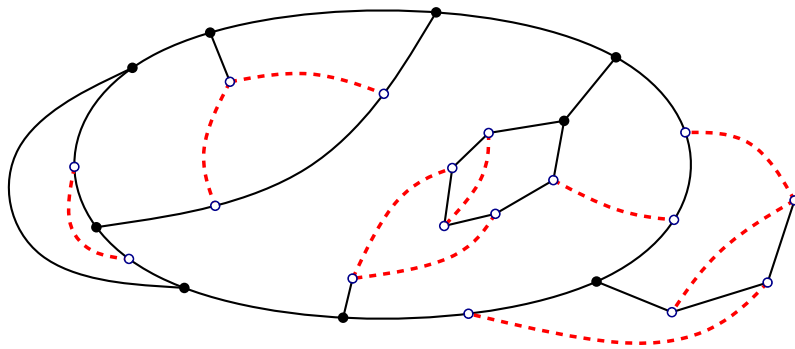


Reguläre Erweiterung Planarer Graphen

Studienarbeit
von

Jonathan Rollin

An der Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik I



Erstgutachter:

Betreuende Mitarbeiter:

Bearbeitungszeit:

Prof. Dr. Dorothea Wagner

Tanja Hartmann, Dr. Ignaz Rutter

Oktober 2011 – April 2012

Zusammenfassung

Diese Studienarbeit untersucht reguläre Augmentierungen planarer Graphen. Durch das Einfügen neuer Kanten sollen planare Graphen 3-regulär werden. Gleichzeitig soll dabei, wenn möglich, der Zusammenhang verstärkt werden. Es wird gezeigt, dass es NP-schwer ist für einen gegebenen planaren Graphen zu entscheiden, ob eine solche Augmentierung existiert.

Ist zusätzlich jedoch eine planare Einbettung des Graphen gegeben, die unverändert bleiben soll, verringert sich die Komplexität des Problems, da neue Kanten nur noch in den bestehenden Facetten der vorgegebenen Einbettung liegen können. Es wird eine Charakterisierung solcher Graphen hergeleitet und außerdem werden Algorithmen zur Berechnung der Erweiterungen beschrieben.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Studienarbeit selbstständig und ohne die Verwendung anderer als der angegebenen Quellen verfasst habe.

Ort, Datum

Jonathan Rollin

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemdefinition	2
1.2	Überblick	3
2	Grundlagen und Notation	3
2.1	Notation und Definitionen	3
2.2	Zusammenhang 3-Regulärer Graphen	4
3	k-RegAug für Allgemeines k	5
3.1	Existenz k-Regulärer Graphen mit n Knoten	6
3.2	Lösbarkeit von κ -REGAUG	8
4	Planares 3-RegAug für Feste Einbettung	8
4.1	Eine Facette mit Fester Belegung	9
4.2	Globale Entscheidung	18
4.3	Konstruktion der Belegung	20
5	Planares 3-Reg-c-ConAug bei Fester Einbettung	21
5.1	Charakterisierung	21
5.2	Konstruktion der Belegung	23
6	Planares 3-RegAug mit Variabler Einbettung	27
6.1	Das Planare 3SAT-Problem	27
6.2	Die Reduktion auf Variables, Planares 3-REGAUG	28
6.3	Augmentierung des Zusammenhangs	33
7	Zusammenfassung und Ausblick	34
	Literaturverzeichniss	36

1 Einleitung

In dieser Studienarbeit wird untersucht, wie man vorhandene Graphen so verändern kann, dass sie bestimmte Eigenschaften erfüllen. Genauer gesagt beschäftigt sich die Arbeit mit dem Erweitern gegebener Graphen durch Einfügen neuer Kanten. Durch diese Modifikation eines Graphen kann beispielsweise der Zusammenhang verstärkt, Regularität hergestellt oder auch der maximale Fluss erhöht werden. Die Frage wie man Graphen durch neue Kanten so erweitern kann, dass bestimmte Eigenschaften erfüllt sind, wird schon seit längerem untersucht und ist in der Literatur als *Augmentierungsproblem* bekannt. Die meisten Autoren beschäftigen sich mit der Verstärkung des Zusammenhangs. Dies dient unter anderem der Frage, wie Netzwerke robuster gegen Ausfälle einzelner Verbindungen gemacht werden können. Dabei kann jede Art von Netzwerk, von Computernetzwerken, über Versorgungsleitungen bis hin zu Straßennetzen betrachtet werden. Hauptsächlich werden Optimierungsprobleme behandelt, um den gewünschten Effekt bei möglichst niedrigen Kosten zu erhalten. Bezogen auf vorgegebene Kosten für neue Kanten, ist eine minimale Menge von Kanten gesucht, sodass durch Einfügen dieser Kanten bestimmte Forderungen an den Zusammenhang erfüllt werden. Einige dieser Fragestellungen beschreiben Eswaran und Tarjan [5]. Sie zeigen, dass es bei beliebiger Kostenfunktion NP-schwer ist einen Graphen mit minimalen Kosten stark zusammenhängend, 2-fach knoten- oder 2-fach kantenzusammenhängend zu machen. Für den Fall, dass die Kosten für alle Kanten gleich sind, werden jedoch Algorithmen mit Laufzeit in $O(V + E)$ vorgestellt. Weiter zeigen Nagamochi und Ibaraki, dass das Erweitern eines Graphen zu 2-fachem Knotenzusammenhang mit minimalen Kosten sogar dann NP-schwer ist, wenn alle Gewichte aus $\{1, 2\}$ sind [14]. Kant und Bodländer untersuchen diese Fragestellungen für ungewichtete und planare Graphen [10]. Sie zeigen, dass es NP-schwer ist eine minimale Menge von Kanten zu finden, die einen Graphen 2-fach knotenzusammenhängend macht und dabei zusätzlich Planarität gewährleistet. Dass dies auch für 2-fachen Kantenzusammenhang gilt, beweisen Rutter und Wolf [15]. Weiterhin wird dort gezeigt, dass beide Probleme auch für planare geometrische Graphen (planare Graphen, deren Kanten als Geradenstücke eingebettet werden können) NP-schwer sind.

Einige andere Arten von Augmentierungsproblemen neben der Verstärkung des Zusammenhangs, beschreibt Hsu in einem einleitenden Übersichtskapitel [9]. Dabei werden zum Beispiel Arbeiten genannt, die nach eulerschen [1] oder hamiltonschen [8] Graphen suchen oder bestimmte Kanten einfügen und dabei den zulässigen Durchmesser [2] oder Radius [13] beschränken. Ein Spezialfall von Augmentierungsproblemen ist das Einfügen von Kanten in leere Graphen, das heißt in Graphen, die nur die Knoten vorgeben. Hier untersuchen beispielsweise Tejel et al. Algorithmen zur Konstruktion 3-regulärer und 3-zusammenhängender Graphen auf gegebenen Punkten in der Ebene [7].

In dieser Arbeit wird ein weiteres Augmentierungsproblem behandelt. Ungewichtete und planare Graphen sollen durch Einfügen neuer Kanten so erweitert werden, dass sie planar bleiben und zudem 3-regulär werden. Außerdem soll dabei, wenn möglich, der Zusammenhang verstärkt werden. Insbesondere 3-Regularität in Kombination mit 3-fachem Zusammenhang ist hier von Interesse, da diese Graphen gerade die Dualgraphen planarer Triangulierungen sind. Im folgenden Abschnitt werden genaue Definitionen der untersuchten Probleme angegeben. Durch die gewünschte 3-Regularität ist die Anzahl der nötigen Kanten hier fest vorgegeben. Da zudem keine Kosten betrachtet werden, ist nach der Existenz solcher Kanten gefragt und nicht nach einer minimalen Menge von Kanten, wie in den meisten Arbeiten zum Zusammenhang.

1.1 Problemdefinition

Grundsätzlich basieren alle in dieser Arbeit untersuchten Probleme auf einem gegebenen endlichen Graphen. Dabei wird hier immer von einem ungerichteten, ungewichteten, einfachen und zusammenhängenden Graphen ausgegangen, ohne dass dies im weiteren Verlauf wiederholt angeführt wird.

Definition: Eine *Erweiterung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge von Kanten $W \subseteq \binom{V}{2}$ zwischen Knoten des Graphen G .

Wird im folgenden von einer *planaren, regulären* oder *k-fach zusammenhängenden Erweiterung* eines Graphen G gesprochen, so ist damit gemeint, dass der Graph $G' := (V, E \cup W)$, der durch das Hinzufügen der Kanten aus der Erweiterung W entsteht, planar, regulär bzw. k-fach zusammenhängend ist.

Definition: Als *Augmentierungsproblem* eines Graphen G für eine Menge von Graph-eigenschaften P , wie z. B. Regularität oder Zusammenhang, wird folgendes Entscheidungsproblem bezeichnet:

Gibt es eine Erweiterung W von G , sodass der erweiterte Graph $G' := (V, E \cup W)$ alle Eigenschaften aus P erfüllt?

Die Eigenschaften aus P sind die Eigenschaften, die ein Augmentierungsproblem *fordert*. Hier sollen nur *einfache Erweiterungen* betrachtet werden, das heißt $W \subseteq \binom{V}{2} \setminus E$, um triviale Lösungen der behandelten Augmentierungsprobleme auszuschließen. In dieser Arbeit werden unterschiedliche Augmentierungsprobleme mit verschiedenen Forderungen untersucht. Diesen Problemen gemeinsam ist jedoch immer die Forderung nach Regularität. Das Augmentierungsproblem aus folgender Definition ist auf diese Weise grundlegend für alle weiteren.

Definition: 3-Regular Augmentation

Mit 3-REGAUG wird das folgende Augmentierungsproblem bezeichnet:

Existiert zu einem gegebenen Graphen G eine 3-reguläre Erweiterung von G ?

Daran anschließend wird dieses Augmentierungsproblem erweitert, indem verschiedene weitere Eigenschaften für die Erweiterung gefordert werden.

Definition: 3-Regular c-Connected Augmentation

Mit 3-REG-C-CONAUG wird das folgende Augmentierungsproblem bezeichnet:

Existiert zu einem gegebenen Graphen für ein gegebenes $c \in \mathbb{N}$ eine c-fach zusammenhängende und 3-reguläre Erweiterung?

Hier wird also zusätzlich die Eigenschaft „c-facher Zusammenhang“ gefordert. Desweiteren werden diese Probleme vor allem für planare Graphen untersucht. Ist A ein Augmentierungsproblem, so bezeichnet *planares A* das Augmentierungsproblem \tilde{A} , welches zusätzlich zu den Forderungen von A Planarität des erweiterten Graphen fordert.

Weiter wird hier unterschieden, ob eine Erweiterung mit beliebiger planarer Einbettung gesucht ist (VARIABLE PLANAR 3-REGAUG), oder ob eine planare Einbettung des Graphen G gegeben ist und unverändert erhalten bleiben soll. Das heißt im zweiten Fall wird weiter die Eigenschaft „Die Kanten der Erweiterung müssen kreuzungsfrei innerhalb der Facetten der fixierten Einbettung von G eingezeichnet werden können“ gefordert (FIXED

PLANAR 3-REGAUG). Offensichtlich kann in beiden Varianten eine planare Erweiterung nur dann existieren, wenn der Originalgraph planar ist.

1.2 Überblick

Zuerst beschäftigt sich Kapitel 3 mit nicht notwendigerweise planaren, k -regulären Graphen im Allgemeinen. Es werden einige Beobachtungen und Aussagen vorgestellt, die bestimmte Strukturen regulärer Graphen verdeutlichen, die im weiteren Verlauf nützlich sind. Darauf folgen die drei zentralen Abschnitte der Arbeit. Zuerst werden in Kapitel 4 planare Graphen mit gegebener Einbettung betrachtet, welche durch Einfügen neuer Kanten in die bestehenden Facetten 3-regulär werden sollen. Es wird eine lokale (d.h. facettenweise) Charakterisierung derjenigen Graphen hergeleitet, für die es eine solche Menge von Kanten gibt. Basierend auf dieser Charakterisierung wird dann ein Algorithmus entwickelt, der die Kanten mit Laufzeit in $O(n^{2.5})$ berechnet. Danach wird dieses Problem in Kapitel 5 auf 2-fachen Zusammenhang erweitert. Dabei ist es möglich, die lokale Charakterisierung durch lediglich eine zusätzliche Bedingung anzupassen. Auch der Algorithmus zur Berechnung der nötigen Kanten kann, mit ein paar Veränderungen, weiter verwendet werden. Die Laufzeit erhöht sich allerdings auf $O(n^4)$. Im anschließenden Kapitel 6 wird auf die vorgegebene Einbettung verzichtet. Der erweiterte Graph muss hier lediglich eine beliebige, planare Einbettung haben. Durch Reduktion von planarem 3SAT wird gezeigt, dass dieses Entscheidungsproblem NP-schwer ist. Weiter wird gezeigt, dass dies auch gilt, wenn der erweiterte Graph zusätzlich 2-fach oder 3-fach zusammenhängend sein soll und sogar wenn dieser bereits 2-fach zusammenhängend ist. Abschließend gibt Kapitel 7, neben einem Rückblick auf die Arbeit, auch einen Ausblick auf verwandte Fragestellungen. Tabelle 1 gibt eine Übersicht über die behandelten Problemstellungen und verweist auf die entsprechenden Abschnitte in der Arbeit (wenn eine Lösung gefunden wurde).

Planarität \ Zusammenhang	keine Forderung	2-fach zshg.	3-fach zshg.
keine Forderung	$O(n^3)$ Kap. 3.2	?	?
feste Einbettung	$O(n^{2.5})$ Kap. 4	$O(n^4)$ Kap. 5	?
variable Einbettung	NPC Kap. 6	NPC Kap. 6.3	NPC Kap. 6.3

Tabelle 1: Übersicht über Variationen von 3-REGAUG

2 Grundlagen und Notation

In diesem Kapitel werden einige Definitionen und Schreibweisen eingeführt und mehrere grundlegende Aussagen hergeleitet.

2.1 Notation und Definitionen

Zuerst werden hier einige notwendige Definitionen und Notationen eingeführt, welche meist aus dem Grundlagenkapitel des Buchs von Diestel [4] übernommen wurden und in der gesamten Arbeit wiederholt verwendet werden. Grundkenntnisse der Graphentheorie werden

vorausgesetzt und der Leser sonst an die einführenden Kapitel aus diesem Buch verwiesen.

Zuerst folgt eine kurze Übersicht über zentrale Begriffe dieser Arbeit. Hier und in der ganzen Arbeit bezeichne $G = (V, E)$ einen Graphen mit endlicher Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$. Außerdem wird im Bezug auf einem Graphen immer $n := |V|$ und $m := |E|$ gelten.

Ist G ein Graph und $k \in \mathbb{N}_0$ so heißt G *k-regulär*, wenn für alle Knoten $v \in V$ gilt $\text{grad}(v) = k$. Ein Graph heißt, für ein $c \in \mathbb{N}_0$, *c-fach knotenzusammenhängend*, wenn es keine Teilmenge $S \in \binom{V}{c-1}$ gibt, sodass $G \setminus S$ unzusammenhängend ist. Analog ist *c-facher Kantenzusammenhang* für eine Menge $S \in \binom{E}{c-1}$ definiert. Aus dem Satz von Menger folgt, dass diese Bedingungen äquivalent zur Existenz von c knoten- bzw. kantendisjunkten Wegen zwischen je zwei Knoten aus V ist.

Ein Graph G heißt *planar*, wenn es eine Einbettung von G in die reelle Ebene \mathbb{R}^2 gibt, in der sich keine zwei Kanten kreuzen. Ist $\tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Einbettung eines Graphen G , so heißen die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{G}$ *Facetten* von G . Als *Rand* einer Facette F bezeichnen wir dabei den (topologische) Rand des Abschlusses von $F \subseteq \mathbb{R}^2$, das heißt $\text{Rand}(F) := \partial \overline{F}$. Die Definition des Randes einer Facette unterscheidet sich hier von derjenigen von Diestel [4]. Dort besteht der Rand einer Facette aus allen Knoten und Kanten, die an die Facette grenzen (dem Rand im topologischen Sinne). Hier liegen jedoch nur die Knoten und Kanten auf dem Rand einer Facette, die noch an eine weitere Facette grenzen. Für alle Facetten F einer Einbettung \tilde{G} von G gilt jedoch weiterhin $\text{Rand}(F) \subseteq \tilde{G}$. In Abbildung 1 besteht der Rand von F aus den fett gezeichneten Knoten und den gestrichelten Kanten.

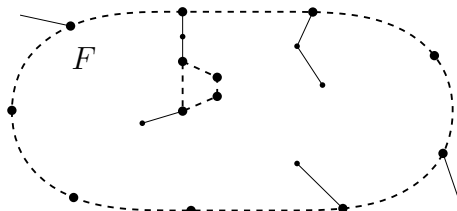


Abbildung 1: Die gestrichelten Kanten und die fetten Knoten bilden den Rand von F .

