

# Zuordnung von Punkten mittels geometrischer Objekte

Nikolaus Mutsanas

Diplomarbeit

14. Juli 2005

Betreuer: Prof. Dorothea Wagner und Dr. Alexander Wolff



Institut für Theoretische Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Der Zuordnungsgraph</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Zuordnung mittels Rechtecken</b>	<b>13</b>
3.1	Minimale Rechtecke . . . . .	13
3.2	Das Entscheidungsproblem ERRZ . . . . .	14
3.3	Existenz einer perfekten, starken Zuordnung . . . . .	15
3.3.1	Punktemengen in allgemeiner Lage . . . . .	15
3.3.2	Punktemengen ohne allgemeine Lage . . . . .	16
3.4	Eine einfache 1/2-Approximation . . . . .	18
3.4.1	Laufzeit des Approximationsalgorithmus . . . . .	20
3.4.2	Begründung des Approximationsfaktors . . . . .	20
3.5	Eine Punktmenge, für die es keine perfekte Zuordnung gibt . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Zuordnung mittels Quadraten</b>	<b>29</b>
4.1	Das Entscheidungsproblem . . . . .	29
4.1.1	Vorbereitende Überlegungen . . . . .	30
4.1.2	Das Modell der gleitenden Quadrate . . . . .	32
4.1.3	Beschriftung von achsenparallelen Strecken . . . . .	33
4.2	Lösung des Problems ERQZ . . . . .	35
4.2.1	Die 2-SAT-Technik . . . . .	38
4.2.2	Korrektheit . . . . .	41
4.2.3	Laufzeitanalyse . . . . .	43

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
<b>5 Anwendung auf Landkartenbeschriftung</b>	<b>45</b>
5.1 Beschriftung von Strecken . . . . .	45
5.2 Beschriftung von Punkten . . . . .	46
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>49</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>52</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Eine Zuordnung in einem Graphen  $G(V, E)$  ist eine Menge von Kanten, so dass keine zwei Kanten zum selben Knoten inzident sind. Viele Probleme lassen sich auf die Suche nach einer Zuordnung maximaler Kardinalität zurückführen. Als Beispiel sei ein Problem aus der Ablaufplanung genannt, bei dem eine Menge von Aufträgen und eine Menge von Maschinen gegeben sind, und für jede Maschine bekannt ist, welche Aufträge sie abarbeiten kann. Das Problem der Suche nach einer möglichst großen Auslastung kann auf die Suche nach einer Zuordnung maximaler Kardinalität in einem bipartiten Graphen zurückgeführt werden. Ein weiteres Problem, das sich auf die Suche nach einer Zuordnung maximaler Kardinalität zurückführen lässt, ist das Bilden von 2er-Arbeitsgruppen aus einer Menge von Arbeitern, für die bekannt ist, welche zwei Arbeiter gut zusammenarbeiten können. Dieses Problem entspricht der Suche nach einer maximalen Zuordnung in einem allgemeinen Graphen.

Für allgemeine Graphen haben Micali und Vazirani [MV80] einen Algorithmus mit Laufzeit  $O(\sqrt{nm})$  für die Berechnung einer Zuordnung maximaler Kardinalität angegeben, mit  $m = |E|, n = |V|$ . Für bipartite Graphen kann eine Zuordnung maximaler Kardinalität ebenfalls in  $O(\sqrt{nm})$  Zeit mit dem Algorithmus von Hopcroft und Karp [HK73] angegeben werden.

