$  gesetzt und somit ist  $x$  offensichtlich  $(0, f_0)$ -maximal. Außerdem wird  $L$  mittels  $L.\text{flush}$  geleert und da es keine  $(0, f_0)$ -gültigen Indizes geben kann, ist  $L = \emptyset$  geordnet bezüglich  $(0, f_0)$ .

Wir nehmen an, dass sich das Programm vor einem Schleifendurchlauf mit der Laufvariable  $j = \overleftarrow{j} + 1 \pmod k$  befindet, wobei die Induktionsvoraussetzung für  $\overleftarrow{j}$  gelte. Dann ist die Site  $s_j$  zur Laufvariable  $j$  der Nachfolger von  $s_{\overleftarrow{j}}$  im Uhrzeigersinn auf dem Rand von  $P$ . Zuerst prüfen wir, ob  $\delta_i^{cw}(s_j) \geq \delta_i^{cw}(s_x)$  ist, also ob  $s_j$  eine größere Streckung hat als  $s_x$ . Ist dies der Fall, so ist  $j$  der  $(0, j)$ -maximale Index und somit muss wieder  $L = \emptyset$  sein, da es keine  $(0, j)$ -gültigen Indizes gibt, was wieder durch  $L.\text{flush}$  erreicht wird. Andernfalls ist  $j$  nicht der  $(0, j)$ -maximale Index und wir fügen  $j$  mittels  $L.\text{insert}(0, j, x)$  ein. Nach Lemma 3.24 gilt dann, dass  $L$  nach der Ausführung von  $L.\text{insert}(0, j, x)$  geordnet bezüglich  $(i, j)$  ist.

Induktiv erhalten wir also, dass nach dem Ende der Zählschleife in Zeile 8  $x$  der  $(0, m_i)$ -maximale Index ist, weswegen  $x$  dem Index  $w_0$  entspricht und  $L$  geordnet bezüglich  $(0, m_0)$ , das heißt geordnet bezüglich 0, ist. Wir setzen also  $w_0 := x$  und die Aussage der Schleifeninvariante der Schleife in Zeile 8 gilt.

In der Schleife in Zeile 17 bestimmen wir nun für  $i \geq 1$  iterativ zu jedem Kandidaten  $c_i$  den korrekten Index  $w_i$  entsprechend Definition 3.8. Wir beweisen die Schleifen-Invariante, dass wir nach Ablauf der  $i$ -ten Iteration der Schleife in Zeile 17 das korrekte  $w_i$  erhalten und  $L$  bezüglich  $i$  geordnet ist. Die Induktionsvoraussetzungen sind dabei, dass das korrekte  $w_{i-1}$  vorliegt und  $L$  geordnet bezüglich  $i - 1$  ist. Der Induktionsanfang ist durch die Initialisierung von  $L$  und  $w_0$  gegeben (siehe oben). Wir nehmen also an, dass wir uns am Anfang des  $i$ -ten Schleifendurchlaufs der Schleife in Zeile 17 befinden.

Zunächst wird mittels Algorithmus 1 das nach Lemma 3.6 korrekte  $m_i$  berechnet. Dann wird in Zeile 19 geprüft, ob das erhaltene  $m_i$  Bedingung 3.1 genügt, also ob Sites  $s \in S$  existieren, für die  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  ist. Ist dies nicht der Fall, also gilt Bedingung 3.2 für  $m_i$ , so springen wir sofort in den Else-Fall in Zeile 42. Da dann keine Sites  $s \in S$  existieren, für die  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  gilt, wird nun entsprechend Definition 3.8  $w_i = \perp$  gesetzt und da keine  $i$ -gültigen Indizes von Sites existieren, ist  $L$  bezüglich  $i$  geordnet, wenn  $L$  leer ist, was wir durch Leerung von  $L$  mittels  $L.\text{flush}$  erreichen.