In einer planaren Einbettung eines Graphen nach \mathbb{R}^2 lässt sich folgender Spezialfall einer Tiefensuche durchführen. Eine *Left-First Tiefensuche* in einem Graphen G mit gegebener Einbettung $\tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ und beginnend mit einer Kante $e = \{u, v\} \in E$ in Richtung v entspricht einer Tiefensuche in G , die in u in Richtung v beginnt. An einem Knoten w , wird die Suche dabei mit der im Uhrzeigersinn nächsten unbesuchten Kante nach der zuletzt verwendeten Kante fortgeführt. Analog folgt eine *Right-First Tiefensuche* der gegen den Uhrzeigersinn nächsten Kante.

In Abbildung 2 ist das Ergebnis einer Left-First Tiefensuche für einen Graphen dargestellt, welche mit der Kante e in Pfeilrichtung beginnt.

2.2 Zusammenhang 3-Regulärer Graphen

In diesem Abschnitt werden noch zwei grundlegende Beobachtungen zum Zusammenhang in 3-regulären Graphen gezeigt, die später verwendet werden.

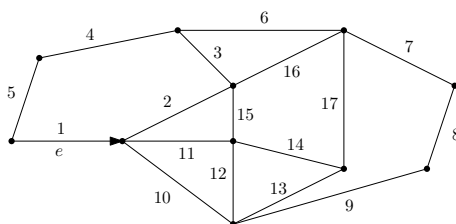


Abbildung 2: Die Zahlen geben die Reihenfolge vor, in der die Kanten von einer mit e in Pfeilrichtung beginnenden Left-First Tiefensuche gefunden werden.

Lemma 2.1:

Für einen 3-regulären Graphen G gilt

$$G \text{ ist } k\text{-fach knotenzusammenhängend} \Leftrightarrow G \text{ ist } k\text{-fach kantenzusammenhängend.}$$

Beweis. Gibt es in einem Graphen G zwischen je zwei Knoten jeweils k knotendisjunkte Wege, so sind diese insbesondere auch kantendisjunkt. Daraus folgt, dass k -facher Knotenzusammenhang den k -fachen Kantenzusammenhang impliziert.

Gibt es umgekehrt k kantendisjunkte Wege, so sind diese hier auch knotendisjunkt, da ein gemeinsamer Knoten von zwei solchen Wegen mindestens Grad 4 haben müsste (für jeden Weg zwei verschiedene Kanten). \square

Es ist außerdem leicht zu sehen, dass der Zusammenhang in einem 3-regulären Graphen nach oben beschränkt ist.

Beobachtung 2.1: Da in einem 3-regulären Graphen die drei Nachbarn eines Knotens immer einen Separator bilden, kann ein 3-regulärer Graph maximal 3-fach zusammenhängend sein.

3 k -RegAug für Allgemeines k

In diesem Abschnitt wird eine Lösung für das allgemeinere Problem k -REGAUG vorgestellt. Dieses fordert k -Regularität für den erweiterten Graphen. Wie letztendlich gezeigt wird, ist die Frage nach der Existenz einer k -regulären Erweiterung äquivalent zur Suche nach einem bestimmten verallgemeinerten Matching im Komplementgraphen. Diese Idee wird dann auch für 3-REGAUG und dessen Varianten verwendet werden.

Zuerst zwei einfache Beobachtungen, die erste Aussagen darüber treffen, welche regulären Erweiterungen es für einen gegebenen Graphen geben, bzw. nicht geben, kann. Die erste Beobachtung gibt eine obere und eine untere Schranke an, die zweite Beobachtung liefert eine Paritätsaussage.

Beobachtung 3.1: Ist das Problem k -REGAUG für ein $k \in \mathbb{N}$ lösbar, so gilt für k :

$$\max_{u \in V} (\text{grad}(u)) \leq k \leq n - 1.$$

Die untere Schranke ergibt sich aus der Bedingung, dass keine bestehenden Kanten gelöscht werden dürfen. Die obere Schranke gilt, da die Erweiterung keine Mehrfachkanten oder Schleifen in den Graphen einfügen darf. Wählt man $k = n - 1$, so erhält man den vollständigen Graphen mit n Knoten, K_n , welcher sich natürlich auch immer durch das

Hinzufügen aller fehlenden Kanten konstruieren lässt. Die obere Schranke ist also scharf. Beschränkt man sich auf planare Graphen, gilt dies jedoch nicht mehr. Weil in jedem planaren Graphen ein Knoten mit Grad kleiner oder gleich 5 existiert, kann ein planarer Graph maximal 5-regulär sein und die obere Schranke auf $\min\{n - 1, 5\}$ präzisiert werden.

Beobachtung 3.2: In einem k -regulären Graphen gilt

$$n \cdot k = 2 \cdot m,$$

da jede Kante zu genau zwei Knoten adjazent ist.

Das heißt, dass ein gegebener Graph mit einer *ungeraden Anzahl an Knoten* nur zu einem regulären Graphen mit *geradem Grad* erweitert werden kann.

3.1 Existenz k -Regulärer Graphen mit n Knoten

Nun wird gezeigt, dass es zu gewünschtem Knotengrad k und Knotenanzahl n , immer einen k -regulären Graphen mit n Knoten gibt, wenn k und n die Einschränkungen aus den Beobachtungen 3.1 und 3.2 in Abschnitt 3 erfüllen. Anders ausgedrückt ist das Problem k -REGAUG für den leeren Graphen mit n Knoten genau dann lösbar, wenn n und k diese Voraussetzungen erfüllen. Enthält der gegebene Graph jedoch Kanten, kann man allein aus dem Wissen über Knotengrad und -anzahl, keine weitergehenden Aussagen über die Existenz einer Erweiterung treffen. In Abbildung 3 wird dies deutlich. Dort sind zwei Graphen gezeichnet, die fast identisch sind. Der rechte Graph G' entsteht aus dem linken Graph G , indem die Kante e eingefügt wird. Beide Graphen haben also sieben Knoten und in G gibt es eine (gestrichelt eingezeichnete) 4-reguläre Erweiterung. In G' gibt es jedoch keine solche Erweiterung, da zwischen adjazenten Knoten keine weitere Kante eingefügt werden kann.



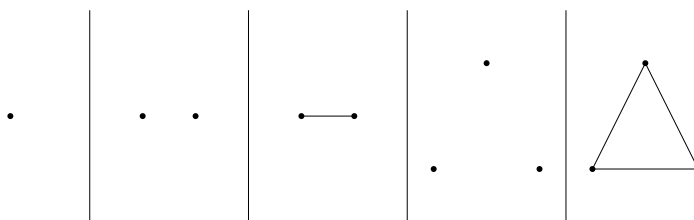
Abbildung 3: Links ein Graph G , für den eine 4-reguläre Erweiterung existiert. Rechts der Graph G' , der aus G durch Hinzufügen der Kante e entsteht und für den es keine 4-reguläre Erweiterung gibt.

Das folgende Lemma liefert die Grundlage für den Beweis des darauf folgenden Lemmas, welches die Existenz k -regulärer Graphen auf n Knoten charakterisiert.

Lemma 3.1:

In einem k -regulären, einfachen Graphen beginnt in jedem Knoten $v \in V$ ein einfacher Weg der Länge k .

Beweis. Sei $v \in V$. Da der Graph einfach ist und $\text{grad}(v) = k > 0$, gibt es einfache Wege, die in v beginnen. Wähle einen dieser Wege ω mit maximaler Länge und sei u der andere Endknoten dieses Weges. Dann sind alle k Kanten von u zu Knoten auf dem Weg ω inzident (sonst wäre ω nicht maximal) und diese Knoten sind insbesondere verschieden, da der Graph einfach ist. Auf dem Weg liegen also, inklusive u und v , bereits $k + 1$ Knoten. Somit hat der Weg mindestens Länge k . \square

Abbildung 4: Alle einfachen, k -regulären Graphen auf 1, 2 und 3 Knoten.**Lemma 3.2:**

Zu gegebenen $n, k \in \mathbb{N}$, mit $0 \leq k \leq n - 1$, existiert genau dann ein k -regulärer Graph mit n Knoten, wenn $n \cdot k$ gerade ist.

Beweis. Aus Beobachtung 3.2 folgt die Notwendigkeit, dass $n \cdot k$ gerade ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass ein k -regulärer Graph mit n Knoten auch immer existiert, wenn $n \cdot k$ gerade ist und $0 \leq k \leq n - 1$.

Beweis per Induktion über die Knotenanzahl n .

Für kleines n lassen sich die regulären Graphen leicht konstruieren. So ist die Aussage für $n \in \{1, 2, 3\}$ klar, siehe Abbildung 4.

Sei also ein $n > 3$ und ein $k \leq n - 1$ gegeben, sodass $n \cdot k$ gerade ist.

0. Fall: Es ist $k = n - 1$. Dann ist K_n der gesuchte Graph.

1. Fall: Es ist $k < n - 1$ und $(n - 1) \cdot k$ gerade.

In diesem Fall muss k gerade sein, da nicht sowohl n als auch $n - 1$ gerade sein können. Betrachte den nach Induktionsvoraussetzung existierenden k -regulären Graphen G' mit $n - 1$ Knoten und füge einen weiteren Knoten, ohne Kanten, hinzu. Wähle in G' einen nach Lemma 3.2 existierenden Weg der Länge k und ersetze jede zweite Kante $\{u, v\}$ entlang dieses Weges durch je eine Kante von u und eine von v zu dem neuen Knoten. Der Graph bleibt dabei einfach und der Grad der Knoten aus G' bleibt gleich. Da k gerade ist, werden auf dem Weg also genau $k/2$ Kanten durch k neue Kanten ersetzt und der entstehende Graph ist k -regulär und hat n Knoten.

2. Fall: Es ist $k < n - 1$ und $(n - 1) \cdot k$ ungerade.

In diesem Fall muss also k ungerade sein und n gerade. Da somit auch $n - 2$ gerade ist, muss zudem $k < n - 2$ gelten. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein k -regulärer Graph G' mit $n - 2$ Knoten. In diesem Graphen wähle wiederum einen Weg der Länge k und füge zwei weitere Knoten, ohne Kanten, zu G' hinzu. Anders als in Fall 1 lösche alle Kanten des Weges und füge für alle Knoten auf dem Weg, außer den Endknoten, je eine Kante zu den beiden neuen Knoten ein. Von den beiden Endknoten verbinde beide mit jeweils einem der beiden neuen Knoten (so, dass sie nicht mit dem Gleichen verbunden sind). Der Grad der Knoten auf dem Weg verändert sich dabei wiederum nicht. Da auf einem Weg der Länge k , inklusive der Endknoten, $k + 1$ Knoten liegen, haben die neuen Knoten nun Grad k . Der entstandene Graph ist also k -regulär und hat n Knoten.

□

3.2 Lösbarkeit von k-RegAug

Eine Erweiterung eines Graphen G besteht aus Kanten, die nicht schon im Graph enthalten sind. Das heißt eine Erweiterung ist eine Teilmenge der Kanten des Komplementgraphen \overline{G} von G . Dabei ist der Graph $\overline{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Folgende Beobachtung zeigt, wie die Suche nach einer regulären Erweiterung von G , der Suche nach einem bestimmten Subgraphen von \overline{G} entspricht.

Beobachtung 3.3: Ein Graph mit n Knoten ist genau dann k -regulär, wenn der Komplementgraph von G $(n - 1 - k)$ -regulär ist.

Eine reguläre Erweiterung entspricht also den Kanten eines Subgraphen (Faktors) des Komplementgraphen \overline{G} , in welchem jeder Knoten enthalten ist und jeder Knoten zu genau so vielen Kanten inzident ist, wie dem Knoten im Originalgraphen G zur Regularität fehlen. Das Problem k -REGAUG lässt sich somit auf einen Spezialfall eines verallgemeinerten Faktorproblems (oder verallgemeinerten Matchingproblems) reduzieren. Gabow beschreibt das sogenannte DEGREE-CONSTRAINED-SUBGRAPH-Problem („Grad-Beschränktes-Subgraph-Problem“) als Suche nach einem Subgraphen S eines Graphen G , bei dem für jeden Knoten $v \in V$ eine untere und obere Schranke u_v bzw. o_v an in S inzidenten Kanten vorgeschrieben ist [6]. Er beschreibt zudem einen Algorithmus zur Lösung dieses Problems mit Laufzeit in $O(\sqrt{\sum_{v \in V} o_v} \cdot m)$.

Bei der hier konstruierten Instanz des Problems wird $u_v := o_v := \max\{k - \text{grad}(v), 0\}$ gesetzt. Bezeichnet \overline{m} die Anzahl der Kanten im Komplementgraphen von G , so liegt die Laufzeit in $O(\sqrt{n \cdot k \cdot \overline{m}}) \subseteq O(\sqrt{k} \cdot n^{2,5})$, weil $o_v \leq k$ gilt. Da der Algorithmus von Gabow keine Voraussetzungen an den Zusammenhang fordert, ist diese Konstruktion auch für unzusammenhängende Graphen korrekt bei gleicher Laufzeit.

4 Planares 3-RegAug für Feste Einbettung

In diesem Abschnitt wird das zu Beginn vorgestellte Problem FIXED PLANAR 3-REGAUG untersucht. Das heißt, dass ein gegebener Graph durch Hinzufügen von Kanten zu einem 3-regulären und planaren Graphen erweitert werden soll. Hier wird der Fall untersucht, dass zudem eine planare Einbettung des Graphen gegeben ist, die unverändert bestehen bleiben soll. Das heißt, dass es möglich sein muss die Kanten der Erweiterung kreuzungsfrei in die bestehenden Facetten der gegebenen Einbettung einzuzeichnen. Da es für nicht planare Graphen keine planare Erweiterung geben kann, werden ab sofort nur noch planare Graphen betrachtet.

Beobachtung 4.1: Ist FIXED PLANAR 3-REGAUG für einen Graphen lösbar, so gilt für alle Knoten $v \in V$

$$0 < \text{grad}(v) \leq 3.$$

Im Folgenden wird also zudem davon ausgegangen, dass der gegebene Graph nur Knoten mit Grad kleiner oder gleich 3 enthält. Da nur zusammenhängende Graphen betrachtet werden, bleiben also Graphen, in denen nur zu Knoten von Grad 1 und 2 Kanten hinzugefügt werden müssen. Die Knoten mit Grad 1 liegen immer in genau einer Facette und Knoten mit Grad 2 liegen entweder innerhalb einer Facette oder grenzen an genau zwei Facetten. Da hier die gegebene Einbettung erhalten bleiben muss, ist die Lage dieser Knoten

entscheidend. Für die Knoten, die innerhalb einer Facette liegen, müssen neue inzidente Kanten auch innerhalb dieser Facette eingefügt werden. Für Knoten, die an zwei Facetten liegen, können neue Kanten in einer der beiden Nachbarfacetten eingefügt werden. Die Entscheidung für diese Knoten stellt den einzigen Freiheitsgrad bei diesem Problem dar.

Definition: Knoten mit Grad kleiner als 3 werden *freie Knoten* genannt. Die fehlenden Adjazenzen heißen *freie Plätze*.

Hier sind die freien Knoten also gerade die Knoten mit Grad 1 oder 2. Ein Knoten von Grad 1 hat dabei zwei freie Plätze und ein Knoten von Grad 2 hat einen freien Platz. Für Knoten, die nur zu einer Facette inzident sind, müssen die fehlenden Kanten auch innerhalb dieser Facette eingebettet werden. Für die freien Knoten auf dem Rand zwischen zwei Facetten können die fehlenden Kanten in beiden benachbarten Facetten eingefügt werden. Ordnet man alle freien Plätze einer Facette zu, das heißt man legt für alle freien Plätze fest in welcher der angrenzenden Facetten die neue Kante verlaufen soll, so ist FIXED PLANAR 3-REGAUG für diese feste Zuordnung deutlich einfacher zu lösen. Für eine allgemeine Lösung des Problems sind dann natürlich alle möglichen Zuordnungen zu betrachten.

Definition: Als *Belegung eines Graphen G* wird die Zuweisung von freien Plätzen zu jeweils genau einer der angrenzenden Facetten bezeichnet. Eine Belegung B kann als Funktion von der Menge aller freien Plätze \mathcal{P} in die Menge aller Facetten \mathcal{F} aufgefasst werden,

$$B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}.$$

Dementsprechend ist eine *Belegung einer Facette F* die Einschränkung einer solchen Belegung B auf die freien Plätze, die F zugewiesen sind (oder auch das Urbild von F unter B). In der folgenden Definition werden nun die nötigen Voraussetzungen an eine planare Erweiterung von G zusammengefasst, damit diese eine Erweiterung im Sinne von FIXED PLANAR 3-REGAUG darstellt und eine feste Belegung des Graphen berücksichtigt.