In gewichteten Graphen kann statt der Kardinalität einer Zuordnung die Summe der Gewichte der Kanten dieser Zuordnung maximiert werden. Für allgemeine Graphen haben Galil et al. [GMG86] einen Algorithmus zur Berechnung der Zuordnung mit maximalem Gewicht angegeben, der die Laufzeit  $O(nm \log n)$  hat. Vaidya [Vai88] zeigte, dass die Geometrie bei der Zuordnung helfen kann, indem er für eine Punktmenge in der Ebene und den euklidischen Abstand als Gewicht einer Kante einen Algorithmus zur Berechnung einer Zuordnung maximaler Kardinalität und minimalen Gewichts mit der Laufzeit  $O(n^{2.5} \log^4 n)$  formulierte. Wegen der Dreiecksungleichung ist eine Zuordnung maximaler Kardinalität und minimalen Gewichts immer kreuzungsfrei. Wie wir sehen werden, entspricht das

einer speziellen Zuordnung mittels Strecken. Schließlich haben Agarwal und Varadarajan [VA99] Approximationsalgorithmen für die Berechnung von allgemeinen und bipartiten Zuordnungen in der Ebene angegeben.

Das Problem der Zuordnung von Punkten mittels geometrischer Objekte ist der Versuch bei *geometrischen Graphen* das Mittel der Zuordnung zu verallgemeinern. Dazu werden neben Strecken auch achsenparallele Rechtecke, Quadrate und Kreisscheiben benutzt. Im Prinzip kann jede Klasse von konvexen geometrischen Objekten benutzt werden. Dies führt zur folgenden Definition.

**Definition 1.1** *Gegeben sei eine Punktmenge  $P$  in der Ebene und eine Klasse  $\mathcal{O}$  von konvexen geometrischen Objekten. Eine  $\mathcal{O}$ -Zuordnung für  $P$  ist eine Menge  $M \subseteq \mathcal{O}$ , so dass:*

- Für  $O \in M$  ist  $|O \cap P| = 2$ .
- Für  $O, O' \in M$  mit  $O \neq O'$  ist  $O \cap O' \cap P = \emptyset$ .

Zwei wichtige Eigenschaften, die für eine solche Zuordnung überprüft werden können, sind die folgenden.

**Definition 1.2** *Seien  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  und eine  $\mathcal{O}$ -Zuordnung  $M$  für  $P$  gegeben. Diese  $\mathcal{O}$ -Zuordnung heißt perfekt, wenn*

$$\text{für alle } p \in P, \text{ gibt es } O \in M \text{ so dass } p \in O$$

**Definition 1.3** *Eine  $\mathcal{O}$ -Zuordnung  $M$  für  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt stark, wenn*

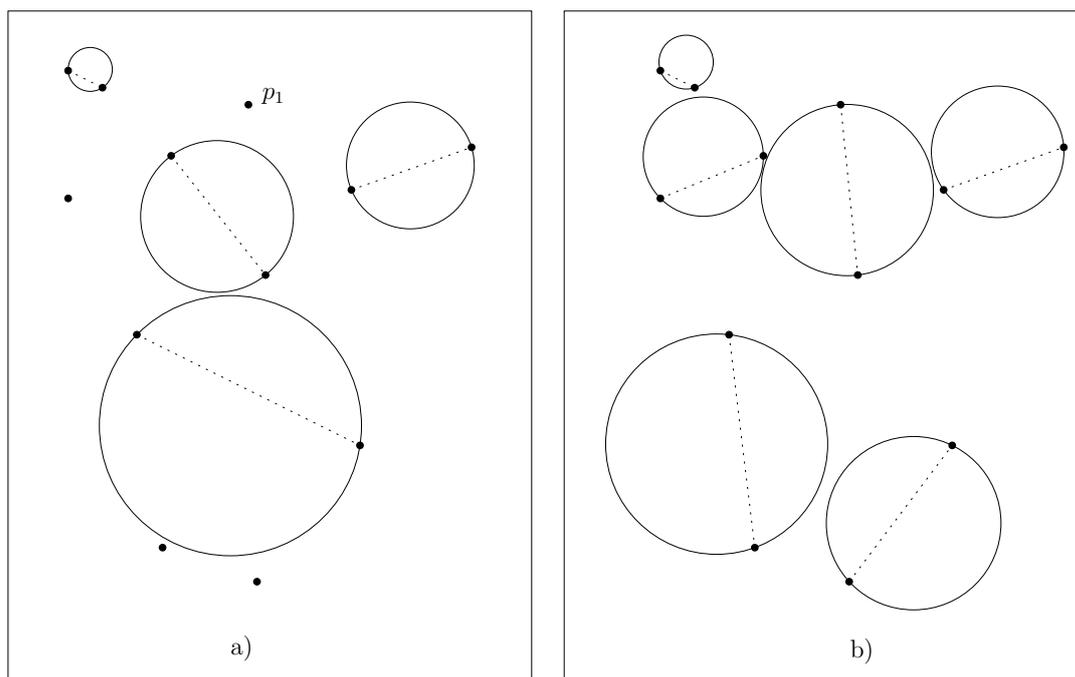
$$\text{für alle } O, O' \in M, O \cap O' = \emptyset$$