Falls  $m_i$  jedoch Bedingung 3.1 genügt, es also  $s \in S$  gibt, für die  $\mu(c_i, s) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  ist, ist etwas mehr zu tun. In der Verzweigung in Zeile 20 wird zunächst für ein gegebenes  $i$  unterschieden, ob Fall A oder Fall B gilt. Tritt für ein  $i$  Fall B ein, so erlauben wir uns in der Verzweigung in Zeile 20 die Neuinitialisierung von  $L$  und gleichzeitige naive Bestimmung von  $w_i$  analog zur Initialisierung mit  $i = 0$  (siehe oben). Laufzeit-technisch ist dieses Vorgehen nicht schlimm, da Fall B höchstens einmal eintreten kann. Dazu mehr in der Laufzeitanalyse. Wie zuvor für  $i = 0$  gezeigt, gilt auch nun, dass  $L$  geordnet bezüglich

$i$  ist und wir das korrekte  $w_i$  erhalten. Zu erwähnen ist hierbei noch, dass die Schleife in Zeile 22 Modulo  $k$  zählt, das heißt wenn  $m_i < f_i$  gilt, wird über  $s_{k-1}$  hinweg bei  $s_0$  weiter iteriert, was aber an den Aussagen nichts ändert.

Gilt allerdings Fall A, so fährt der Algorithmus stattdessen in Zeile 29 fort. Zunächst wird mit der Abfrage in Zeile 30 geprüft, ob  $\mu(c_i, s_{w_{i-1}}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  ist, also ob  $s_{w_{i-1}}$  beim Wechsel des Anbindungspunktes des Feed-links von  $c_{i-1}$  zu  $c_i$  nicht vom Feed-link "überschritten" wurde. Falls  $\mu(c_i, s_{w_{i-1}}) \leq \frac{\mu(P)}{2}$  ist, rufen wir  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  mit  $j_{\text{init}} = w_{i-1}$  auf. Andernfalls rufen wir  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  mit  $j_{\text{init}} = \perp$  auf. Da  $L$  nach Induktionsvoraussetzung geordnet bezüglich  $(i-1)$  ist, entspricht diese Situation den Voraussetzungen von Lemma 3.23 und wir erhalten nach der Ausführung von  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  den  $(i, m_{i-1})$ -maximalen Index  $x$ , außerdem ist  $L$  dann geordnet bezüglich  $(i, m_{i-1})$ .

Dann treten wir in die Schleife in Zeile 35 ein, um die Sites, die auf  $P(s_{m_{i-1}}, s_{m_i}) \setminus \{s_{m_{i-1}}\}$  liegen nach dem neuen  $w_i$  zu untersuchen. Wir iterieren also über alle Indizes von Sites auf  $P(s_{m_{i-1}}, s_{m_i}) \setminus \{s_{m_{i-1}}\}$  und beginnen dabei mit der Site  $s_j$ , welche direkt auf  $s_{m_{i-1}}$  folgt. Wir zeigen wieder die Schleifeninvariante, dass  $L$  nach jedem Schleifendurchlauf der Schleife in Zeile 35 geordnet bezüglich  $(i, j)$  ist und dass  $x$   $(i, j)$ -maximal ist.

Wir nehmen an, dass sich das Programm vor einem Schleifendurchlauf mit der Laufvariable  $j = \overleftarrow{j} + 1 \pmod k$  befindet, wobei die Induktionsvoraussetzung für  $\overleftarrow{j}$  gelte. Dann ist die Site  $s_j$  zur Laufvariable  $j$  der Nachfolger von  $s_{\overleftarrow{j}}$  im Uhrzeigersinn auf dem Rand von  $P$ . Der Induktionsanfang vor dem ersten Schleifendurchlauf mit  $j_{\text{start}}$ , also für  $\overleftarrow{j} = m_{i-1}$ , gilt nach Lemma 3.23. Zuerst prüfen wir, ob  $\delta_i^{cw}(s_j) \geq \delta_i^{cw}(s_x)$  ist, also ob  $s_j$  eine größere Streckung hat als  $s_x$ . Ist dies der Fall, so ist  $j$  offensichtlich der  $(i, j)$ -maximale Index. Damit  $L$  geordnet ist, muss  $L = \emptyset$  sein, da es keine  $(i, j)$ -gültigen Indizes gibt. Durch das Leeren von  $L$  mittels  $L.\text{flush}$  ist dies gegeben. Andernfalls ist  $j$  nicht der  $(i, j)$ -maximale Index und wir fügen  $j$  mittels  $L.\text{insert}(i, j, x)$  in  $L$  ein. Nach Lemma 3.24 gilt dann, dass  $L$  nach der Ausführung von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  geordnet bezüglich  $(i, j)$  ist.