Definition: Eine 3-reguläre Erweiterung W eines Graphen G *respektiert die Belegung B* einer Facette F , wenn eine Einbettung von $G + W$ im Sinne von FIXED PLANAR 3-REGAUG existiert, in der für alle Kanten $e = \{u, v\} \in W$ gilt, dass B die Knoten u und v derjenigen Facette zuweist, in die e eingebettet ist.

Das folgende Lemma folgt direkt aus den Definitionen.

Lemma 4.1:

Das Problem FIXED PLANAR 3-REGAUG ist für einen Graphen G genau dann erfüllbar, wenn es eine Belegung und eine planare Erweiterung von G gibt, sodass die Erweiterung des Graphen die Belegung von jeder Facette respektiert.

Im folgenden Abschnitt wird ein einfaches Kriterium entwickelt um zu entscheiden, ob es für eine Facette mit gegebener Belegung eine diese Belegung respektierende planare Erweiterung gibt. Mit diesem Kriterium kann dann auch entschieden werden, ob zu einer gegebenen Belegung des ganzen Graphen eine Erweiterung existiert, die die Belegung jeder Facette respektiert und somit eine Lösung von FIXED PLANAR 3-REGAUG ist.

4.1 Eine Facette mit Fester Belegung

Im folgenden sei F eine Facette mit gegebener Belegung. Es wird nun untersucht, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit es eine planare Erweiterung geben kann, die

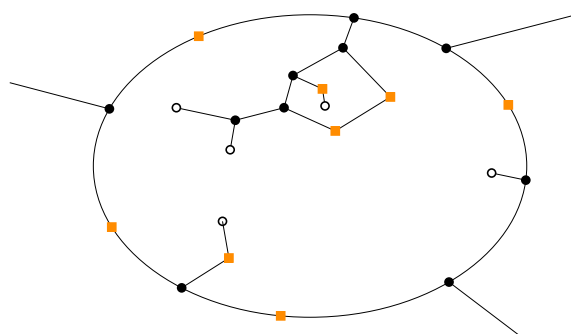


Abbildung 5: Teil eines planaren Graphen mit Knoten von Grad 1 (leere Kreise), 2 (Rechtecke) und 3 (ausgefüllte Kreise).

die gegebene Belegung für F respektiert. Dass dieselben Voraussetzungen auch hinreichend sind, wird durch Konstruktion „lokaler“ Erweiterungen, welche die Belegung einer Facette respektieren, hergeleitet.

Beobachtung 4.2: Gibt es eine respektierende Erweiterung einer Facette, so muss die Summe aller freien Plätze *gerade* sein, da jede Kante aus einer respektierenden Erweiterung immer zu genau zwei freien Knoten inzident ist und es für jeden freien Platz eines freien Knotens genau eine inzidente Kante gibt.

Da eine einzelne Kante zwischen zwei freien Knoten einer Facette immer kreuzungsfrei in die Facette eingezeichnet werden kann, werden beim einfachsten Ansatz um in einer Facette die nötigen neuen Kanten einzufügen, wiederholt zwei freie Knoten verbunden. Dabei sollte das zu verbindende Knotenpaar so gewählt werden, dass einer der zwei dadurch entstehenden Facetten alle übrigen freien Plätze aus der Belegung von F zugeordnet werden können. Im Folgenden wird sich zeigen, wann es durch geschickte Wahl der zu verbindenden Knotenpaare möglich ist, auf diese Weise alle freien Knoten zu verbinden. Dass dies nicht immer möglich ist, zeigt der in Abbildung 6 dargestellte Graph, für den es keine planare, 3-reguläre Erweiterung gibt. Die Knoten u und v können in einer solchen Erweiterung nur mit x bzw. y verbunden sein. Die beiden übrigen Knoten können jedoch nicht mit einer weiteren Kante verbunden sein. Somit kann es keine entsprechende Erweiterung geben.

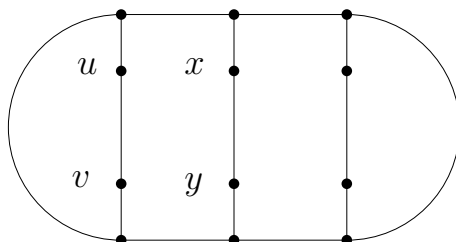


Abbildung 6: Ein planarer Graph für den FIXED PLANAR 3-REGAUG nicht lösbar ist.

Definition: Ein Weg in G , der nur freie Knoten aus der Belegung einer Facette besucht, wird im Folgenden ein *freier Weg* genannt.

Ein solcher freier Weg liegt entweder komplett innerhalb einer Facette oder auf dem Rand

zwischen genau zwei Facetten, da sonst immer ein (nicht freier) Knoten von Grad 3 auf dem Weg liegen würde.

Lemma 4.2:

In einer planaren Erweiterung W , die die Belegung einer Facette F respektiert, gibt es keine Kante $e = \{u, v\}$, sodass u und v zwei Knoten eines freien Weges ω auf dem Rand von F sind.

Beweis. Für Wege der Länge 1 oder 2 ist die Aussage klar, da nur einfache Erweiterungen betrachtet werden.

Für längere Wege ω folgt die Aussage induktiv. Sind zwei Knoten von ω über eine Kante $e \in W$ verbunden, so sind die beiden Knoten in G nicht benachbart und die übrigen freien Knoten zwischen diesen beiden Knoten bilden wiederum einen freien Weg $\tilde{\omega}$, welcher kürzer als ω ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also keine freien Knoten von $\tilde{\omega}$, die miteinander verbunden sind. Da W aber die Belegung von F respektiert, muss es Kanten in W geben, die zu diesen Knoten inzident sind. Alle Kanten von diesen Knoten aus $\tilde{\omega}$ zu Knoten außerhalb von $\tilde{\omega}$, kreuzen aber die Kante e . Dies ist ein Widerspruch zur Planarität von W . \square

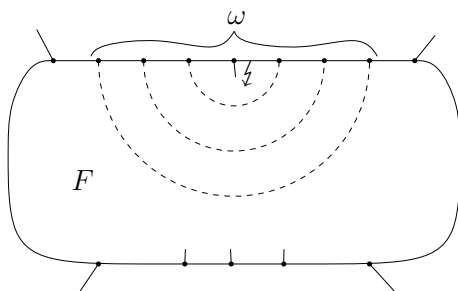


Abbildung 7: Ein freier Weg ω auf dem Rand einer Facette F . Der innere Knoten x kann mit keinem anderen Knoten verbunden werden, wenn Knoten auf dem Weg miteinander verbunden sind.

Aus dem Lemma folgt, dass einer Facette, auf deren Rand ein freier Weg ω mit k Knoten liegt, mindestens k weitere freie Plätze außerhalb von ω (und nicht notwendigerweise auf dem Rand) zugeordnet sein müssen, damit eine planare und respektierende Erweiterung existieren kann.

Freie Wege auf dem Rand einer Facette stellen also eine spezielle Struktur in der Menge der freien Knoten einer Facette dar, welche weitere freie Plätze in der Belegung von F erfordert. So wie diese, lassen sich noch andere Teilmengen der freien Knoten einer Facette finden, deren Knoten untereinander nicht mit weiteren Kanten verbunden werden können. Das allgemeine Konzept solcher Strukturen wird mit folgender Definition aufgegriffen und im darauf folgenden Satz näher charakterisiert.

Definition: Eine Teilmenge von freien Knoten aus der Belegung einer Facette F , aus der in jeder respektierenden Erweiterung des Graphen keine zwei Knoten eine gemeinsame Kante haben, wird im Folgenden als *kritische Teilmenge* der Facette F bezeichnet. Diese Teilmengen stellen also die Forderung an die Belegung, dass der Facette F weitere freie Plätze außerhalb der Teilmenge zugeordnet sind.

Kritische Teilmengen können natürlich beliebig kompliziert werden, je komplexer die Argumente dafür sind, warum Knoten aus einer Menge freier Knoten nicht verbunden sein können. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass einige einfache Strukturen ausreichen, um das Problem vollständig zu charakterisieren, wie in Satz 4.4 bewiesen wird. Diese sind in folgender Definition vollständig aufgezählt.

Definition: Die folgenden kritischen Teilmengen einer Facette F mit gegebener Belegung werden als *Indikatormengen von F* bezeichnet.

- (1) Ein einzelner Knoten von Grad 2, da dieser offensichtlich einen Partner benötigt. (Erfordert einen weiteren freien Platz.)
- (2) Zwei benachbarte freie Knoten, da sie nicht durch eine weitere Kante verbunden werden können. (Erfordert zwei weitere freie Plätze.)
- (3) Ein einzelner Knoten von Grad 1, weil keine Schleifen eingefügt werden können. (Erfordert zwei weitere freie Plätze.)
- (4) Ein Knoten von Grad 1, zusammen mit einem benachbarten Knoten von Grad 2, aus den selben Gründen. (Erfordert drei weitere freie Plätze.)
- (5) Ein freier Weg ω auf dem Rand, der nur freie Knoten aus der Belegung von F besucht, nach Lemma 4.2. (Erfordert $k := \text{Länge}(\omega)$ weitere freie Plätze.)

Alle Indikatormengen bilden freie Wege, die jedoch nicht immer auf dem Rand einer Facette liegen. Als kritische Teilmengen stellen sie jeweils die Forderung, dass in der gegebenen Belegung der Facette weitere freie Plätze zugeordnet sind. Wie sich in Satz 4.4 herausstellen wird, genügt es für eine Facette eine derjenigen Indikatormengen zu betrachten, welche am meisten weitere freie Plätze benötigen.

Definition: Die Anzahl an freien Plätzen, die von einer Indikatormenge T gefordert wird, sei f_T , und für eine Facette F sei $k_F := \max\{f_T \mid T \text{ Indikatormenge von } F\}$. Eine Indikatormenge T von F mit $f_T = k_F$ heißt *maximale Indikatormenge von F* .

Das folgende Lemma liefert eine wichtige Voraussetzung dafür, dass die angestrebte Konstruktion der gesuchten Erweiterung durch sukzessives Einfügen neuer Kanten funktioniert.

Lemma 4.3:

Ist T eine maximale Indikatormenge einer Facette F , für die die zugehörige Forderung nach freien Plätzen erfüllt ist, so gilt:

Von einem Endknoten u von T lässt sich durch Right-First- oder Left-First Tiefensuche immer ein F zugeordneter freier Knoten v finden, sodass einer der beiden Facetten, die durch Einfügen der Kante $\{u, v\}$ aus F entstehen, alle übrigen freien Knoten zugeordnet werden können.

Beweis. Da eine Indikatormenge immer mindestens einen freien Platz fordert, gibt es weitere freie Plätze in der Belegung von F , die nicht in T liegen und nicht zu u benachbart sind.

1. Fall: $\text{grad}(u) = 2$

Sei x ein Nachbar von u , der nicht in T liegt, und betrachte die Kante $e := \{u, x\}$

gerichtet von u nach x . So kann von der linken und der rechten Seite von e gesprochen werden. Hier treten nun drei mögliche Fälle auf, die Facette F kann entweder links, rechts oder auf beiden Seiten der Kante e liegen. O.B.d.A. liege F (mindestens) auf der linken Seite von e . In diesem Fall wird eine Left-First Tiefensuche auf den Kanten von F , beginnend mit der Kante von u nach x , ausgeführt. Die Suche wird solange fortgesetzt, bis ein nicht zu u benachbarter freier Knoten v in der Belegung von F gefunden wird. Ist ein solcher Knoten v gefunden, so entstehen durch Hinzufügen der Kante $\{u, v\}$ in F zwei neue Facetten. Diese Kante lässt sich immer so einzeichnen, dass im erweiterten Graph G' alle übrigen freien Knoten der Facette F gemeinsam an eine dieser Facetten grenzen, im Folgenden F' genannt. Die Belegung B des Originalgraphen (die im so erweiterten Graphen durch die geteilte Facette ungültig geworden ist), kann also für G' lokal neu definiert werden durch

$$B'(p) := \begin{cases} B(p), & \text{wenn } B(p) \neq F \\ F', & \text{sonst} \end{cases}, \text{ für } p \in \mathcal{P}' \text{ und } \mathcal{P}' \text{ die freien Plätze von } G'.$$

Analog führt eine Right-First Tiefensuche zum Ziel, wenn F auf der rechten Seite von e liegt, siehe dazu Abbildung 8. Läge ein freier Knoten aus der Belegung von F innerhalb der Facette $\tilde{F} := F \setminus F'$, so wäre er von der Left-First Suche vor dem Knoten v gefunden worden.



Abbildung 8: Nächster freier Knoten nach u , der mit Left-First (links), bzw. Right-First (rechts) zuerst gefunden wird. Alle übrigen freien Knoten grenzen an F' .

2. Fall: $\text{grad}(u) = 1$

Da der Knoten nur einen Nachbarn hat, kann die Suche nach einem weiteren freien Knoten nur in diese Richtung starten. Unabhängig ob eine Left-First oder eine Right-First Suche ausgeführt wird, folgt mit der Wahl von v als erster gefundener freier Knoten, der kein Nachbar von u ist, die Behauptung analog zu Fall 1.

□

Das Ziel ist es nun auf diese Weise nach und nach Kanten (planar) in die Facette einzufügen, bis alle angrenzenden Knoten Grad 3 haben.

Der folgende Satz liefert eine genaue Charakterisierung, wie die Belegung jeder einzelnen Facette aussehen muss, damit dies möglich ist. Der Beweis der Existenz ist dabei konstruktiv und liefert eine Konstruktionsvorschrift basierend auf Lemma 4.3.

Satz 4.4:

Zu einer Facette F , mit gegebener Belegung, existiert genau dann eine planare Erweiterung, die diese Belegung respektiert, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Die Anzahl zu F zugeordneter freier Plätze ist gerade.

2. Ist T eine maximale Indikatormenge von F , so gibt es k_F freie Plätze in der Belegung von F , die nicht in T liegen.
3. Für einen Knoten mit Grad 1 gibt es in der Belegung von F zwei weitere freie Knoten.

Beweis. Die Notwendigkeit der ersten Bedingung folgt aus Beobachtung 4.2. Aus der Definition der Indikatormengen folgt die Notwendigkeit der zweiten Bedingung und die dritte Bedingung muss offensichtlich erfüllt sein, da nur einfache Erweiterungen gesucht sind. Es bleibt also zu zeigen, dass diese auch hinreichend sind, das heißt, dass es eine planare Erweiterung gibt, die die Belegung respektiert, wenn sie erfüllt sind. Ein Induktion über die Anzahl der freien Plätze a_F in der Belegung von F liefert den Beweis, indem eine solche Erweiterung explizit konstruiert wird. Wegen der ersten Bedingung ist a_F gerade und wird durch das Einfügen einer Kante zwischen zwei freien Knoten immer um zwei verkleinert.

Für $a_F = 0$ ist die Aussage trivial, da hier keine freien Knoten an der Facette anliegen, und somit auch keine Kante eingefügt werden muss.

Ist $a_F = 2$, so sind der Facette genau zwei freie Plätze zugewiesen. Wegen der zweiten Voraussetzung aus dem Satz, kann es nur Indikatormengen vom Typ (1) geben. Somit gehören die freien Plätze zu nicht benachbarten Knoten und eine Kante zwischen diesen Knoten liefert eine respektierende und planare Erweiterung der Facette.

Sei nun F eine Facette mit $a_F \geq 4$. In F , mit $k := k_F$, gibt es eine maximale Indikatormenge T von k oder $k - 1$ freien Knoten ($k - 1$ falls ein Knoten mit Grad 1 enthalten ist), die einen einfachen Weg bilden. Nach den Voraussetzungen aus dem Satz existieren in der Belegung von F mindestens k weitere freie Plätze, die nicht in T liegen. Nach Lemma 4.3 gibt es also zu einem Endknoten u von T einen freien Knoten $v \notin T$, sodass die Kante $\{u, v\}$ planar in F eingefügt werden kann und außerdem die folgenden beiden Aussagen gelten.

1. Die übrigen freien Plätze von F können alle der gleichen Facette F' zugeordnet werden.
2. Da genau zwei freie Knoten verbunden wurden, ist a_F weiterhin gerade. Die Belegung von F' erfüllt also Bedingung 1.

Siehe dazu Abbildung 9.

Die Aussage von Lemma 4.3 gilt für beide Endknoten von T . Damit die Belegung der Facette F' auch die beiden anderen Voraussetzungen des Satzes erfüllt, wird der Endknoten wie folgt gewählt.