*Sonst heißt  $M$  schwach.*

Abbildung 1.1 gibt je ein Beispiel für diese beiden Eigenschaften von Zuordnungen für die Klasse der Kreisscheiben.

Es stellt sich heraus, dass die Existenz einer Zuordnung mit bestimmten Eigenschaften Aussagen über die zugrundeliegende Punktmenge liefern kann, die bei der Lösung anderer Probleme, z.B. aus dem Bereich der Landkartenbeschriftung (s. Kapitel 5) behilflich sein können.

Bei der Lösung von bestimmten Problemen der Zuordnung von Punkten mittels geometrischer Objekte kann es entscheidend sein, ob die Punktmenge zwei Punkte mit gleicher  $x$ - oder  $y$ -Koordinate enthält, oder nicht. Um Punktfolgen in dieser Hinsicht zu charakterisieren, wird der Begriff der allgemeinen Lage eingeführt.



**Abbildung 1.1** : Die Definitionen einer starken und einer perfekten Zuordnung an einem Beispiel für die Klasse der Kreisscheiben: a) zeigt eine Menge von Kreisen für eine gegebene Punktmenge, die offensichtlich nicht zu einer perfekten Zuordnung erweitert werden kann. Jeder Kreis der zur Zuordnung von  $p_1$  zu einem anderen Punkt herangezogen wird, enthält zwangsläufig weitere Punkte in seinem Inneren. Trotzdem gibt es für diese Punktmenge eine perfekte Zuordnung: in b) ist eine perfekte Zuordnung gegeben, die sogar stark ist.

**Definition 1.4** Eine Punktmenge  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  ist in allgemeiner Lage, genau dann, wenn für alle Punkte  $p, q \in P$ ,  $p \neq q$  gilt  $x(p) \neq x(q)$  und  $y(p) \neq y(q)$ .

Die allgemeine Lage ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer perfekten starken Zuordnung mittels achsenparalleler Rechtecke (s. Abschnitt 3.3.1).

Woeginger und Rendl [RW93] untersuchten das Problem der Rekonstruktion von Mengen von achsenparallelen Strecken in der Ebene. Aus ihrer Arbeit geht hervor, dass das Problem, zu entscheiden ob eine Punktmenge eine starke Zuordnung mittels achsenparalleler Strecken besitzt, NP-schwer ist.

Das Problem der Zuordnung von Punkten mittels Quadraten und Kreisen wurde erstmals von Ábrego et al. [ÁAFM<sup>+</sup>05] untersucht. Sie zeigten dass eine Punktmenge in allgemeiner Lage stets eine Zuordnung mittels Kreisscheiben besitzt, wenn die Anzahl der Punkte gerade ist. Weiterhin gibt es für jede Punktmenge in allgemeiner Lage mit  $n$  Punkten eine starke Zuordnung mittels Kreisscheiben die mindestens  $2\lceil(n-1)/8\rceil$  Punkte enthält.