Induktiv erhalten wir also, dass nach dem Ende der Zählschleife Zeile 17  $x$  der  $(i, m_i)$ -maximale Index ist, weswegen  $x$  Definition 3.8 entspricht und  $L$  geordnet bezüglich  $(i, m_i)$  ist, das heißt geordnet bezüglich  $i$  ist. Wir setzen also  $w_i = x$ .

Damit gilt die Aussage der Schleifeninvariante der Schleife in Zeile 17.

Analog können wir  $\bar{w}_i$  für  $i = 0, \dots, l-1$  bestimmen, welche symmetrisch zu den  $w_i$  die Sites mit der größten Streckung  $\delta_i^{ccw}(s_{\bar{w}_i})$  gegen den Uhrzeigersinn darstellen, indem wir das Polygon spiegeln und die Kandidaten sowie die Sites in umgekehrter Reihenfolge durchnummerieren.

Wir bestimmen nun den Kandidaten  $c_{i_{\min}}$ , so dass ein Feed-link, welcher an  $c_{i_{\min}}$  anbindet, die Streckung minimiert, aus den berechneten Daten. Die Streckung für einen Feed-link an  $c_i$  ist  $\delta_i := \max(\delta_i(s_{w_i}), \delta_i(s_{\bar{w}_i}))$ . Die Streckung von  $P$  wird also minimal für einen Feed-link an dem Kandidaten  $c_{i_{\min}}$ , für den gilt

$$\delta_{i_{\min}} = \min_{i=0, \dots, l-1} \delta_i.$$

Wir analysieren die Laufzeit des Algorithmus. Das Bestimmen der Menge Kandidaten  $C$  ist laut Lemma 3.4 in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit möglich. Das Entfernen der Sites, welche die Voraussetzung von Lemma 3.7 erfüllen, geht durch Iteration über alle Kanten und Sites in  $\mathcal{O}(n+k)$  Zeit. Auch die Vorberechnung ist in  $\mathcal{O}(n+k)$  Zeit durchführbar.

Wir analysieren die Laufzeit der Schleife in Zeile 17 für Durchläufe, in denen Fall A auftritt, ohne die Laufzeit für die Berechnung der  $m_i$  mittels der Aufrufe von  $\text{calculateMiddle}(i)$

einzubezieh, da wir bereits nach Lemma 1 wissen, dass für alle Aufrufe mit  $i = 1, \dots, l-1$  eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n+k)$  notwendig ist. Die Anzahl der Erst-Aufrufe von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$ , die *nicht rekursiv* bedingt sind, sind dann offensichtlich durch  $\mathcal{O}(l)$  beschränkt.

Wir machen eine amortisierte Analyse für die Anzahl der *rekursiv bedingten* Aufrufe von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j)$ . Jeder Index  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  wird nur höchstens zweimal in  $L$  eingefügt, da wir den Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn von  $s_0$  bis  $s_{m_l-1}$  und von  $s_{m_l-1}$  noch einmal weiter bis  $s_{m_0}$  durchlaufen und dabei Sites, auf die wir unterwegs treffen, mittels  $L.\text{insert}(i, j, x)$  höchstens einmal in  $L$  einfügen. Da für jeden rekursiven Aufruf von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  zuvor ein Index aus  $L$  gelöscht wurde, ist die Anzahl der rekursiven Aufrufe von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  durch  $\mathcal{O}(k)$  beschränkt. Das heißt die Anzahl von nicht rekursiv bedingten Erst-Aufrufen und rekursiv bedingten Aufrufen von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  ist wegen  $\mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(n)$  insgesamt in  $\mathcal{O}(n+k)$ .

Durch die Vorberechnung und Speicherung der  $L_1$ -Distanzen von  $p$  zu den Kandidaten  $c \in C$  und den Sites  $s \in S$ , sowie deren Distanzen auf dem Rand von  $P$  im Uhrzeigersinn ausgehend von  $c_0$ , können wir Streckungen im Uhrzeigersinn und die Parameter  $\Delta_{j_1, j_2}^i$ ,  $w\Delta_{j_1}^i$  und  $w\Delta_{j_2}^i$  für beliebige  $i \in \{0, \dots, l-1\}$  und  $j_1, j_2 \in \{0, \dots, k-1\}$  in  $\mathcal{O}(1)$  Zeit bestimmen. Dadurch haben auch  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  einen konstanten Zeitaufwand, wenn man den Zeitaufwand für rekursive Unter-Aufrufe nicht mitzählt. Da die gesamte Anzahl von nicht rekursiv bedingten Erstaufrufen und rekursiv bedingten Aufrufen von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  durch  $\mathcal{O}(n+k)$  beschränkt ist, erhalten wir insgesamt einen amortisierten Zeitaufwand von  $\mathcal{O}(n+k)$  für sämtliche Aufrufe von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  und  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$ .