- (**r**₁) Falls T einen Knoten von Grad 1 enthält, wird dieser als Startknoten gewählt.
- (**r**₂) In Fall (**r**₁) kann nach Lemma 4.3 sowohl eine Right- als auch Left-First Suche angewandt werden. Falls eine der beiden Möglichkeiten einen Knoten von Grad 2 als Zielknoten findet, wird dieser Knoten als Zielknoten für die neue Kante gewählt.
- (**r**₃) Falls T keinen Grad-1-Knoten, aber einen Knoten von Grad 2 enthält, der zu einem freien Knoten außerhalb von T adjazent ist, wird dieser als Startknoten gewählt.
- (**r**₄) Ansonsten ist die Wahl beliebig.

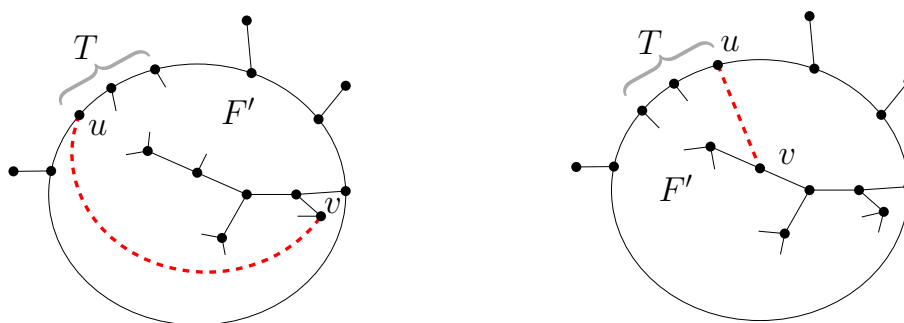


Abbildung 9: Nächster freier Knoten nach u , der mit Left-First (links) bzw. Right-First (rechts) zuerst gefunden wird.

Im folgenden wird nun gezeigt, dass F' alle Bedingungen des Satzes erfüllt, wenn die neue Kante nach diesen Regeln gewählt wird. Dann folgt induktiv, dass für F' eine respek tierende und planare Erweiterung existiert. Diese bildet dann, zusammen mit der gerade eingefügten Kante, die gesuchte Erweiterung von F .

Dazu wird nun zuerst gezeigt, dass $k_{F'} \leq k_F$ für die Facette F' gilt. Das heißt, dass durch die neue Kante keine größere Indikatormenge entsteht, als es in F bereits gegeben hat.

Im Fall $k_F = 1$ ist dies klar. Ist also $k_F \geq 2$ und wäre $k_{F'} > k_F \geq 2$, so gäbe es eine maximale Indikatormenge T' von F' , deren Knoten einen Weg bilden und zu denen insgesamt $k_{F'}$ freie Plätze gehören. Diese Knoten waren natürlich auch schon in F frei.

1. Fall: Ein (End-)Knoten dieses Weges T' hat Grad 1. Da dieser nicht auf dem Rand der Facette liegen kann, gilt hier zudem $k_F = 2$ und $k_{F'} = 3$.

Es gibt also einen Knoten x mit Grad 1, der in F' einen Nachbarn mit Grad 2 hat. Dann kann dieser Knoten nicht schon in F Nachbar von x gewesen sein, da $k_F = 2$. Damit hätte x in F Grad 0 im Widerspruch zur Voraussetzung, dass nur zusammenhängende Graphen betrachtet werden.

2. Fall: Alle Knoten auf dem Weg T' haben Grad 2 in F' aber bilden in F keinen Weg.

Dann verbindet die neue Kante $\{u, v\}$ zwei der freien Knoten in T' , das heißt diese beiden Knoten hatten in F Grad 1. Es liegen mindestens drei Knoten in T' (da $k_{F'} > 2$) und alle, außer u und v , haben in F und F' Grad 2. Mindestens einer der Grad-2-Knoten muss in F' , und damit auch in F , adjazent zu einem der Grad-1-Knoten sein, da die Knoten ja einen Weg bilden. Sei x solch ein Knoten mit Grad 2. Ist x kein Nachbar von u , so wäre er der eine Nachbar von v und die Tiefensuche hätte zuerst x , statt v , gefunden. Der Knoten x ist also der einzige Nachbar von u in G und $\{u, x\}$ bildet eine Indikatormenge von F . Somit ist $k_F \geq f_{\{u, x\}} = 3$ und $k_{F'} \geq 4$. Auf dem Weg T' in F' liegt also mindestens ein weiterer freier Knoten y mit Grad 2, welcher sowohl in F' wie auch in F zu x adjazent oder der einzige Nachbar von v in G ist. In beiden Fällen liegt er aber auf jedem Weg in F zwischen u und v und wäre bei der Tiefensuche vor v gefunden worden. Die neue Kante wäre also nicht zwischen u und v eingefügt worden. Abbildung 10 verdeutlicht dies: Die grauen, gestrichelten Kanten wären vor der roten Kante zwischen u und v eingefügt worden.

3. Fall: Alle Knoten in T' haben Grad 2 in F' und bilden auch in F einen Weg.

In F' liegt dieser Weg (mit mindestens drei freien Knoten) auf dem Rand der



Abbildung 10: Beispiel für Fall 2 im Beweis. Die gestrichelte Kante wäre vor der roten Kante eingefügt worden.

Facette, in F kann er jedoch nicht auf dem Rand liegen, da sonst $k_F \geq k_{F'}$ wäre. Der Weg liegt also an beiden Facetten, die durch die neue Kante e aus F entstanden sind. Das ist jedoch nicht möglich, da bei der Suche nach dem Zielknoten der neuen Kante dann zuerst ein Knoten auf dem Weg gefunden (und verbunden) worden wäre. In Abbildung 11 ist ein Beispiel für diese Situation gezeigt.

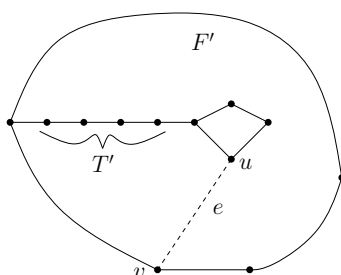


Abbildung 11: Der Weg T' liegt auf dem Rand von F' , aber nicht auf dem Rand von F .

Somit kann $k_{F'}$ nicht größer als k_F sein. Außerdem gilt $k_{F'} \geq k_F - 1$, da entweder $k_F = 1$ ist oder die Indikatormenge \tilde{T} von F' , die aus T ohne den nun verbundenen freien Platz an v hervorgeht, nun mindestens $k_F - 1$ freie Plätze außerhalb von \tilde{T} erfordert. Für die zwei möglichen Fälle $k_{F'} \in \{k_F - 1, k_F\}$ lässt sich zeigen, dass F' die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dass die erste Bedingung für F' erfüllt ist, wurde oben bereits gezeigt. Es bleibt also zu zeigen, dass auch die letzten beiden Bedingungen des Satzes erfüllt sind.

1. Fall: Es gilt $k_{F'} = k_F - 1$.

Im Fall $k_{F'} = 0$ ist nichts zu zeigen. Ansonsten ist \tilde{T} (definiert wie oben) eine maximale Indikatormenge. Nach Voraussetzung aus dem Satz sind k_F freie Plätze in der Belegung von F , die nicht zu Knoten aus T , und somit aus \tilde{T} , gehören. Von diesen wurde maximal einer mit dem Endknoten v von T verbunden und es sind noch mindestens $k_F - 1$ freie Plätze übrig, die nicht in \tilde{T} liegen. Damit ist die zweite Bedingung des Satzes für F' erfüllt.

Falls $k_F = 1$, gibt es keinen Grad-1-Knoten in F , also auch nicht in F' und auch die dritte Bedingung ist für F' erfüllt. Falls $k_F \geq 2$ ist, gibt es in \tilde{T} noch mindestens einen freien Knoten mit Grad 2 (ein Grad-1-Knoten hätte nach (\mathbf{r}_1) die neue Kante bekommen). Da zudem die Anzahl der freien Plätze gerade ist, gibt es zu einem Grad-1-Knoten dann noch mindestens einen weiteren, freien Knoten. Damit ist auch hier die notwendige Bedingung für den Fall der Existenz eines Knoten mit Grad 1 erfüllt.

2. Fall: Es gilt $k_{F'} = k_F$.

Es gibt also eine maximale Indikatormenge T' von freien Knoten in F' , die einen Weg bilden, zu der k_F freie Plätze gehören und die damit k_F freie Plätze in F' erfordert, die nicht in T' liegen. Zu dem Weg \tilde{T} gehören in F' $k_F - 1$ freie Plätze.

Gibt es eine maximale Indikatormenge T' von F' die disjunkt zu \tilde{T} ist, so fordert diese noch einen weiteren freien Platz neben den $k_F - 1$ freien Plätzen aus \tilde{T} . Dieser existiert, da $|T'| + |\tilde{T}| = k_F + k_F - 1 = 2 \cdot k_F - 1$ ungerade ist, der Facette aber eine gerade Anzahl freier Plätze zugeordnet ist. Insgesamt gibt es also mindestens k_F freie Plätze außerhalb von T' in F' , sodass auch die zweite und dritte Bedingung erfüllt sind.

Ist keine der maximalen Indikatormengen von F' disjunkt zu \tilde{T} , so ist die maximale Indikatormenge T' von F' , als längster freier Weg in F' der \tilde{T} enthält, eindeutig bestimmt. Man sieht leicht, dass T in diesem Fall nicht auf dem Rand von F liegen kann. Außerdem ist T kein einzelner Knoten von Grad 2, da keine Indikatormenge Knoten von Grad 3 enthält. Die Indikatormenge T ist also vom Typ (2), (3) oder (4).

Ist $T = \{u, x\}$ von Typ (2), ist $k_{F'} = k_F = 2$ und auch T' kann somit nur von diesem Typ sein (ein einzelner Grad-1-Knoten wäre disjunkt zu T) und $T \cap T' = \{x\}$. Da der Knoten $x \in T \cap T'$ in F also zu einem weiteren freien Knoten außerhalb von T (zu dem anderen Knoten in T') benachbart ist, wurde wegen **(r₃)** $u \in T$ nur dann als Startknoten für die neue Kante gewählt, wenn auch dieser einen freien Nachbarknoten außerhalb von T hat. Dieser ist auch in F' frei, nicht in T' enthalten und wegen der geraden Anzahl der freien Plätze in F' gibt es einen weiteren freien Knoten außerhalb von F' . Damit ist die Forderung von T' erfüllt und F' erfüllt die Voraussetzungen des Satzes.

Ist $T = \{u\}$ von Typ (3), so ist wiederum $k_{F'} = k_F = 2$ und T' muss vom Typ (2) sein, da der Knoten u enthalten ist (der in F' Grad 2 hat). Da in F für den Grad-1-Knoten u die dritte Bedingung des Satzes erfüllt ist und bereits gezeigt wurde, dass für F' die erste Bedingung des Satzes gilt, gibt es in F' mindestens zwei weitere freie Plätze. Die zweite Bedingung ist also erfüllt. Da T' zwei freie Plätze an verschiedenen Knoten enthält, ist zudem auch die dritte (und letzte) Bedingung erfüllt.

Bleibt der Fall, dass T von Typ (4) ist, also $k_{F'} = k_F = 3$. Hier ist u in F zu einem Knoten x von Grad 2 benachbart und $T = \{u, x\}$. Hätte x einen weiteren freien Nachbarknoten, würde die neue Kante den Knoten u mit diesem verbinden und $f_{T'} = 2$. Also muss der Zielknoten v ein Knoten von Grad 1 in F sein, der zu keinem freien Knoten benachbart ist (sonst wäre dieser Nachbar von der Suche zuerst gefunden worden). Wegen der geraden Anzahl der freien Plätze in F , muss es außerdem mindestens einen weiteren freien Knoten y in der Belegung von F und F' geben. Ist dies nicht der einzige weitere freie Platz von F' , der nicht in T' liegt, so gibt es (wiederum wegen der geraden Anzahl) mindestens zwei weitere freie Plätze außerhalb von T' (insgesamt also mindestens drei) und alle Bedingungen sind für F' erfüllt.

Ist y aber der einzige freie Platz in der Belegung von F' außerhalb von T' , so wäre nach **(r₂)** nicht v als Zielknoten der neuen Kante gewählt worden. Siehe dazu auch Abbildung 12. In beiden Graphen wurde die rote Kante zwischen u und v im Widerspruch zu **(r₂)** gewählt. Die Wahl der gestrichelten Kante führt zu einer Lösung.

□



Abbildung 12: Zwei Beispiele für den letzten Fall des Induktionsschlusses. Mit der roten Kante zwischen u und v entsteht ein Widerspruch, mit der gestrichelten Kante (gewählt nach (\mathbf{r}_2)) ist das Problem lösbar.

4.2 Globale Entscheidung

Der gegebene Graph lässt sich also genau dann planar zu einem 3-regulären Graphen erweitern, wenn für alle Facetten die Voraussetzungen aus Satz 4.4 gleichzeitig erfüllt werden können. Global betrachtet, lassen sich diese Voraussetzungen weiter vereinfachen. Dürfen Kanten in beiden benachbarten Facetten eingefügt werden, so liefert Lemma 4.2 für freie Wege auf dem Rand keine Einschränkungen mehr. Durch Einfügen einer Kante in der Nachbarfacette zwischen einem Endknoten und einem weiteren Knoten eines solchen Weges, können die übrigen Knoten in disjunkte Indikatormengen aufgeteilt werden. Diese Aufteilung lässt sich immer so wählen, dass der Facette für alle entstehenden Indikatormengen genügend freie Plätze zugeordnet sind. Daher bilden freie Wege, Indikatormengen vom Typ (5), keine global notwendigen Indikatormengen. Die anderen Indikatormengen aus der Definition in Kapitel 4.1, die Typen (1)-(4), werden nun als *echte Indikatormengen* bezeichnet. *Maximale echte Teilmengen* sind analog definiert.

Im folgenden Lemma wird gezeigt, dass es bei globaler Betrachtung ausreicht die Forderungen der echten Indikatormengen zu erfüllen.

Lemma 4.5:

Sei eine Belegung B für einen Graphen G gegeben, die für alle Facetten F die folgenden Voraussetzungen erfüllt.

1. Die Anzahl zu F zugeordneter freier Plätze ist gerade.
2. Ist T eine maximale echte Indikatormenge von F , so gibt es k_F freie Plätze in der Belegung von F , die nicht in T liegen.
3. Für einen Knoten mit Grad 1 gibt es in der Belegung von F zwei weitere freie Knoten.

Dann gibt es für G eine Belegung, die für alle Facetten die Voraussetzungen aus Satz 4.4 erfüllt.

Beweis. Sei eine Belegung des Graphen gegeben, die für alle Facetten die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Gibt es Facetten für die jedoch die Voraussetzungen von Satz 4.4 nicht erfüllt sind, so haben diese jeweils genau eine maximale Indikatormenge und diese ist ein freier Weg mit mehr als zwei freien Knoten auf dem Rand. Gäbe es zwei solche Wege oder eine weitere Indikatormenge mit gleicher Forderung, wären die Bedingungen von Satz 4.4 erfüllt.

Sei T ein solcher Weg auf dem Rand einer Facette F , u einer der Endknoten von T

und v der mittlere Knoten des übrigen Weges $T \setminus \{u\}$ (oder falls $|T \setminus \{u\}|$ gerade ist, einer der beiden mittleren Knoten von $T \setminus \{u\}$, der kein Nachbar von u ist). Die neue Belegung des Graphen wird definiert, indem die freien Plätze von u und v (p_u und p_v) der Nachbarfacette N von F zugeordnet werden und alle anderen freien Plätze ihre Zuordnung behalten

$$B'(p) := \begin{cases} N, & \text{wenn } p \in \{p_u, p_v\} \\ B(p), & \text{sonst} \end{cases}, \text{ für } p \in \mathcal{P} \text{ und } \mathcal{P} \text{ die freien Plätze von } G.$$

Für die Facette N sind die Bedingungen dieses Lemmas weiterhin erfüllt, da u und v nicht benachbart sind. Falls für N sogar die Bedingungen von Satz 4.4 erfüllt waren, so ist dies aus dem selben Grund weiterhin der Fall. Außerdem erfüllt F nun die Voraussetzungen aus Satz 4.4:

Im Fall $|T| = 3$ ist dies klar.

Ist $|T| > 3$, entstehen zwei disjunkte freie Wege auf dem Rand von F (also Indikatormengen). Diese beiden Wege haben entweder gleich viele freie Plätze oder einer hat genau einen freien Platz mehr. In beiden Fällen (im zweiten Fall wegen der geraden Anzahl freier Plätze) sind der Facette nun genügend freie Plätze zugeordnet und auch die zweite Bedingung aus Satz 4.4 ist erfüllt. Auf diese Weise wird die Belegung von allen Facetten, die die Bedingungen von Satz 4.4 nicht erfüllen, angepasst. Die neue Belegung B' von G erfüllt somit für alle Facetten die Bedingungen von Satz 4.4. \square

Siehe dazu auch Abbildung 13. Die Zuordnung der Knoten u und v wird geändert, sodass in F und in N die Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt sind.