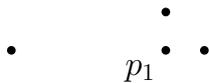
Für die Klasse der achsenparalleler Quadrate haben Abrego et al. ebenfalls gezeigt, dass eine Punktmenge in allgemeiner Lage stets eine Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate besitzt, wenn die Anzahl der Punkte gerade ist. Falls die Punktmenge nicht in allgemeiner Lage ist, kann die Existenz einer Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate nicht garantiert werden. Schließlich gibt es für jede Punktmenge in allgemeiner Lage eine starke Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate, die mindestens  $2\lceil n/5 \rceil$  der Punkte enthält.

In dieser Arbeit wird ein Algorithmus mit Laufzeit  $O(n \log n)$  angegeben, der für eine Punktmenge in allgemeiner Lage mit einer geraden Anzahl von Punkten eine perfekte starke Zuordnung mittels achsenparalleler Rechtecke liefert. Für Punktmengen die nicht in allgemeiner Lage sind, wird ein einfacher Faktor- $1/2$ -Approximationsalgorithmus angegeben, der ebenfalls die Laufzeit  $O(n \log n)$  hat. Weiterhin wird ein Polynomialzeitalgorithmus angegeben, der überprüft, ob eine gegebene kombinatorische Zuordnung durch eine starke Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate realisiert werden kann. Die Laufzeit dieses Algorithmus ist  $O(n^2 \log n)$ . Schließlich wird gezeigt, dass dieses Ergebnis benutzt werden kann, um ein Problem aus der Landkartenbeschriftung zu lösen.

# Kapitel 2

## Der Zuordnungsgraph

Für die Klassen der achsenparallelen Rechtecke, der achsenparallelen Quadrate und der Kreisscheiben gibt es jeweils Punktemengen, die keine perfekte, starke Zuordnung erlauben. Ein Beispiel einer solchen Punktemenge für die Klasse der achsenparalleler Quadrate ist in Abbildung 2.1 angegeben.



**Abbildung 2.1 :** Beispiel einer Punktemenge die keine perfekte, starke Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate zulässt. Der Punkt  $p_1$  kann nur einem der drei ihn umgebenden Punkte zugeordnet werden. Es ist jedoch leicht zu sehen, dass das eine Zuordnung der verbleibenden Punkte unmöglich macht.

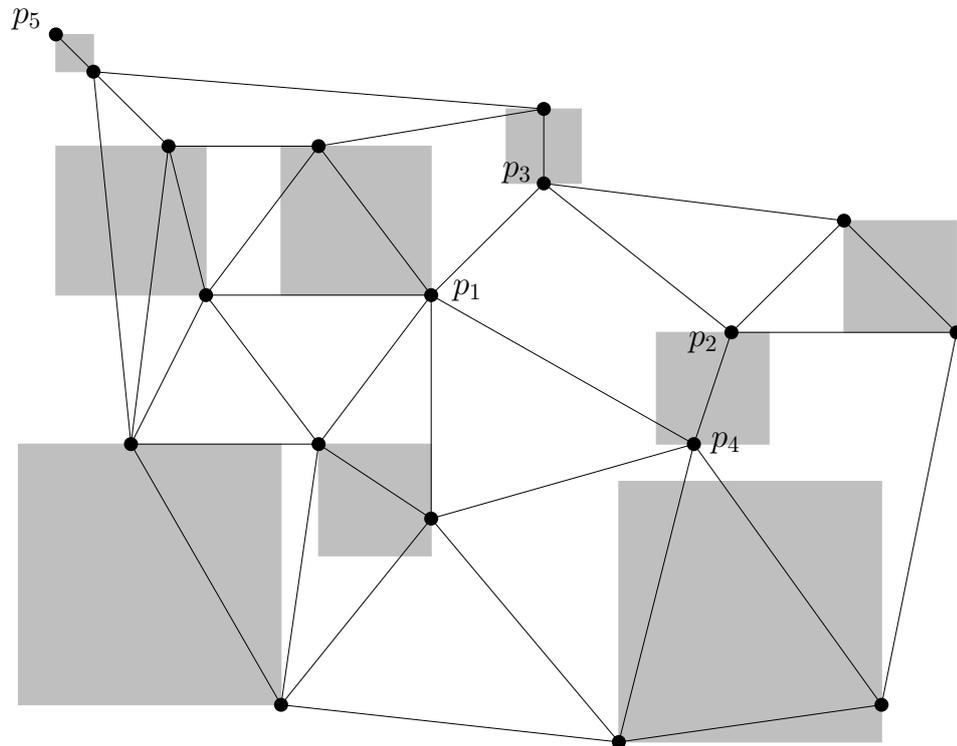
Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen einer Zuordnung mittels geometrischer Objekte und kombinatorischen Zuordnungen her.