Da alle Operationen im Fall A in Zeile 29 bis auf Aufrufe von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  oder  $L.\text{next}(i, j_{\text{init}})$  lediglich konstante Zeit benötigen und die Operationen in der Schleife in Zeile 35 auch höchstens  $\mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(n)$  mal ausgeführt werden, ist der gesamte Zeitaufwand  $\mathcal{O}(n+k)$  für alle Durchläufe der Schleife in Zeile 17, in denen Fall A auftritt.

Da Fall B höchstens einmal eintreten kann ( $\mu(c_{i-1}, c_i) > \frac{\mu(P)}{2}$  kann für höchstens ein  $i \in \{0, \dots, l-1\}$  gelten), können wir uns hier einen linearen Aufwand erlauben. Analog zur vorigen Argumentation ist die Anzahl der Aufrufe von  $L.\text{insert}(i, j, x)$  durch  $\mathcal{O}(k)$  beschränkt. Die restlichen Operationen sind in konstanter Zeit möglich und werden höchstens  $\mathcal{O}(k)$  mal ausgeführt. Für das einmalige Auftreten von Fall B ist also ein Zeitaufwand von  $\mathcal{O}(k)$  nötig.

Mit der gleichen Argumentation gilt, dass auch die Initialisierung von  $L$  und Bestimmung von  $w_0$  höchstens  $\mathcal{O}(k)$  Zeit benötigt.

Insgesamt erhalten wir also einen Zeitaufwand von  $\mathcal{O}(n+k)$  für die Berechnung von  $w_0, \dots, w_{l-1}$ . Wir berechnen analog  $\bar{w}_i$  für  $i = 0, \dots, l-1$  in  $\mathcal{O}(n+k)$  Zeit, indem wir das Problem "spiegeln". Diese Spiegelung ist in  $\mathcal{O}(n+k)$  Zeit möglich. Die Streckungen von  $s_{w_i}$  und  $s_{\bar{w}_i}$  für  $i = 0 \dots l-1$  lassen sich mit den vorberechneten Daten in jeweils  $\mathcal{O}(1)$ , also insgesamt  $\mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(n)$  Zeit bestimmen. Zuletzt kann man nun  $c_{i_{\min}}$  aus den vorberechneten Daten in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit bestimmen.

Da alle (additiven) Laufzeiten durch  $\mathcal{O}(n+k)$  beschränkt sind, ist die Gesamtlaufzeit zur Bestimmung des Kandidaten  $c_{i_{\min}}$  an dem ein Feed-link mit minimaler Streckung anbindet, somit ebenfalls  $\mathcal{O}(n+k)$ .  $\square$

### 3.3 Optimale Feed-links bezüglich allen Punkten auf dem Rand von $P$

Wir ändern das bisherige Problem ab, indem wir anstatt die Streckung bezüglich einer vorgegebenen Menge von Sites zu minimieren, das Ziel vorgeben, die Streckung bezüglich aller Punkte auf dem Rand von  $P$  zu minimieren. Dazu zeigen wir, dass wir diese neue Problemstellung leicht auf die bereits gelöste Problemstellung mit einer endlichen Menge von Sites transformieren können.

Ähnlich zu Lemma 3.7 zeigen wir dazu für eine beliebige Menge von Sites  $S$  das folgende Lemma.

**Lemma 3.26.** *Sei  $s \in S$  eine Site, die auf einer fallenden Folge liegt und im Uhrzeigersinn die letzte Site auf dieser fallenden Folge ist. Dann gilt für alle weiteren Sites  $s' \in S$  mit  $s' \neq s$ , die sich auf derselben fallenden Folge befinden  $\delta_i^{cw}(s) > \delta_i^{cw}(s')$ , für alle  $i \neq i'$ , wobei  $i'$  der Index desjenigen Kandidaten  $c_{i'}$  ist, der sich entsprechend Abschnitt 3.1 im Uhrzeigersinn am Ende der fallenden Folge befindet.*