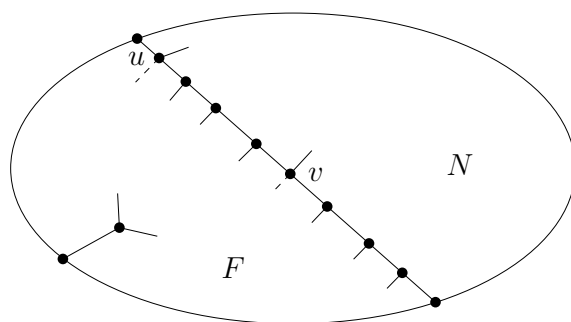


Abbildung 13: Durch die Zuordnung von u und v zu N sind in beiden Facetten alle Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt.

Satz 4.6:

Für einen planaren Graphen G existiert genau dann eine planare Erweiterung, die FIXED PLANAR 3-REGAUG erfüllt, wenn es eine Belegung von G gibt, die die Voraussetzungen aus Lemma 4.5 erfüllt.

Beweis. Sei B eine Belegung, die die Voraussetzungen aus Lemma 4.5 erfüllt. Dann gibt es nach diesem Lemma eine Belegung B' , die die Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt. Aus diesem Satz folgt, dass es eine planare Erweiterung W von G gibt, die B' respektiert. Aus Lemma 4.1 und der Definition einer respektierenden Erweiterung folgt, dass diese Erweiterung FIXED PLANAR 3-REGAUG erfüllt.

Sei W eine planare Erweiterung von G , die FIXED PLANAR 3-REGAUG erfüllt, und für $\{u, v\} \in W$ seien p_u, p_v die entsprechenden freien Plätze. Durch $B(p_u) := B(p_v) := F$,

mit F diejenige Facette, in die $\{u, v\}$ eingebettet werden muss um FIXED PLANAR 3-REGAUG zu erfüllen, wird eine Belegung B von G definiert, die die Voraussetzungen von Lemma 4.5 erfüllt. Jede Kante aus W ist in einer einzigen Facette eingebettet und zu zwei freien Plätzen inzident, sodass jeder Facette eine gerade Anzahl freier Plätze zugeordnet ist. Die zweite und dritte Voraussetzung des Lemmas gelten, da W eine einfache Erweiterung ist. \square

4.3 Konstruktion der Belegung

Nun muss also für alle freien Knoten auf dem Rand zwischen zwei Facetten entschieden werden, in welcher der beiden Facetten die fehlende Kante liegen soll. Lässt sich so eine Belegung des Graphen finden, die die Voraussetzungen aus Lemma 4.5 für alle Facetten erfüllt, so gibt es nach Satz 4.6 die gesuchte planare und 3-reguläre Erweiterung die FIXED PLANAR 3-REGAUG für den Graphen löst. Ähnlich wie im allgemeinen Fall aus Kapitel 3.2, wird die Belegung durch die Suche nach einem geeigneten Subgraphen in einem Teil des Komplementgraphen konstruiert.

Definition:

Der *Paarungsgraph* P_G von G ist definiert als $P_G := (V, E') \subseteq \overline{G}$ mit $E' := \{\{u, v\} \in E(\overline{G}) \mid \text{grad}_G(u), \text{grad}_G(v) < 3, u, v \text{ liegen an derselben Facette}\}$

Im Paarungsgraph eines Graphen G sind also genau die freien Knoten adjazent, die an einer gemeinsamen Facette liegen und nicht benachbart sind. Somit sind gerade alle die Kanten in P_G , die in einer Erweiterung enthalten sein könnten, die FIXED PLANAR 3-REGAUG für G löst. In diesem Graphen wird nun nach einem Faktor (Subgraph) S gesucht, der den Grad-1-Knoten aus G zwei Kanten und den Grad-2-Knoten aus G eine Kante zuordnet. Dieser Subgraph stellt nur eine Vorstufe der eigentlichen Lösung dar und muss nicht planar sein. Allerdings können alle Kanten von P_G , und somit von S , innerhalb der Facetten der gegebenen Einbettung von G eingezeichnet werden. Auf diese Weise definieren die Kanten von S eine Belegung von G .

Lemma 4.7:

Die Belegung von G , die aus dem zuvor beschriebenen Faktor S des Paarungsgraphen P_G hervorgeht, erfüllt für alle Facetten die Bedingungen aus Lemma 4.5 und liefert somit eine planare und 3-reguläre Erweiterung des Graphen.

Beweis. Da jede Kante aus S zwei freie Plätze miteinander verbindet, werden jeder Facette eine gerade Anzahl freier Plätze zugeordnet. Die übrigen Bedingungen sind auch erfüllt, da in der Zuordnung jedem freien Knoten offensichtlich genügend Partnerknoten in der entsprechenden Facette zugeordnet wurden. Zu beachten ist dabei, dass zwei Knoten von Grad 1 im Paarungsgraph natürlich nur mit einer Kante verbunden sind. \square

Gibt es in einem planaren Graphen eine solche 3-reguläre Erweiterung, so liefert diese natürlich auch eine solches (verallgemeinertes) Matching wie es oben beschrieben ist. Wie schon in Kapitel 3.2 erwähnt, beschreibt Gabow eine effiziente Berechnung solcher Subgraphen [6]. Da hier für alle Knoten v die obere Schranke durch $o_v \leq 2$ beschränkt ist, liegt die Laufzeit für diese Berechnung in $O(\sqrt{n} \cdot \tilde{m}) \subseteq O(n^{2,5})$, wobei \tilde{m} die Anzahl an Kanten in P_G bezeichnet. Beachte, dass P_G nicht planar sein muss und \tilde{m} somit nicht linear zu n sein muss.

Die Konstruktion des Paarungsgraphen hat eine Laufzeit in $O(\overline{m})$ (der Anzahl an Kanten im Komplementgraphen von G), indem für jede Kante geprüft wird, ob beide Endknoten an einer gemeinsamen Facette liegen. Es gilt also das folgende Lemma.

Lemma 4.8:

Für einen Graphen kann mit Laufzeit $O(n^{2.5})$ getestet werden, ob eine Erweiterung im Sinne von 3-REGAUG existiert. Im Falle der Existenz, wird mit gleicher Laufzeit eine Belegung des Graphen berechnet, die die Voraussetzungen von Lemma 4.5 erfüllt.

Aus der so konstruierten Belegung B kann nun nach Lemma 4.5 eine Belegung B' konstruiert werden, die die Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt. Diese Konstruktion ist durch eine Tiefensuche im planaren Graphen G realisierbar und hat somit eine Laufzeit in $O(n)$. Die Konstruktion der Erweiterung aus der Belegung B' lässt sich nach dem Beweis von Satz 4.4 durch eine bestimmte Tiefensuche von jedem freien Knoten aus realisieren. Diese Konstruktion hat demnach eine Laufzeit in $O(n^2)$.

Satz 4.9:

Falls zu einem Graphen eine Erweiterung im Sinne von 3-REGAUG existiert, kann eine solche mit Laufzeit $O(n^{2.5})$ berechnet werden.

5 Planares 3-Reg-c-ConAug bei Fester Einbettung

Nachdem zuvor neben der Planarität nur 3-Regularität für den erweiterten Graphen gefordert wurde, soll nun auch der Zusammenhang verstärkt werden. Nach Beobachtung 2.1 kann gleichzeitig zur 3-Regularität maximal 3-facher Zusammenhang erreicht werden. In diesem Abschnitt wird erst einmal 2-facher Zusammenhang zur Menge der gewünschten Grapheigenschaften des im Kapitel zuvor untersuchten Augmentierungsproblems hinzugefügt. Es wird also das Entscheidungsproblem FIXED PLANAR 3-REG-2-CONAUG betrachtet, welches nach der Existenz einer planaren, 3-regulären und 2-fach zusammenhängenden Erweiterung eines planaren Graphen fragt, für den wiederum eine gegebene Einbettung unverändert erhalten bleiben soll. Die Charakterisierung für die Existenz von 3-regulären Erweiterungen bei fester Einbettung aus dem vorigen Kapitel, Lemma 4.5, soll nun auf 2-fachen Zusammenhang erweitert werden.

5.1 Charakterisierung

Nach Lemma 2.1 ist Knotenzusammenhang hier äquivalent zu Kantenzusammenhang und eine 3-reguläre Erweiterung des Graphen ist genau dann 2-fach zusammenhängend, wenn im erweiterten Graphen keine Brücken enthalten sind. Da durch das Hinzufügen von neuen Kanten in den zusammenhängenden Graphen keine neuen Brücken entstehen, muss durch das Einfügen der neuen Kanten also zum einen die 3-Regularität hergestellt werden und zum anderen alle von bestehenden Brücken induzierten Komponenten mindestens eine weitere Verbindungskante erhalten. Da Brücken immer in genau einer Facette liegen, muss diese neue Kante aus der Erweiterung innerhalb dieser Facette verlaufen. Dadurch ist es möglich wie zuvor eine lokale Charakterisierung anzugeben, d.h. für jede Facette einzeln die Voraussetzungen zu beschreiben, die notwendig sind damit eine Erweiterung im Sinne von FIXED PLANAR 3-REG-2-CONAUG existieren kann. Der Graph aus der folgenden Definition gibt die Struktur der Brücken innerhalb einer Facette wieder.

Definition: Sei \tilde{F} der von einer Facette F induzierte Subgraph von G . Der *Brückengraph* BG_F zu F geht aus \tilde{F} hervor, indem alle Kanten in \tilde{F} kontrahiert werden, die in G keine Brücken sind.

Bemerkung:

Aus der Konstruktion des Brückengraphs BG_F gehen folgende Eigenschaften hervor:

- b1)** Jede Kante in BG_F ist eine Brückenkante in G und in BG_F .
- b2)** Jede Brücke in F ist eine Brücke in BG_F .
- b3)** Der Graph BG_F ist ein Baum, wegen **b1**).
- b4)** Jede Brücke in BG_F induziert zwei Zusammenhangskomponenten, die jeweils mindestens ein Blatt von BG_F enthalten, wegen **b3**).
- b5)** Genau dann wenn F keine Brücke enthält, besteht BG_F aus nur einem Knoten und wird *trivialer Brückengraph* genannt.

Abbildung 14 zeigt eine Facette F und den zu F gehörigen Brückengraph BG_F . Die Kanten von BG_F sind gerade die Brücken b_1 bis b_7 von F und die Knoten entsprechen den (kontrahierten) Zusammenhangskomponenten, die bestehen bleiben, wenn alle Brücken in F entfernt werden. Die Brücken b_8 und b_9 sind nicht Teil des von F induzierten Subgraphen und somit auch nicht im Brückengraph enthalten.

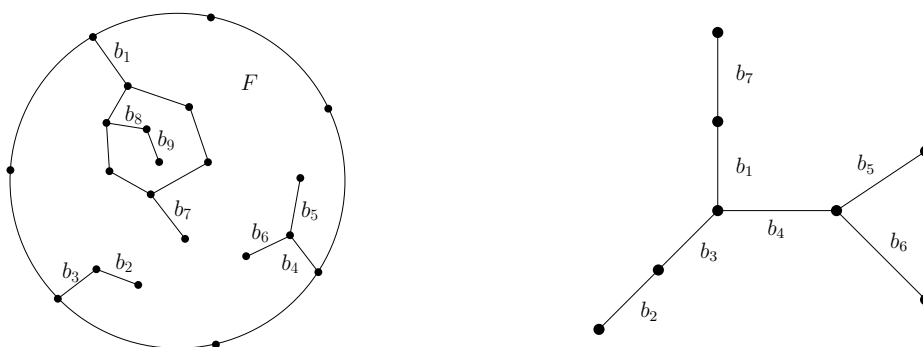


Abbildung 14: Eine Facette F mit Brücken links und der Brückengraph von F rechts.

Mit Hilfe des Brückengraphs kann nun eine notwendige Bedingung bestimmt werden, die für alle brückenfreien Erweiterungen einer Facette gilt.

Beobachtung 5.1: Sei W eine Erweiterung einer Facette F , sodass $F + W$ keine Brücken enthält. Dann sind für jede Brücke aus F die beiden induzierten Zusammenhangskomponenten zu mindestens einer Kante aus W inzident. Es gibt also entweder für jedes Blatt aus BG_F einen Knoten aus der dem Blatt entsprechenden Komponente von F , der zu einer Kante aus W inzident ist, oder BG_F ist trivial (d.h. F enthält keine Brücken).

Das Konzept der freien Plätze und ihrer Zuordnung zu angrenzenden Facetten aus dem vorherigen Kapitel 4, wird nun in folgender Definition um diese notwendige Bedingung erweitert. Dass diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, zeigt der darauf folgende Satz.

Definition: Eine Belegung B einer Facette F heißt *Zusammenhangs-Belegung*, wenn für jedes Blatt aus BG_F ein freier Platz p mit $B(p) = F$ in der dem Blatt entsprechenden Komponente von F existiert oder BG_F trivial ist.

Eine Belegung B eines Graphen G mit gegebener Einbettung, heißt *Zusammenhangs-Belegung*, wenn für jede Facette aus der Einbettung von G die von B induzierte Belegung eine Zusammenhangs-Belegung ist.

Lemma 5.1:

Sei F eine Facette mit einer gegebenen Zusammenhangs-Belegung B . Existiert eine planare, B -respektierende Erweiterung W von F , so existiert eine planare, B -respektierende Erweiterung W' von F , sodass $F + W'$ zudem keine Brücken enthält.

Beweis. Sei W eine planare und B -respektierende Erweiterung der Facette F und $F' := F + W$. Enthält F' keine Brücken, so ist W die gesuchte Erweiterung. Ansonsten lässt sich eine planare und B -respektierende Erweiterung von F , die keine Brücken enthält, wie folgt konstruieren.

Sei e eine Brücke in F' . Diese liegt in einer eindeutigen Facette H aus F' und war zudem auch in F eine Brücke. Nach **b4)** und der Voraussetzung aus dem Satz, enthalten die beiden von e induzierten Zusammenhangskomponenten A und B , jeweils mindestens einen zu einer Kante aus W inzidenten Knoten. Seien $u \in A$ und $v \in B$ solche Knoten. Auf dem Rand von H liegen mindestens zwei Kanten aus der Erweiterung W , da $e \notin W$ eine Brücke ist und u und v somit nicht adjazent sein können. Zudem liegt auf jeder der beiden von e induzierten Zusammenhangskomponenten mindestens eine dieser Kanten. Sind $\{u, x\} \in A$ und $\{v, y\} \in B$ zwei solche Kanten, so können diese kreuzungsfrei durch die Kanten $\{u, v\}$ und $\{x, y\}$ oder $\{u, y\}$ und $\{x, v\}$ ersetzt werden. Dann ist e jedoch keine Brücke mehr und die so konstruierte Erweiterung respektiert die Belegung B . Außerdem entstehen keine neuen Brücken, da für einen Weg, der eine der gelöschten Kanten $\{u, x\}$ oder $\{v, y\}$ durchlief, diese Kante durch einen Weg über die beiden neuen Kanten und innerhalb der anderen Zusammenhangskomponente ersetzt werden kann. Wird dieses Verfahren nacheinander auf alle vorkommenden Brücken angewandt, entsteht eine planare Erweiterung W' von F , die keine Brücken enthält und die die Zusammenhangs-Belegung B respektiert. In Abbildung 15 ist das Vorgehen an einem Beispiel dargestellt. \square

Satz 5.2:

Ein zusammenhängender, planarer Graph G besitzt genau dann eine planare, 3-reguläre und 2-fach zusammenhängende Erweiterung, wenn eine Zusammenhangs-Belegung B von G existiert, die zudem die Voraussetzungen aus Lemma 4.5 erfüllt.