**Definition 2.1** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Punktemenge in der Ebene und  $\mathcal{O}$  eine Klasse von geometrischen Objekten. Der Zuordnungsgraph von  $P$  bezüglich  $\mathcal{O}$  ist der geometrische Graph  $G_{\mathcal{O}}(P, E_{\mathcal{O}})$ , für den gilt:

$$(p, q) \in E_{\mathcal{O}} \text{ genau dann wenn es } O \in \mathcal{O} \text{ gibt, so dass } O \cap P = \{p, q\}$$

Der Zuordnungsgraph für eine Beispielpunktemenge und die Klasse der achsenparalleler Quadrate ist in Abbildung 2.2 angegeben. Eine perfekte starke Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate ist grau angedeutet.

Zur Überprüfung der Eigenschaften, insbesondere der Stärke einer Zuordnung wird dieser Graph herangezogen. Der Zusammenhang zwischen einer Zuordnung im Zuordnungsgraphen und einer zugehörigen Menge von Objekten aus  $\mathcal{O}$  wird durch folgende Definition hergestellt.



**Abbildung 2.2** : Beispiel eines Zuordnungsgraphen bezüglich der Klasse der achsenparallelen Rechtecke. Die Punkte  $p_1$  und  $p_2$  sind nicht adjazent, da die Differenz ihrer  $x$ -Koordinaten größer ist als die Differenz der  $y$ -Koordinaten der Punkte  $p_3$  und  $p_4$ . Somit enthält jedes Quadrat, das  $p_1$  und  $p_2$  enthält, auch mindestens einen der Punkte  $p_3$  und  $p_4$ . Eine perfekte starke Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate ist grau angedeutet.

**Definition 2.2** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Punktmenge in der Ebene und  $\mathcal{O}$  eine Klasse von konvexen geometrischen Objekten. Weiterhin sei  $G(P, E)$  der Zuordnungsgraph für  $P$  und  $\mathcal{O}$ , und sei  $M \subseteq E$ ,  $|M| = k$  eine Zuordnung in  $G$ . Eine Menge  $O = \{O_1, \dots, O_k\} \subseteq \mathcal{O}$  realisiert die Zuordnung  $M$ , wenn

$$\text{für alle } e = (p, q) \in M \text{ existiert ein } O_i \in O : O_i \cap P = \{p, q\}$$

In Abbildung 2.2 erkennt man, dass der Punkt  $p_5$  zu einem einzigen Punkt adjazent ist. Solche Punkte können nur in einer Weise zugeordnet werden und müssen gesondert betrachtet werden.

**Definition 2.3** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Punktmenge in der Ebene und  $\mathcal{O}$  eine Klasse von konvexen geometrischen Objekten. Ein Punkt  $p \in P$  heißt isoliert, wenn er in  $G_{\mathcal{O}}(P, E_{\mathcal{O}})$  Grad 1 hat.