*Beweis.* Für einen Feed-link an  $c_i$  mit  $i \neq i'$  gilt  $\mu(c_i, s') < \mu(c_i, s)$ . Außerdem gilt  $\|p - s'\|_1 > \|p - s\|_1$ , da sich  $s'$  im Uhrzeigersinn vor  $s$  auf einer fallenden Folge befindet. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \delta_i^{cw}(s) &= \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s)}{\|p - s\|_1} \\ &> \frac{\|p - c_i\|_1 + \mu(c_i, s')}{\|p - s'\|_1} = \delta_i^{cw}(s') \end{aligned}$$

□

Seien  $s_f$  und  $s_l$  die erste und letzte Site auf einer (steigenden oder fallenden) Folge und  $s' \in S$  mit  $s' \neq s_f, s_l$  eine weitere Site auf dieser Folge. Aus Lemma 3.7 und Lemma 3.26 folgt dann für  $i \neq i'$ , wobei  $i'$  der Index desjenigen Kandidaten  $c_{i'}$  ist, der sich im Uhrzeigersinn am Ende der fallenden Folge befindet, dass  $\delta_i^{cw}(s_f) \geq \delta_i^{cw}(s')$  oder  $\delta_i^{cw}(s_l) \geq \delta_i^{cw}(s')$  gilt.

Sei  $P'$  das an der  $x$ -Achse gespiegelte Polygon  $P$ . Das Ablaufen des Randes von  $P'$  im Uhrzeigersinn entspricht dann gespiegelt dem Ablaufen des Polygons  $P$  gegen den Uhrzeigersinn. Die Streckung  $\delta_i^{ccw}(s)$  gegen den Uhrzeigersinn einer Site  $s \in S$  für einen Feed-link an  $c_i$  in  $P$  entspricht also  $\delta_i^{cw}(s)$  in  $P'$ . Steigende bzw. fallende Folgen in  $P$  entsprechen fallenden bzw. steigenden Folgen in  $P'$ . Die erste Site (im Uhrzeigersinn) einer steigenden Folge in  $P$  entspricht damit der letzten Site (im Uhrzeigersinn) einer fallenden Folge in  $P'$ . Genauso entspricht die letzte (im Uhrzeigersinn) Site einer fallenden Folge in  $P$  der ersten Site (im Uhrzeigersinn) einer steigenden Folge in  $P'$ .

Wenden wir Lemma 3.7 und Lemma 3.26 auf  $P'$  an, so erhalten wir analog zu oben, dass für  $i \neq i'$  die Ungleichung  $\delta_i^{cw}(s_f) \geq \delta_i^{cw}(s')$  oder  $\delta_i^{cw}(s_l) \geq \delta_i^{cw}(s')$  in  $P'$  gilt. Somit gilt für  $i \neq i'$  im ursprünglichen Polygon  $P$  für die Streckung gegen den Uhrzeigersinn von  $s'$  die Ungleichung  $\delta_i^{ccw}(s_f) \geq \delta_i^{ccw}(s')$  oder  $\delta_i^{ccw}(s_l) \geq \delta_i^{ccw}(s')$ . Insgesamt gilt dann für  $\delta_i(s') = \max\{\delta_i^{cw}(s'), \delta_i^{ccw}(s')\}$  und  $i \neq i'$ , dass die Ungleichung  $\delta_i(s_f) \geq \delta_i(s')$  oder  $\delta_i(s_l) \geq \delta_i(s')$  gilt. Für  $i'$  wie oben gilt außerdem, dass  $\delta_{i'}(s') = \delta_{i'}(s_f)$  oder  $\delta_{i'}(s') = \delta_{i'}(s_l)$  ist. Somit ist  $\delta_i(s_f) \geq \delta_i(s')$  oder  $\delta_i(s_l) \geq \delta_i(s')$  für alle  $i \in \{0, \dots, l-1\}$ .

Da die Menge  $S$  beliebig ist, können wir alle Punkte auf dem Rand von  $P$  als Sites auffassen, also  $S = \partial P$  setzen. Auch in diesem Fall gilt, dass die Streckung über einen Feed-link an  $c_i$  von allen Punkten auf einer (steigenden oder fallenden) Folge, höchstens so groß ist wie die Streckung des ersten oder letzten Punktes der selben Folge. Das heißt es reicht aus

die Streckung bezüglich des ersten bzw. letzten Punktes einer jeden Folge zu minimieren, da alle anderen Punkte der Folge eine Streckung kleiner oder gleich der Streckung dieser Punkte hat. Setzen wir also

$$S' = \{q \mid q \text{ ist erster oder letzter Punkt einer steigenden oder fallenden Folge}\},$$

dann ist eine Menge von optimalen Feed-links für  $S'$  auch eine optimale Menge von Feed-links für  $S = \partial P$ . Da offensichtlich  $|S'| \in \mathcal{O}(n)$  ist, folgt aus den Sätzen 3.5 und 3.25 der folgende Satz.