Beweis. Dass die Voraussetzungen notwendig sind, folgt aus Lemma 4.5 und Beobachtung 5.1. Sie sind auch hinreichend, da nach Lemma 4.5 eine B -respektierende Erweiterung von G , das heißt eine 3-reguläre und planare Erweiterung, existiert. Aus dieser Erweiterung lässt sich nach Lemma 5.1 eine 2-fach zusammenhängende Erweiterung konstruieren, die weiterhin B respektiert, also planar und 3-regulär ist. \square

5.2 Konstruktion der Belegung

Um die Zuordnung der freien Plätze zu den Facetten zu finden wird in Kapitel 4.2 der sogenannte Paarungsgraph definiert, in dem ein bestimmter Subgraph die Belegung der

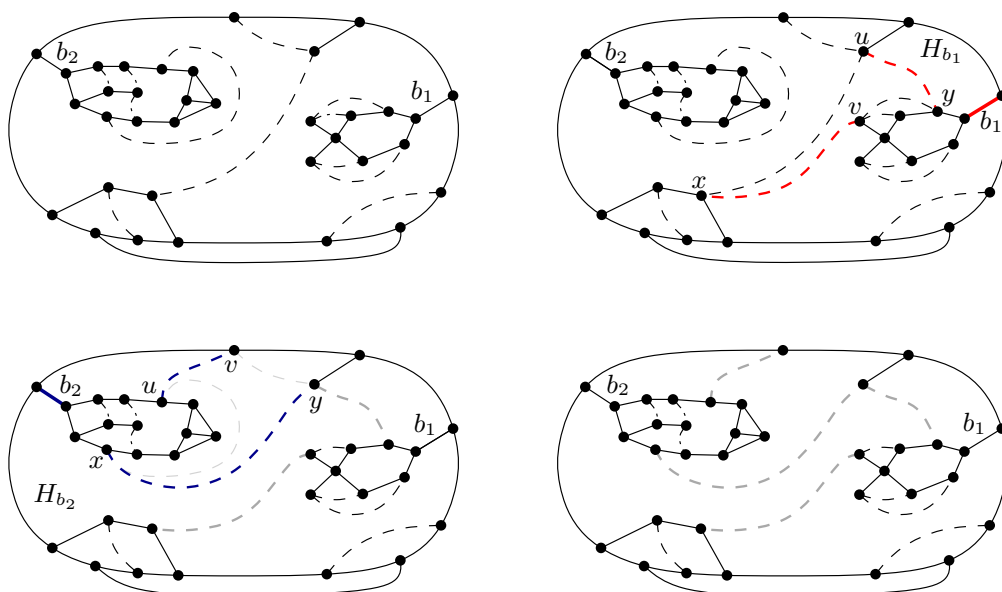


Abbildung 15: Eine 3-reguläre Erweiterung eines Graphen mit zwei Brücken b_1, b_2 . Zuerst wird b_1 betrachtet und die roten Kanten eingefügt. Danach die blauen Kanten für b_2 . Am Ende enthält der erweiterte Graph keine Brücken mehr.

Facetten vorgibt. Diese Vorgehensweise lässt sich auch hier, in angepasster Form, anwenden.

Wie anfangs bereits beschrieben wurde, ist die Zuordnung für alle Knoten im Inneren einer Facette bereits festgelegt. Eine Wahlmöglichkeit gibt es nur für freie Knoten, die an zwei Facetten grenzen. Dies sind gerade die Knoten von Grad 2 auf dem Rand der Facetten. Es kann also eine vorläufige Belegung \tilde{B} von G definiert werden, die alle Knoten im Inneren einer Facette F dieser Facette zuweist. Diese Belegung stimmt auf diesen Knoten mit allen möglichen Belegungen überein und soll nun zu einer Zusammenhangs-Belegung erweitert werden. Dazu müssen noch genau die Grad-2-Knoten betrachtet werden, die an zwei Facetten grenzen. Die Entscheidung für diese Knoten wird wieder über ein Matching getroffen werden.

Der *Zusammenhangs-Paarungsgraph* P_G' wird auf der Menge $V_{\text{grad}2}$ der Grad-2-Knoten, die an zwei Facetten grenzen, wie folgt definiert.

Falls der Brückengraph BG_F einer Facette F trivial ist, verbinde alle nicht benachbarten Knoten aus $V_{\text{grad}2}$. Für diese Facetten entspricht P_G' genau dem Paarungsgraph aus der Definition in Kapitel 4.3, da keine weiteren freien Knoten an diese Facetten grenzen. Beachte, dass diese Facetten keine inneren Knoten enthalten können.

Für die übrigen Facetten F , wird für jedes Blatt L aus BG_F , das keinem Knoten von Grad 1 entspricht, ein Hilfsknoten v_L hinzugefügt. Dieser wird mit allen zu F inzidenten Grad-2-Knoten auf der Komponente von L verbunden (diese Knoten liegen alle in $V_{\text{grad}2}$, sonst wäre L kein Blatt) und soll sicher stellen, dass von jedem Blatt einen Knoten zu F zugewiesen wird. Das heißt im Matching soll genau eine Kante zu v_L inzident sein. Außerdem wird für jede Facette F ein weiterer Hilfsknoten v_F hinzugefügt, der zu allen Knoten aus $V_{\text{grad}2}$ verbunden ist, die inzident zu F sind. Diese Knoten sollen die Entscheidung für alle übrigen Knoten aus $V_{\text{grad}2}$ liefern und dabei sicher stellen, dass die

Voraussetzungen von Lemma 4.5 erfüllt sind. Es ist nun noch der Bedarf dieser Hilfsknoten v_F für das Matching zu bestimmen. Sei T eine maximale echte Indikatormenge von F in der vorläufigen Belegung \tilde{B} , falls es eine solche gibt. Durch \tilde{B} und die Knoten v_L ist bereits eine bestimmte Anzahl freier Plätze zu F zugewiesen und es lässt sich bestimmen, wie viele weitere Plätze für die Indikatormenge T noch benötigt werden. Für einen Grad-1-Knoten wird dabei auch beachtet, dass es mindestens zwei verschiedene, nicht benachbarte zugewiesene Knoten geben muss. Der Knoten v_F muss also im Matching zu mindestens dieser Anzahl, d_F , von Kanten inzident sein. Falls es kein solches T gibt sei $d_F := 0$. Zudem muss insgesamt eine gerade Anzahl von Plätzen zugewiesen werden. Falls $|\tilde{B}^{-1}(F)| + |\{v_L \mid L \text{ Blatt in } BG_F\}| + d_F$ ungerade ist sei $\text{par}_F := 1$, sonst $\text{par}_F := 0$. Außerdem kann der Facette eine beliebige weitere Anzahl an Grad-2-Knoten zugewiesen werden, wenn die Anzahl gerade bleibt. Der Knoten v_F muss im Matching also zu einer Anzahl Kanten aus $\{d_F + \text{par}_F + 2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}_0, d_F + \text{par}_F + 2 \cdot k \leq \# \text{ Knoten inzident zu } v_F\}$ inzident sein.

Das (verallgemeinerte) Matching in diesem Graphen bestimmt dann die Zuordnung der Knoten aus $V_{\text{grad}2}$. Das folgende Lemma zeigt, dass die vorläufige Belegung \tilde{B} zusammen mit dieser Zuordnung eine Belegung ist, die die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllt.

Lemma 5.3:

Die Belegung eines Graphen nach der oben vorgestellten Konstruktion, erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 5.2. Das heißt, dass der darauf basierende Algorithmus korrekt ist und eine planare, 3-reguläre und 2-fach zusammenhängende Erweiterung liefert.

Beweis. Die Konstruktion liefert eine korrekte Belegung B , da die vorläufige Belegung \tilde{B} nur innere Knoten zuweist und im Zusammenhangs-Paarungsgraphen nur Randknoten gematcht werden. Es ist zu zeigen, dass B eine Zusammenhangs-Belegung ist, die jeder Facette F eine gerade Anzahl freier Plätze zuweist, die die Forderungen einer maximalen echten Indikatormenge von F erfüllt und die für einen Grad-1-Knoten zwei weitere freie Knoten zuweist. Für Facetten, deren Brückengraph trivial ist, gilt dies nach Lemma 4.7. Sei F eine Facette mit nicht-trivialem Brückengraphen.

Die Belegung B ist eine Zusammenhangs-Belegung, da jedes Blatt L im Brückengraph BG_F entweder einem Knoten von Grad 1 entspricht oder alle freien Knoten auf der entsprechenden Komponente, die inzident zu F sind, Grad 2 haben. Im ersten Fall wird der Knoten von \tilde{B} der Facette F zugeordnet, im zweiten Fall ist einer der Knoten inzident zu v_L .

Nach Konstruktion sind $|\tilde{B}^{-1}(F)| + |\{v_L \mid L \text{ Blatt in } BG_F\}| + d_F + \text{par}_F + 2 \cdot k$, für ein $k \in \mathbb{N}_0$, freie Plätze der Facette F zugeordnet. Dabei ist par_F gerade so definiert, dass diese Anzahl gerade ist.

Da BG_F nicht trivial ist, gibt es mindestens zwei Blätter in BG_F und deren entsprechende Komponenten enthalten jeweils einen zu F zugewiesenen Knoten. Für Indikatormengen vom Typ (1) und (2) sind die Forderungen demnach erfüllt (falls zwei benachbarte Knoten auf dem einem Blatt liegen, gibt es wegen der geraden Anzahl neben dem einen freien Platz auf dem anderen Blatt einen weiteren freien Platz). Die Knoten von Indikatormengen vom Typ (3) und (4) waren bereits in der Belegung \tilde{B} der Facette F zugewiesen. Die Forderung einer maximalen Indikatormengen unter diesen wurde also in der Konstruktion durch d_F Kanten am Hilfsknoten v_F erfüllt. Dabei wurde, nach Definition von d_F , auch die zusätzliche Forderung eines Grad-1-Knotens nach zwei verschiedenen zugewiesenen Knoten beachtet. Da die Zuordnung der Knoten aus dem Zusammenhangs-Paarungsgraphen die Indikatormengen dieser Art unverändert lässt (und auch keine neuen hinzufügt), erfüllt B alle Voraussetzungen von Satz 5.2. \square

Nun wird gezeigt, dass der Algorithmus auch vollständig ist. Das heißt, dass ein solches Matching im Zusammenhangs-Paarungsgraphen existiert, wenn eine Erweiterung im Sinne von FIXED PLANAR 3-REG-2-CONAUG existiert.

Lemma 5.4:

Existiert eine planare, 3-reguläre und 2-fach zusammenhängende Erweiterung W eines Graphen G , dann gibt es im Zusammenhangs-Paarungsgraphen ein (verallgemeinertes) Matching mit den oben genannten Eigenschaften.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass im Zusammenhangs-Paarungsgraphen ein verallgemeinertes Matching existiert, in dem alle Knoten zu sovielen Kanten inzident sind, wie in der Konstruktion vorgeschrieben ist. In Facetten von G , deren Brückengraph trivial ist, entsprechen die Kanten von W , die in diesen Facetten liegen, direkt einem Matching für diese Facetten. Sei F eine Facette mit nicht trivialem Brückengraphen. Nach Beobachtung 5.1 ist in jeder Blattkomponente ein Knoten inzident zu einer Kante aus W . Insbesondere gilt dies auch für Blattkomponenten, deren zu F inzidenten freien Knoten alle von Grad 2 sind. Diese Knoten sind zudem alle in $V_{\text{grad } 2}$ enthalten. Von jeder dieser Blattkomponenten L kann also ein Knoten von Grad 2 mit v_L verbunden werden. Alle übrigen zu F inzidenten Knoten aus $V_{\text{grad } 2}$ werden zu v_F verbunden. Das heißt v_F ist zu $i_F := 2 \cdot |W| - |\tilde{B}^{-1}(F)| - |\{v_L \mid L \text{ Blatt in } BG_F\}|$ Kanten inzident. Da $2 \cdot |W| = |\tilde{B}^{-1}(F)| + |\{v_L \mid L \text{ Blatt in } BG_F\}| + d_f + \text{par}_F + 2 \cdot k$, für ein $k \in \mathbb{N}_0$, gilt, ist $i_f = d_F + \text{par}_f + 2 \cdot k$. Alle Knoten im Zusammenhangs-Paarungsgraphen sind somit zu sovielen Kanten inzident, wie in der Konstruktion vorgeschrieben ist. \square

Es wurde also Korrektheit und Vollständigkeit der Berechnung der Belegung aus dem Zusammenhangs-Paarungsgraphen gezeigt. Das somit ein polynomieller Algorithmus zur Berechnung einer Erweiterung im Sinne von FIXED PLANAR 3-REG-2-CONAUG existiert, zeigt der folgende Satz.

Satz 5.5:

Falls zu einem Graphen G mit gegebener Einbettung eine planare, 3-reguläre und 2-fach zusammenhängende Erweiterung existiert, lässt sich mit Laufzeit $O(n^4)$ eine solche Erweiterung konstruieren.

Beweis. Der Zusammenhangs-Paarungsgraph lässt sich in quadratischer Zeit aus dem Paarungsgraphen konstruieren, welcher mit Laufzeit $O(\bar{m})$ (\bar{m} Anzahl Kanten im Komplementgraphen von G) konstruiert werden kann. Dazu wird in jeder Facette durch Tiefensuche der Bedarf einer maximalen (vorläufigen) Indikatormengen bestimmt und die Hilfsknoten (deren Anzahl linear in n ist) hinzugefügt. Dieser Zusammenhangs-Paarungsgraph ist eine Instanz für das folgende verallgemeinerte Matching Problem. Für einen Graphen G ist jedem Knoten v eine Menge von natürlichen Zahlen I_v zugeordnet und es soll ein Matching in G berechnet werden, in dem jeder Knoten v zu $i \in I_v$ Kanten inzident ist. Cornuéjols beschreibt einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n^4)$ zur Lösung dieses Problem, falls es für alle v keine $i, j \in I_v$ gibt, sodass $j - i > 2$ und $\{i + 1, i + 2, \dots, j - 1\} \cap I_v = \emptyset$ gilt [3]. Das heißt in der Zahlenfolge I_v gibt es keine Lücke, die größer als 1 ist. Im Zusammenhangs-Paarungsgraph ist dies erfüllt, da einem Knoten entweder nur einzelne Zahlen zugewiesen sind (für $v \in V_{\text{grad } 2}$ und v_L) oder aufeinander folgende gerade bzw. ungerade Zahlen (für v_F). Die konstruierte Belegung B erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.2 und somit von Lemma 4.5. Es kann also aus B in linearer Zeit eine Belegung B' berechnet werden, die

die Voraussetzungen von Satz 4.4 erfüllt. Da in der Konstruktion von B' die Zuordnung von zwei Knoten eines freien Weges ω auf dem Rand einer Facette nur dann verändert wird, wenn ω mehr als drei Knoten enthält, ist B' eine Zusammenhangs-Belegung. Ein Algorithmus nach Satz 4.4 berechnet eine planare, 3-reguläre und B' respektierende Erweiterung mit Laufzeit $O(n^2)$. Nach Lemma 5.1 kann daraus, ebenso mit quadratischer Laufzeit, eine planare, 3-reguläre und 2-fach zusammenhängende Erweiterung W konstruiert werden. Auf beiden von einer Brücke e induzierten Komponenten, kann mit Left- und Right-First Tiefensuche eine Kante aus W gefunden werden, die an derselben Facette einer planaren Einbettung von $G + W$ liegt wie e . Der Austausch der Kanten, wie im Beweis von Lemma 5.1, benötigt konstante Zeit. \square

6 Planares 3-RegAug mit Variabler Einbettung

Für einen Graphen mit gegebener planarer Einbettung kann also in polynomieller Zeit geprüft werden, ob dieser sich zu einem 3-regulären, planaren Graphen erweitern lässt, wenn die Einbettung dabei fixiert bleibt. In diesem Abschnitt wird nun das Problem VARIABLE PLANAR 3-REGAUG untersucht, bei dem wie zuvor eine planare und 3-reguläre Erweiterung eines planaren Graphen gesucht ist. Hier beschränkt man sich jedoch nicht auf eine gegebene und fixierte Einbettung des Originalgraphen, sondern für den erweiterten Graphen muss lediglich eine beliebige planare Einbettung existieren. Durch die somit deutlich größeren Freiheitsgrade wird dieses Problem NP-schwer. Der Beweis basiert auf einer Reduktion des bekanntermaßen NP-schweren Problems PLANAR3SAT auf VARIABLE PLANAR 3-REGAUG.

6.1 Das Planare 3SAT-Problem

PLANAR3SAT ist ein spezielles Problem aus dem Bereich der Erfüllbarkeitsprobleme der Aussagenlogik. Erfüllbarkeitsprobleme stellen die Frage nach einer erfüllenden Belegung der Variablen für eine gegebene aussagenlogische Formel. Dieses sogenannte SAT-Problem (englisch: „satisfiability - Erfüllbarkeit“) ist weit bekannt und das grundlegende der NP-vollständigen Probleme. Diese Klasse von Entscheidungsproblemen umfasst alle diejenigen Entscheidungsprobleme aus der Klasse NP, auf die sich jedes andere Entscheidungsproblem aus NP in polynomieller Zeit reduzieren lässt. Vom SAT-Problem lassen sich nun verschiedene andere Probleme ableiten, indem unterschiedliche Voraussetzungen an die untersuchten Formeln gestellt werden. Beim Problem 3SAT sind als Eingabeinstanzen nur solche Formeln zugelassen, deren Klauseln (Disjunktionsterme) maximal drei Literale enthalten. Auch diese Variante des SAT-Problems ist NP-vollständig. Eine aussagenlogische Formel lässt sich außerdem immer als Graph, als sogenannter Variablen-Klausel-Graph, beschreiben. Dazu werden alle Variablen und Klauseln mit je einem Knoten identifiziert und die Knoten der Klauseln mit denjenigen Knoten verbunden, die den in der Klausel enthaltenen Variablen entsprechen. Das Problem PLANAR3SAT beschränkt sich nun nur auf die Frage nach der Erfüllbarkeit für diejenigen Formeln, für die dieser Graph eine planare Einbettung besitzt. Auch dieses weiter eingeschränkte Problem ist NP-schwer [12]. Weiterhin ist bekannt, dass für die Variablen-Klausel-Graphen solcher Formeln in polynomieller Zeit eine planare Einbettung konstruiert werden kann, in der alle Variablenknoten entlang einer Horizontalen angeordnet sind und zudem die Knoten für Klauseln, zusammen mit den drei inzidenten Kanten, sogenannte rechteckige „Kämme“ über- oder unterhalb dieser Horizontalen bilden [11]. In Abbildung 16 ist ein Beispiel dargestellt.