**Satz 3.27.** *Für ein rektilineares, einfaches Polygons  $P$  mit  $n$  Knoten und einem Punkt  $p$  im Inneren von  $P$ , lässt sich eine Menge von  $m$  rektilinearen Feed-links, welche die Streckung bezüglich der  $L_1$ -Metrik zu allen Punkten auf dem Rand von  $P$  minimieren in  $\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \binom{n}{m})$  Zeit berechnen. Für  $m = 1$  lässt sich der optimale Feed-link in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit berechnen.*

### 3.4 Längenminimierung rektilinearer Feed-links

Ein rektilinearer Feed-link, also ein Weg, der lediglich aus horizontalen und vertikalen Kanten besteht, welcher  $p$  mit einem Punkt  $q$  auf dem Rand von  $P$  verbindet, so dass die Netzwerk-Distanz von  $p$  nach  $q$  über den Feed-link gerade der  $L_1$ -Distanz  $\|p - q\|_1$  entspricht, ist nicht eindeutig.

Zu einem Weg, den wir startend bei  $p$  ablaufen, nennen wir Kanten, die bezüglich der  $L_1$ -Metrik von  $p$  wegführen, also die  $L_1$ -Distanz zu  $p$  vergrößern, steigend, sonst fallend. Eine Folge direkt aufeinanderfolgender steigender, bzw. fallender Kanten eines Weges, nennen wir eine steigende bzw. eine fallende Folge.

Jeder Weg von  $p$  nach  $q$ , der aus einer einzigen steigenden Folge besteht und innerhalb des (eventuell entarteten) Rechtecks  $R(p, q)$ , welches durch die Ecken  $p$  und  $q$  definiert wird, verläuft, entspricht der oben genannten Anforderung für einen Feed-link. Haben wir nun beispielsweise zwei Feed-links, die an die Punkte  $q_1$  und  $q_2$  anbinden sollen, so kann es eine, nicht aus lediglich dem Punkt  $p$  bestehende, Schnittmenge zwischen den Rechtecken  $R(p, q_1)$  und  $R(p, q_2)$ , geben.

Führen wir zunächst beide Feed-links entlang eines gemeinsamen Weges innerhalb dieser Schnittmenge und trennen sie erst dann auf, so kann gegenüber der disjunkten Platzierung der Feed-links eine Ersparnis in der Gesamtlänge der Feed-links erreicht werden. Wir erlauben dabei insbesondere, dass die Feed-links auch außerhalb von  $P$  verlaufen. Es stellt sich also die Frage, wie zwei oder mehr Feed-links, aufgefasst als Wege ausgehend von  $p$  zum Rand von  $P$  optimal zu setzen sind, so dass die Gesamtweglänge minimal wird, das heißt möglichst viel des Weges von den Feed-links gemeinsam genutzt wird. Ein mögliches Beispiel einer Wahl von Feed-links welche Wegabschnitte gemeinsam benutzen, gibt Abbildung 3.11.

Ein Baum, welcher eine Menge von  $N$  Punkten  $\{p_1, \dots, p_N\} \in \mathbb{R}_+^2$  mit  $p_1 = (0, 0)$  verbindet, so dass die Netzwerkdistancen von  $p_1$  zu  $p_i$ , für  $i \in \{2, \dots, N\}$ , gerade den  $L_1$ -Distancen  $\|p_1 - p_i\|_1$  entsprechen, heißt rektilineare Steiner-Arboreszenz (RSA). Das Problem, für eine gegebene Punktmenge  $\{p_1, \dots, p_N\}$  eine RSA mit Länge  $\leq K$  zu finden, ist als  $\mathcal{NP}$ -vollständig bekannt [SS00]. Eine RSA mit minimaler Länge heißt minimale rektilineare Steiner-Arboreszenz (MRSA). Es ist ein polynomielles Approximationsschema (PTAS) für MRSA bekannt [LR00, Zac00].

Wir können MRSA leicht auf unser gegebenes Problem des Findens einer bezüglich der Weglänge minimalen Menge von Feed-links von  $p$  zu  $q_1, \dots, q_l$  reduzieren, weshalb dieses  $\mathcal{NP}$ -schwer sein muss. Es gibt eine Menge von Kanten, die Teilmenge des Hanan-Gitters [Han66]  $H(\{p, q_1, \dots, q_l\})$  ist (das ist der Graph, den man erhält, wenn man horizontale vertikale Linien durch alle Punkte aus  $\{p, q_1, \dots, q_l\}$  zieht) und dabei  $p$  mit  $q_1, \dots, q_l$

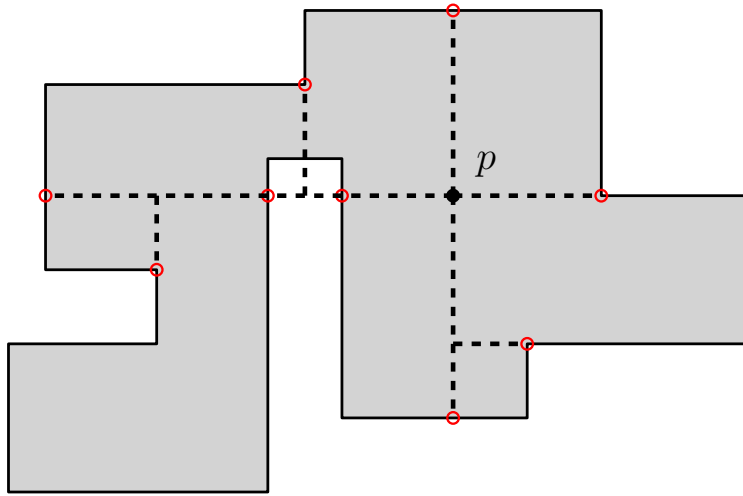


Abbildung 3.11: Wir sehen ein rektilineares Polygon und rektilineare Feed-links (gestrichelte Linien), die  $p$  mit Punkten des Randes von  $P$  verbinden (rote Kreise). In diesem Beispiel entsprechen die Anbindungspunkte der Feed-links gerade den Kandidaten von  $P$  (siehe Abschnitt 3.1). Dadurch, dass Feed-links Wegabschnitte gemeinsam nutzen, kann eine Ersparnis in der Gesamtweglänge erreicht werden. Dabei dürfen die Feed-links auch außerhalb von  $P$  verlaufen.

verbindet, so dass die Netzwerkdistanz gerade der  $L_1$ -Distanz entspricht, die also die Anforderungen für unsere Feed-links erfüllt. Da außerdem eine MRSA existiert, die Teilmenge von  $H(\{p, q_1, \dots, q_l\})$  ist, kann für eine geratene Teilmenge von Kanten aus  $H(\{p, q_1, \dots, q_l\})$  in polynomieller Zeit in  $l$  überprüft werden, ob die Eigenschaften für Feed-links erfüllt sind und ob die summierte Kantenlänge  $\leq K$  ist. Somit ist dieses Problem in  $\mathcal{NP}$  und damit auch  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

Das PTAS welches MRSA approximiert, beruht auf einer Abwandlung von Arora's PTAS für das euklidische Travelling Salesman Problem (TSP) [Aro98]. Das Verfahren liefert in  $n^{\mathcal{O}(1/\epsilon)}$  Laufzeit eine RSA die höchstens  $(1 + \epsilon)$  mal länger ist als die MRSA. Dieses Verfahren kann nach [Zac00] so erweitert werden, dass es eine MRSA mit Punkten in allen vier Quadranten der euklidischen Ebene approximiert, was für unsere Zwecke, also das Finden längenminimaler Feed-links, geeignet ist.

**Satz 3.28.** *Für ein rektilineares, einfaches Polygons  $P$  mit  $n$  Knoten und einem Punkt  $p$  im Inneren von  $P$ , kann eine Menge von  $m$  rektilinearen Feed-links, welche  $p$  mit dem Rand von  $P$  an den Punkten  $q_1, \dots, q_m$  verbinden und deren Gesamtlänge höchstens  $(1 + \epsilon)$  mal größer ist, als die minimale Gesamtlänge, die mit solchen Feed-links erreichbar ist, in  $n^{\mathcal{O}(1/\epsilon)}$  Zeit bestimmt werden.*

## 4. Fazit

Wir haben das in [ABB<sup>+</sup>11] eingeführte Konzept der Streckung in einfachen Polygonen untersucht und Algorithmen für unseres Wissens nach bisher nicht betrachtete Szenarien angegeben. In Kapitel 2 haben wir einen Algorithmus angegeben, welcher in polynomieller Zeit zwei Feed-links findet, welche die Streckung bezüglich einer endlichen Menge von Sites minimieren. Der kombinatorische Ansatz führt dabei auf lokale Minimalwertprobleme mit Nebenbedingungen, welche wir analysiert und Lösungsstrategien angegeben haben.