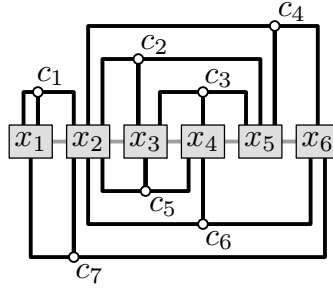


Abbildung 16: Ein Variablen-Klausel-Graph zu einer Formel aus PLANAR3SAT

Auf dieser Darstellung des Variablen-Klausel-Graphs einer aussagenlogischen Formel beruht die Reduktion von PLANAR3SAT auf VARIABLE PLANAR 3-REGAUG. In polynomialer Zeit wird daraus ein weiterer Graph konstruiert werden, für den VARIABLE PLANAR 3-REGAUG genau dann erfüllt ist, wenn die zugehörige Formel erfüllbar ist. Mit einem polynomiellen Algorithmus für VARIABLE PLANAR 3-REGAUG wäre somit auch ein polynomieller Algorithmus für PLANAR3SAT gefunden.

6.2 Die Reduktion auf Variables, Planares 3-RegAug

Die nun beschriebene Reduktion von PLANAR3SAT auf VARIABLE PLANAR 3-REGAUG ist analog zur Reduktion von PLANAR3SAT auf die Frage nach der Existenz einer planaren und 2-fach zusammenhängenden Erweiterung eines planaren Graphen (PECA), wie sie von Rutter und Wolf beschrieben ist [15]. Ausgehend von der Struktur des Variablen-Klausel-Graphen wird zuerst ein 3-fach zusammenhängender, planarer Graph konstruiert, der sogenannte *Rahmen*. Dieser Rahmen ist identisch zu dem von Rutter und Wolf, bis auf die in Lemma 6.1 beschriebene Ersetzung der Knoten von Grad größer als 3. An diesen Rahmen werden dann an bestimmte Kanten weitere Knoten angefügt. Auch diese Knoten werden anders als diejenigen von Rutter und Wolf gewählt. Wegen des 3-fach Zusammenhangs hat dieser Rahmen eine eindeutige Einbettung und nur die Einbettungen bestimmter Pfade von Grad-2-Knoten in eine der Nachbarfacetten im Rahmen sind nicht festgelegt [16]. Auf diese Weise werden die großen Freiheitsgrade bei der Suche nach einer Erweiterung im Sinne von VARIABLE PLANAR 3-REGAUG stark eingeschränkt und die Analyse der Lösbarkeit von VARIABLE PLANAR 3-REGAUG für diesen Graphen vereinfacht.

Zuerst zur Konstruktion des Rahmens H'_ϕ für eine aussagenlogische Formel ϕ , welche die Voraussetzungen von PLANAR3SAT erfüllt. Dieser besteht aus bestimmten Teilen für Variablen, Literale und Klauseln, die bereits im Bild des Variablen-Klausel-Graphen oben ersichtlich sind. Die Knoten für die Variablen werden durch Rechtecke (mit einem Knoten in jeder Ecke und je einer Kante auf jeder Seite), sogenannte *Variablen-Rechtecke*, ersetzt. Dabei werden für zwei benachbarte Variablenrechtecke die einander zugewandten Seiten identifiziert. Genauso werden die äußersten Seiten der beiden äußersten Variablenrechtecke identifiziert. Der Graph bleibt dabei planar. Ist X eine Variable, so bezeichne p_X die Anzahl von Klauseln, die das Literal X enthalten, und n_X die Anzahl an Klauseln in denen $\neg X$ vorkommt. Für jede Variable X wird das zugehörige Rechteck nun auf folgende Weise modifiziert. Zuerst wird es in $2p_X + 2n_X + 2$ Spalten aufgeteilt und alle, bis auf die zwei äußersten der Spalten, werden durch eine horizontale Kante in zwei Rechtecke

geteilt. Seien die so entstandenen Spalten nun von links, bei 0 beginnend, durchnummeriert. Ausgehend von der Anordnung der Klauselfacetten in der oben beschriebenen, planaren Einbettung des Variablen-Klausel-Graphen wird für jedes vorkommende Literal eine sogenannte *Literalfacetten* hinzugefügt. Diese entsprechen den vertikalen Kanten aus dem Variablen-Klausel-Graph und stellen so die Zugehörigkeit eines Literals zu einer Klausel dar. Sie grenzen, wie in der Einbettung des Variablen-Klausel-Graphen, entweder oben oder unten an eine Spalte des zugehörigen Variablenrechtecks. Dazu wird für jedes in einer Klausel vorkommende positive Literal X eine viereckige Facette an eine Spalte mit ungerader Nummer am entsprechenden Variablenrechteck angehängt. Für jedes vorkommende negative Literal $\neg X$ eine solche Facette an einer Spalte mit gerader Nummer. Nachdem alle Variablenrechtecke auf diese Weise verändert wurden, werden die *Klauselfacetten* wie oben als rechteckige Facetten eingefügt und mit einem „Dach“ umgeben. Diese Klauselfacetten teilen sich dabei je eine Kante mit jeder Literalfacetten, die zu einer Variablen aus der Formel gehört. Abbildung 17 zeigt ein so modifiziertes Variablenrechteck zu einer Variablen X und Klauseln c_1, c_2 und c_3 , welche X (in den Klauseln c_1, c_2) bzw. $\neg X$ (in Klausel c_3) enthalten.

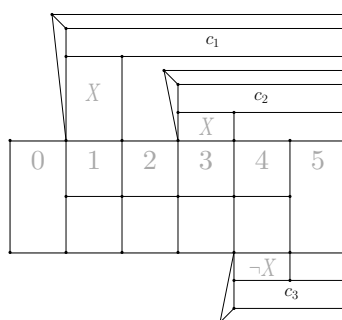


Abbildung 17: Ein Variablenrechteck zu Variablen X mit Klauseln c_1, c_2 und c_3 .

Wegen der hier untersuchten 3-Regularität, werden nun noch alle Knoten v mit $d_v := \text{grad}(v) > 3$ jeweils durch einen Kreis C_v mit d_v Knoten ersetzt, von denen jeder zu genau einer der ausgehenden Kanten des Originalknoten inzident ist (also Grad 3 hat).

In Abbildung 18 ist der Rahmen für eine Formel beispielhaft dargestellt. Die gerade beschriebene Ersetzung der Knoten von Grad größer als 3 ist dabei nur für einen Knoten links oben umgesetzt, um die Übersichtlichkeit der Abbildung zu erhalten.

Lemma 6.1:

Sei G ein 3-fach knotenzusammenhängender Graph. Dann ist auch der Graph G' , der wie oben beschrieben aus G durch das Ersetzen eines Knotens v durch einen Kreis C_v hervorgeht, 3-fach knotenzusammenhängend.

Beweis. Wege in G , die v nicht besuchen, sind in G' natürlich ebenso vorhanden. Genauso findet sich für jeden Weg ω aus G , der v besucht, ein (nicht eindeutiger) entsprechender Weg in G' . Das heißt es gibt einen Weg ω' in G' , der die gleichen Knoten wie ω besucht, nur statt v einen oder mehrere Knoten aus C_v besucht. Da von zwei knotendisjunkten Wegen aus G nur einer v enthalten kann, sind die entsprechenden Wege in G' weiterhin knotendisjunkt.

Zu drei knotendisjunkten Wegen in G , die zwei verschiedene Knoten $u, w \neq v$ verbinden, sind also drei entsprechende Wege knotendisjunkt und verbinden u und w in G' .

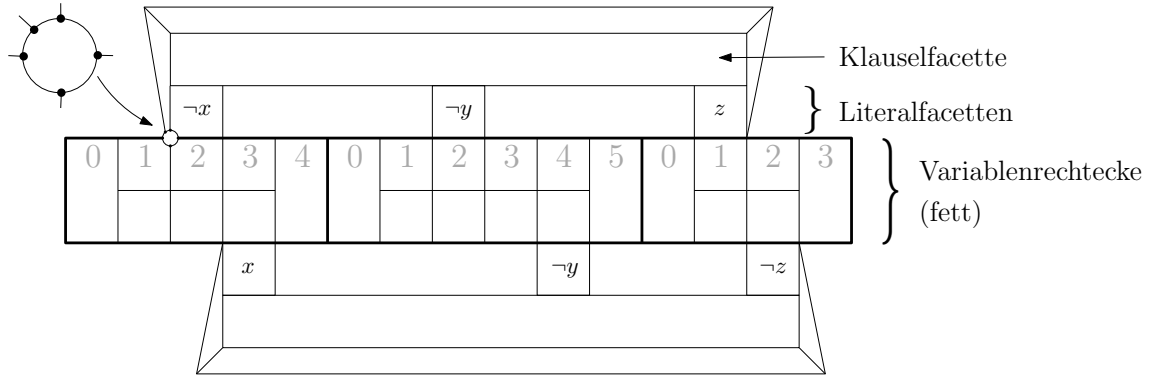


Abbildung 18: Ein Rahmen zur Formel $(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$

Es bleibt noch drei solche Wege zwischen Knoten u und $w \in V(G')$ zu finden, wenn einer (oder beide) der Knoten in C_v liegt. Sind sowohl u als auch w aus C_v , gibt es bereits innerhalb von C_v zwei knotendisjunkte u - w -Wege. Da $G' \setminus C_v$ zusammenhängend ist, gibt es einen dritten Weg P mit $P \cap C_v = \{u, w\}$, der u und w verbindet und zu den beiden Wegen innerhalb von C_v sonst knotendisjunkt ist. Der linke Graph von Abbildung 19 zeigt diesen Fall. Sei nun o.B.d.A. $u \in C_v, w \notin C_v$ und P_1, P_2 und P_3 seien drei der knotendisjunkten Wege, die v und w in G verbinden. Diesen Wegen entsprechen drei Wege \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 und \tilde{P}_3 in G' , die mit verschiedenen Kanten $\{v_i, x_i\}$, mit $v_i \in C_v, x_i \in P_i$ für $1 \leq i \leq 3$, starten. Ist einer dieser Knoten v_i gleich u , also bereits ein u - w -Weg, so können die beiden anderen Wege über Kanten aus C_v knotendisjunkt zu u - w -Wegen fortgesetzt werden. Sind alle drei v_i verschieden von u , können nur zwei knotendisjunkte u - w -Wege direkt aus den \tilde{P}_i gebildet werden. Da $G' \setminus \{v\}$ zusammenhängend ist, ist $G' \setminus C_v$ zusammenhängend und somit gibt es von dem eindeutigen Nachbarn $x \in G' \setminus C_v$ von u einen x - w -Weg P in G . Kreuzt der entsprechende Weg \tilde{P} in G' keinen der Wege \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 oder \tilde{P}_3 , so kann ein beliebiger dieser drei Wege durch den Weg $u\tilde{P}$ ersetzt werden und die übrigen beiden Wege mit Knoten aus C_v zu knotendisjunkten u - w -Wegen fortgesetzt werden. Kreuzt \tilde{P} aber einen der \tilde{P}_i und ist $\tilde{P}_x \subseteq \tilde{P}$ der Teil von x bis zum ersten Kreuzungsknoten, und $\tilde{P}_{i_0,x} \subseteq \tilde{P}_{i_0}$ der Teil von diesem Kreuzungsknoten bis w , so sind drei knotendisjunkte Wege gefunden, wenn \tilde{P}_{i_0} durch den Weg $u\tilde{P}_x\tilde{P}_{i_0,x}$ ersetzt wird. Der rechte Teil von Abbildung 19 zeigt diesen Fall in zwei Bildern. \square

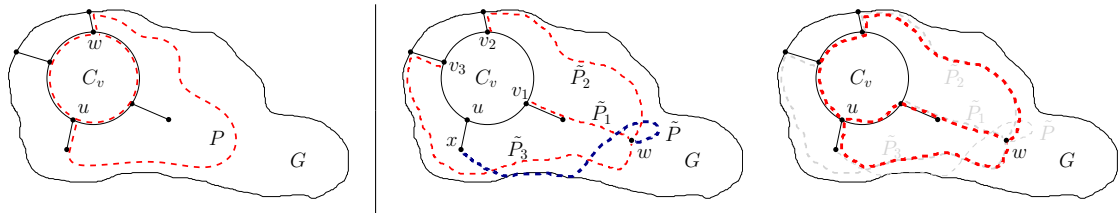


Abbildung 19: Zwei Fälle aus dem Beweis von Lemma 6.1. Jeweils sollen drei knotendisjunkte u - w -Wege gefunden werden. Links für $u, w \in C_v$ und rechts der Fall $w \notin C_v$.

Lemma 6.2:

Der Rahmen H'_ϕ ist planar, 3-regulär und 3-fach knotenzusammenhängend.

Beweis. Planarität und 3-Regularität ergeben sich offensichtlich aus der Konstruktion (Knoten von Grad 1 oder 2 kommen im Rahmen nicht vor). Nach Konstruktion unterscheidet sich der Rahmen H'_ϕ nur durch das Ersetzen der Knoten von Grad größer als 3 von dem Rahmen von Rutter und Wolf [15]. Da der Rahmen dort 3-fach zusammenhängend ist, ist auch H'_ϕ wegen Lemma 6.1 3-fach zusammenhängend. \square

Der Graph H_ϕ entsteht nun aus dem Rahmen H'_ϕ durch Hinzufügen einiger weiterer Knoten und Kanten. Um die Äquivalenz der Existenz einer 3-regulären Erweiterung zur Existenz einer erfüllenden Belegung zu modellieren, werden die meisten dieser Knoten von Grad kleiner als 3 sein und teilweise auch keine eindeutige Einbettung haben. In jeder Klauselfacetten wird eine Kante, die nicht an eine Literalfacetten grenzt, durch zwei Knoten von Grad 2 unterteilt. Genauso werden alle Kanten zwischen den Klauselfacetten und den Literalfacetten durch zwei solche Knoten unterteilt, sowie Kanten, die innerhalb eines Variablenrechtecks zwei Spalten trennen, durch einen Knoten von Grad 2. Die bisher eingefügten Unterteilungsknoten ändern dabei an der Eindeutigkeit der Einbettung des Graphen nichts. Abschließend entsteht H_ϕ , indem für jede Literalfacetten die gemeinsame Kante mit einem Variablenrechteck durch die Endknoten eines Pfades mit vier Knoten unterteilt wird. Diese Pfade werden im Folgenden *Indikatorketten* genannt. Nur für diese Indikatorketten ist die Einbettung nicht eindeutig. Sie lassen sich planar sowohl in die angrenzende Literalfacetten als auch in das angrenzende Variablenrechteck einbetten. Dabei wird jedoch immer die gesamte Kette in derselben Facette eingebettet. Insgesamt ergibt sich somit ein Graph wie er in Abbildung 20 dargestellt ist.

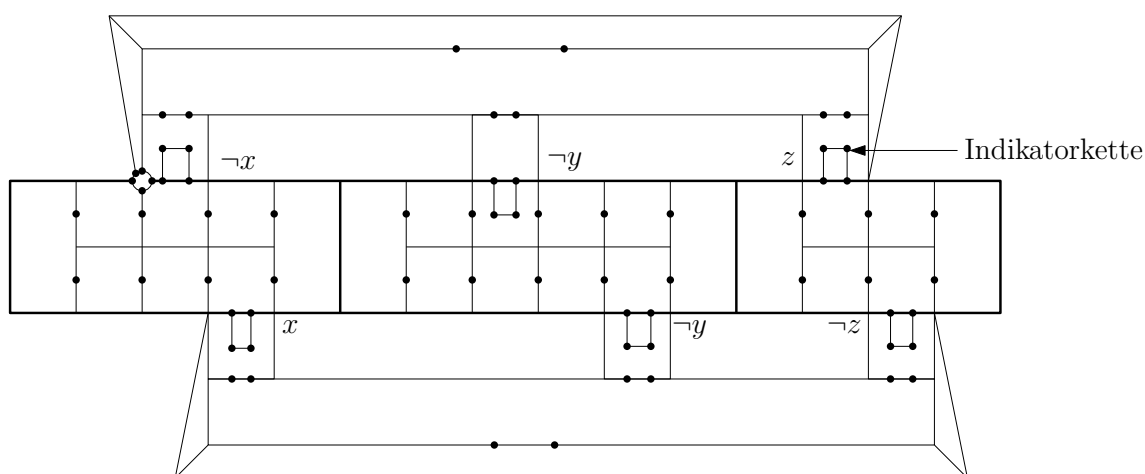


Abbildung 20: Graph zur Formel $(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$

Lemma 6.3:

In jeder 3-regulären und planaren Erweiterung eines solchen Graphen H_ϕ , liegen die nicht in die Literalfacetten (sondern in das Variablenrechteck) eingebetteten Indikatorketten einer Variable X , entweder nur an geraden oder nur an ungeraden Spalten des angrenzenden Variablenrechtecks von X .

Beweis. Sei W eine 3-reguläre und planare Erweiterung von H_ϕ , zusammen mit einer Einbettung des erweiterten Graphen, und I_L eine Indikatorkette zu einem Literal L (einer

Variablen X). Es muss der Fall betrachtet werden, dass I_L nicht in die zu L gehörende Literalfacetten, sondern in eine Facette A des angrenzenden Variablenrechteckes R_X eingebettet ist. Für eine Facette U sei $p_U \in \{+1, -1\}$ die Parität der Spalte von R_X , die U enthält, in der oben genannten Nummerierung der Spalten von R_X . Es ist zu zeigen, dass in keiner der Spalten von R_X mit Parität $-p_A$ eine Indikator-kette in das Variablenrechteck eingebettet sein kann.

Die beiden Grad-2-Knoten von I_L müssen in der Erweiterung W zu den beiden freien Knoten mit Grad 2 auf dem Rand von A adjazent sein. Sind in einer Facette A' aus R_X Kanten aus W eingebettet, so sind immer beide Knoten auf dem Rand von A' zu diesen Kanten adjazent: Entweder ist keine Indikator-kette eingebettet und sie sind durch eine Kante verbunden oder beide sind zur eingebetteten Indikator-kette adjazent. Somit kann in den beiden zu A' benachbarten Facetten aus R_X , die in Spalten mit Parität $-p_{A'}$ liegen, keine Kante aus W eingebettet sein, da diesen Facetten immer einer der beiden freien Knoten auf ihrem Rand nicht zugeordnet werden kann. Also kann in diesen Facetten auch keine Indikator-kette in das Variablenrechteck eingebettet sein. Sind aber in einer Facette B aus R_X keine Kanten aus W eingebettet, so müssen in beiden zu B benachbarten Facetten, aus Spalten mit Parität $-p_B$, Kanten von W liegen, da ja die Kanten zwischen allen Spalten durch Grad-2-Knoten unterteilt sind (welche auf jeden Fall zu einer Kante aus W inzident sind). Außerdem kann in B natürlich auch keine Indikator-kette eingebettet sein. Somit folgt, dass weitere Indikator-ketten nur in Spalten mit Parität p_A eingebettet sein können (aber nicht müssen), da über die Nachbarschaftsbeziehung alle Facetten aus R_X erreicht werden. \square

In Abbildung 21 ist eine Erweiterung des Variablenrechteckes aus Abbildung 17 gestrichelt eingezeichnet. Da die Indikator-kette in Spalte 3 nicht in die entsprechende Literalfacetten eingebettet ist, kann die Indikator-kette in Spalte 4 nur in die angrenzende Literalfacetten eingebettet sein. Für die Indikator-kette in Spalte 1 ist beides möglich.

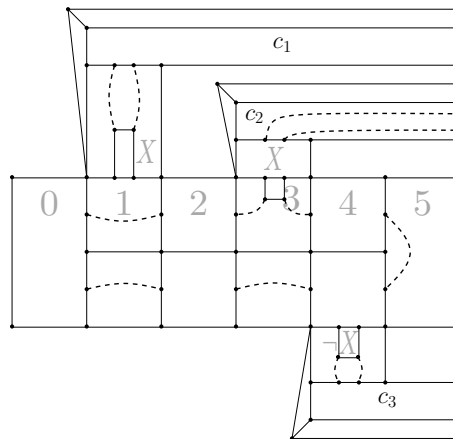


Abbildung 21: Eine mögliche Erweiterung (gestrichelt) des Variablenrechteckes aus Abbildung 17.

Satz 6.4:

Eine Formel ϕ , die die Voraussetzungen von PLANAR3SAT einhält, ist genau dann erfüllbar, wenn der zugehörige planare Graph H_ϕ eine 3-reguläre und planare Erweiterung hat.

Beweis. Sei eine 3-reguläre und planare Erweiterung W von H_ϕ , zusammen mit einer Einbettung des erweiterten Graphen, gegeben. Dann sind alle Indikatorketten einer Variable X entweder in eine Literalfacette (für X oder $\neg X$) oder in das zu X gehörende Variablenrechteck eingebettet. Aus dieser Belegung der Literalfacetten wird eine Belegung der Variablen konstruiert. Es werden diejenigen Literale als erfüllt angenommen, in deren zugehöriger Facette keine Indikatorchette eingebettet ist. Beachte, dass bei Einbettung einer Indikatorchette in die Literalfacette für die entsprechende Variable keine Entscheidung getroffen wird. Es ist zu zeigen, dass diese Interpretation der regulären Erweiterung zum einen eine gültige Belegung der Variablen und zum anderen eine die Formel ϕ erfüllende Belegung der Variablen liefert.

Damit die Belegung der Variablen gültig ist, darf ein Literal L nicht gleichzeitig mit $\neg L$ erfüllt sein. Nach Konstruktion von H_ϕ liegen die Indikatorketten für ein Literal L alle an Spalten mit der gleichen Parität und Indikatorketten für $\neg L$ nur an Spalten der anderen Parität. Somit folgt die Gültigkeit der Belegung aus Lemma 6.3.

Desweiteren ist die Formel ϕ erfüllt, da die zwei (Unterteilungs-)Knoten von Grad 2 in jeder Klauselfacette, die nicht an eine Literalfacette grenzen, wegen dem „Dach“ um die Klauselfacette, nur mit freien Knoten von mindestens einer der angrenzenden Literalfacetten verbunden sein können. Die zugehörige Indikatorchette kann dann jedoch nicht in dieser Literalfacette eingebettet worden sein und das entsprechende Literal erfüllt die Klausel.

Umgekehrt kann aus einer gegebenen, ϕ erfüllenden Belegung der Variablen auf diese Weise immer eine planare und 3-reguläre Erweiterung von H_ϕ konstruiert werden. \square

Theorem 6.5:

Das Entscheidungsproblem VARIABLE PLANAR 3-REGAUG ist NP-schwer.

Beweis. Da die Konstruktion des Graphen H_ϕ polynomiell ist, lässt sich PLANAR3SAT in polynomieller Zeit auf die Frage nach einer 3-regulären und planaren Erweiterung von H_ϕ reduzieren. Somit ist VARIABLE PLANAR 3-REGAUG NP-schwer. \square

6.3 Augmentierung des Zusammenhangs

Zusätzlich zur 3-Regularität soll durch das Einfügen neuer Kanten in den Graphen nun auch hier der (Knoten-)Zusammenhang verstärkt werden. In diesem Abschnitt soll also untersucht werden, wann ein planarer Graph eine 3-reguläre, k -fach zusammenhängende und planare Erweiterung (mit beliebiger Einbettung) besitzt. Wie zuvor kann nach Beobachtung 2.1 maximal eine 3-fach zusammenhängende Erweiterung existieren. Es ist nun leicht zu sehen, dass hier auch die Frage nach zusätzlichem 2-fachen oder 3-fachen Zusammenhang NP-schwer ist. Dies folgt direkt aus den folgenden Beobachtungen.

Beobachtung 6.1: Sei ϕ eine Instanz von PLANAR3SAT und H_ϕ der in Abschnitt 6.2 dazu konstruierte Graph. Jede 3-reguläre, planare Erweiterung W von H_ϕ ist 2-fach zusammenhängend, da $H_\phi + W$ keine Brücken enthält. Somit gilt

$$\phi \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow H_\phi \text{ hat eine planare, 3-reguläre und 2-zusammenhängende Erweiterung.}$$

Nicht ganz so offensichtlich ist dieselbe Tatsache für 3-fachen Zusammenhang. Durch eine genauere Untersuchung der möglichen Erweiterungen von H_ϕ , lässt sich im Folgenden aber auch diese Aussage zeigen.

Beobachtung 6.2: Jede Einbettung einer 3-regulären, planaren Erweiterung eines Graphen H_ϕ zu einer Formel ϕ , lässt sich aus dem Rahmen H'_ϕ durch wiederholte Anwendung der folgenden Operation konstruieren:

Unterteile zwei verschiedene Kanten einer Facette jeweils durch einen Knoten und verbinde diese Knoten mit einer neuen (planaren) Kante.

Beweis. Wegen der Eindeutigkeit des Rahmens, kann die Behauptung für jede Facette aus H_ϕ getrennt untersucht werden. Für Facetten aus H_ϕ , in die keine Indikator-Kette eingebettet wurde, ist die Behauptung offensichtlich, da nur Unterteilungsknoten von Kanten auf dem Rand der Facetten verbunden wurden. Ist in eine Facette eine Indikator-Kette eingebettet, so ist die Konstruktion wie folgt. Statt zuerst die Kette zu konstruieren, füge nacheinander zwei Kanten zwischen den (nicht benachbarten) Unterteilungsknoten auf dem Rahmen ein. Danach füge zwischen diesen beiden Kanten eine weitere Kante ein. \square

Lemma 6.6:

Jede 3-reguläre, planare Erweiterung eines Graphen H_ϕ zu einer Formel ϕ ist 3-fach zusammenhängend.

Beweis. Die Umkehrung der in Beobachtung 6.2 beschriebenen Operation, entspricht der in Lemma 2.2.1 im Buch von Diestel [4] untersuchten Operation. Dieses Lemma besagt, dass die oben beschriebene Operation den 3-fachen Zusammenhang erhält. Somit folgt die Behauptung aus dem Lemma und Beobachtung 6.2, da H'_ϕ 3-fach zusammenhängend ist. \square

Aus diesen Aussagen und der Tatsache, dass H_ϕ 2-fach zusammenhängend ist, folgt der abschließende Satz.

Satz 6.7:

Die Entscheidungsprobleme VARIABLE PLANAR 3-REG-2-CONAUG und VARIABLE PLANAR 3-REG-3-CONAUG sind NP-schwer, sogar dann wenn der Originalgraph bereits 2-fach zusammenhängend ist.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Studienarbeit behandelt reguläre Erweiterungen planarer Graphen. In Kapitel 6 wurde durch Reduktion vom planaren 3SAT-Problem gezeigt, dass es NP-schwer ist zu entscheiden, ob es zu einem gegebenen zusammenhängenden Graph eine planare und 3-reguläre Erweiterung gibt. Das Problem bleibt auch dann NP-schwer, wenn nach einer planaren, 3-regulären und zusätzlich 3-fach zusammenhängenden Erweiterung gefragt ist. Dies gilt sogar dann, wenn der Originalgraph bereits 2-fach zusammenhängend ist.

Das Problem vereinfacht sich jedoch deutlich, wenn eine zusätzlich gegebene planare Einbettung unverändert erhalten bleiben soll. Für jeden Knoten, der noch nicht zu drei Kanten inzident ist, können die fehlenden Kanten in maximal zwei verschiedenen Facetten liegen. Für Knoten, die nur an eine Facette grenzen, gibt es sogar eine eindeutige solche Facette. In Kapitel 4 ist eine Charakterisierung derjenigen Graphen angegeben, für die eine solche planare und 3-reguläre Erweiterung existiert. Da eine solche Erweiterung insbesondere auch ein Matching zwischen den Knoten darstellt, die an einer gemeinsamen Facette liegen, basiert diese Charakterisierung auf einem Matching dieser Knoten im Komplementgraphen. In Abschnitt 4.2 wird gezeigt, dass dieses Matching ohne weitere Voraussetzungen

auch eine planare Einbettung der Kanten ermöglicht. Somit ist das Problem auf die Frage nach der Existenz eines Matchings reduziert, welche effizient beantwortet werden kann.

In Kapitel 5 wurde für diesen Fall auch die Frage nach einer planaren, 3-regulären und 2-fach zusammenhängenden Erweiterung gelöst. Dazu wurde an das Matching aus der Charakterisierung des 3-regulären Falls eine zusätzliche Bedingung gestellt. Jede 2-fach zusammenhängende Komponente, die zu genau einer Brücke in einer Facette F inzident ist, muss zu einer Kante aus dem Matching in F inzident sein. Diese Zusatzbedingung lässt sich über einige Hilfsknoten bei der Berechnung des Matchings realisieren. So wurde für beide Probleme ein Algorithmus vorgestellt, der im Falle der Existenz eine solche Erweiterung konstruiert.

Offen bleibt hier die Frage nach der Existenz einer 3-fach zusammenhängenden Erweiterung. Eine Charakterisierung, wie zuvor über notwendige Voraussetzungen an eine Belegung, ist nicht schwer zu finden. Diese lässt sich jedoch nicht mehr für einzelne Facetten angeben und es ist bisher auch kein Algorithmus zur Konstruktion bekannt. Die Suche danach ist Gegenstand momentaner Arbeit.

Desweiteren können die Charakterisierungen und Algorithmen so erweitert werden, dass die Voraussetzung des Zusammenhangs nicht mehr notwendig ist. Diese Ergebnisse werden hier jedoch aus Platz- und Zeitgründen nicht näher ausgeführt.

Weitergehend ließe sich die Frage nach planaren, k -regulären Erweiterungen stellen. Wie in Kapitel 3 beschrieben ist, kann keine solche Erweiterung für $k > 5$ existieren und es ist somit eine vollständige Charakterisierung der planaren, k -regulären Erweiterungen für $0 \leq k \leq 5$ denkbar. Durch den beschränkten Knotengrad ist zudem immer der maximale Zusammenhang beschränkt, vergleiche Beobachtung 2.1. Die Frage nach planaren, k -regulären und c -zusammenhängenden Erweiterungen ist also auch nur für endlich viele c nicht trivial.

Literatur

- [1] F. T. Boesch, C. Suffel, and R. Tindell. The spanning subgraphs of eulerian graphs. *Journal of Graph Theory*, 1(1):79–84, 1977.
- [2] S. H. Bokhari and A. D. Raza. Augmenting computer networks. In *Proceedings of International Conference on Parallel Processing*, pages 338–345. ACM, 1984.
- [3] G. Cornuéjols. General factors of graphs. *J. Comb. Theory Ser. B*, 45(2):185–198, 1988.
- [4] R. Diestel. *Graphentheorie*. Springer-Verlag, Heidelberg, 4. edition, 2010.
- [5] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan. Augmentation problems. *SIAM Journal on Computing*, 5(4):653–665, 1976.
- [6] H. N. Gabow. An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems. In *Proceedings of the 15th annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'83)*, pages 448–456. ACM, 1983.
- [7] A. García, F. Hurtado, C. Huemer, J. Tejel, and P. Valtr. On triconnected and cubic plane graphs on given point sets. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 42(9):913–922, 2009.
- [8] S. Goodman and S. Hedetniemi. On the hamiltonian completion problem. In Ruth Bari and Frank Harary, editors, *Graphs and Combinatorics*, volume 406 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 262–272. Springer Berlin / Heidelberg, 1974.
- [9] T.-S. Hsu. *Graph augmentation and related problems: theory and practice*. PhD thesis, Austin, TX, USA, 1993.
- [10] G. Kant and H. L. Bodlaender. Planar graph augmentation problems. In *Proceedings of the 2nd Workshop Algorithms and Data Structures (WADS'91)*, volume 519 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 286–298. Springer, 1991.
- [11] D. E. Knuth and A. Raghunathan. The problem of compatible representatives. *SIAM J. Discret. Math.*, 5(3):422–427, 1992.
- [12] D. Lichtenstein. Planar formulae and their uses. *SIAM Journal on Computing*, 11(2):329–343, 1982.
- [13] Z. Mo. *Graph and directed graph augmentation problems*. PhD thesis, Kalamazoo, MI, USA, 1988.
- [14] H. Nagamochi and T. Ibaraki. Graph connectivity and its augmentation: applications of ma orderings. *Discrete Applied Mathematics*, 1–3:447–472, 2002.
- [15] I. Rutter and A. Wolff. Augmenting the connectivity of planar and geometric graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 31:53–56, 2008.
- [16] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 43:150–168, 1932.