Der kombinatorische Ansatz ist prinzipiell auch auf den Fall mit  $m > 2$  Feed-links erweiterbar. Die Lösung des resultierenden Minimalwertproblems mit Nebenbedingungen und  $m$  Parametern liefert dann, analog zum Fall mit zwei Feed-links,  $m$  Feed-links, welche die Streckung bezüglich der gegebenen Menge von Sites minimieren. Eine analytische Lösung des Minimalwertproblems scheint möglich zu sein, bedarf aber weiterer Untersuchung. Allerdings könnten numerische Verfahren zur approximativen Bestimmung eines Minimalwertes gute Ergebnisse liefern.

Wir haben in Kapitel 3 außerdem das Problem in rektilinearen, einfachen Polygonen betrachtet, für das wir rektilineare Feed-links suchen, so dass die Streckung zu einer endlichen Menge von Sites, die wir bezüglich der  $L_1$ -Metrik messen, minimal wird. Wir haben einen einfachen kombinatorischen Ansatz angegeben, welcher das Problem in polynomieller Zeit löst, falls die Anzahl der zu platzierenden Feed-links als konstant angenommen wird. Ein Linearzeit-Algorithmus wurde für das Platzieren eines einzelnen Feed-links angegeben. Die angegebenen Verfahren können direkt benutzt werden, um optimale Feed-links bezüglich allen Punkten auf dem Rand von  $P$  zu finden.

Ungeklärt bleibt, ob im rektilinearen Fall eine bessere Laufzeit, eventuell sogar eine lineare Laufzeit, für das Platzieren von mehr als einem Feed-link erreicht werden kann. Auch um die Frage zu beantworten, ob Heuristiken oder exakte Algorithmen zum Berechnen von mehr als einem Feed-link existieren, die eine polynomielle Laufzeit in den Eingabeparametern und der Anzahl der Feed-links haben, sind weitere Untersuchungen nötig.





# Literaturverzeichnis

- [ABB<sup>+</sup>11] ARONOV, B., K. BUCHIN, M. BUCHIN, B. JANSEN, T. DE JONG, M. VAN KREVLED, M. LÖFFLER, J. LUO, R. I. SILVEIRA und B. SPECKMANN: *Connect the dot: Computing feed-links for network extension*. Journal of Spatial Information Science, 3:3–31, 2011.
- [Aro98] ARORA, S.: *Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean Traveling Salesman and Other Geometric Problems*. Journal of the ACM, 45(5):753–782, 1998.
- [ASS89] AGARWAL, P., M. SHARIR und P. SHOR: *Sharp upper and lower bounds on the length of general Davenport-Schinzel sequences*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 52:228–274, 1989.
- [Han66] HANAN, M.: *On Steiner’s Problems with Rectilinear Distance*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 14(2):255–265, 1966.
- [Her89] HERSHBERGER, J.: *Finding the upper envelope of  $n$  line segments in  $O(n \log n)$  time*. Information Processing Letters, 33:169–174, 1989.
- [HS99] HERSHBERGER, J. und S. SURI: *An optimal algorithm for Euclidean shortest paths in the plane*. SIAM Journal on Computing, 28(6):2215–2256, 1999.
- [LR00] LU, LING und LU RUAN: *Polynomial Time Approximation Scheme for the Rectilinear Steiner Arborescence Problem*. Journal of Combinatorial Optimization, 4:357–363, 2000.
- [SS00] SHI, W. und C. SU: *The Rectilinear Steiner Arborescence Problem is NP-complete*. In: *Proceedings 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Seiten 780–787, 2000.
- [Zac00] ZACHARIASEN, MARTIN: *On the Approximation of the Rectilinear Steiner Arborescence Problem in the Plane*. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.43.4529&rep=rep1&type=pdf>, 2000.