Der Punkt  $p_5$  der Punktmenge aus Abbildung 2.2 ist also isoliert. Da für solche Punkte festgelegt ist, welchem Punkt sie ggf. zugeordnet werden, kann es keine perfekte Zuordnung geben, bei der zwei isolierte Punkte im Zuordnungsgraphen zum selben Punkt adjazent sind. Das wird durch folgende Beobachtung ausgedrückt.

**Beobachtung 2.1** *Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Punktmenge in der Ebene und  $\mathcal{O}$  eine Klasse von konvexen geometrischen Objekten. Weiterhin sei  $G_{\mathcal{O}}(P, E_{\mathcal{O}})$  der Zuordnungsgraph für  $P$  bezüglich  $\mathcal{O}$ , und  $I$  die Menge der isolierten Punkte. Für  $p \in P$  bezeichne  $\text{Adj}(p)$  die Menge der Punkte die in  $G_{\mathcal{O}}(P, E_{\mathcal{O}})$  zu  $p$  adjazent sind. Falls es  $p, q \in I$ ,  $p \neq q$  gibt, für die  $\text{Adj}(p) \cap \text{Adj}(q) \neq \emptyset$  ist, hat  $P$  keine perfekte Zuordnung.*

In Kapitel 3 wird das Problem der Zuordnung von Punkten mittels geometrischer Objekte für die Klasse der achsenparalleler Rechtecke untersucht und in Kapitel 4 für die Klasse der achsenparallelen Quadraten. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden in Kapitel 5 auf ein Problem der Landkartenbeschriftung angewendet.



# Kapitel 3

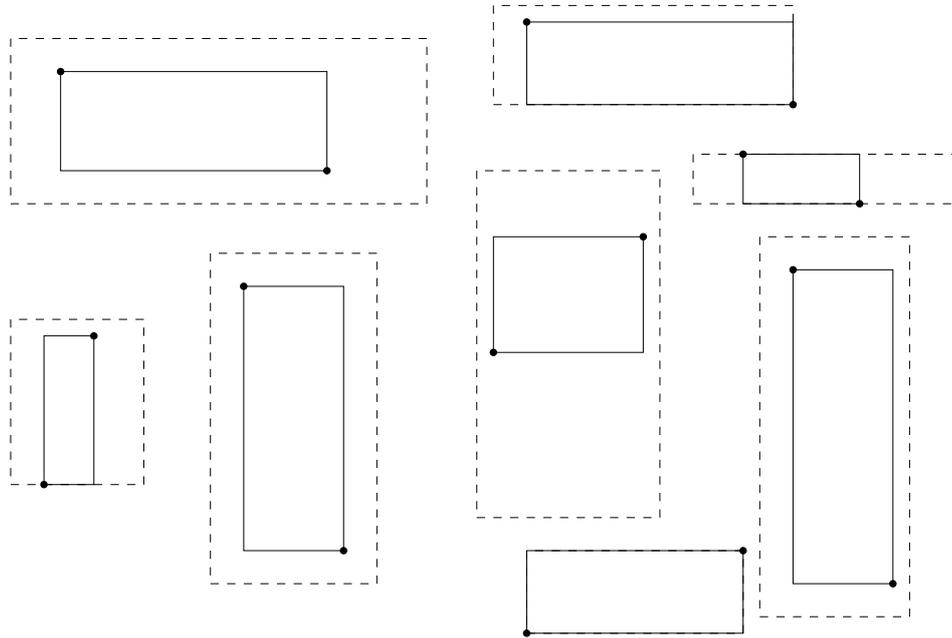
## Zuordnungen von Punkten mittels achsenparalleler Rechtecke

Das Problem der Zuordnung von Punkten mittels achsenparalleler Rechtecke stellt den ersten Schritt zur Verallgemeinerung des Zuordnungsproblems dar. Da bei Rechtecken, anders als bei Quadraten und Kreisen, ihre Ausdehnungen in den zwei Dimensionen unabhängig voneinander sind, weisen Rechtecke eine höhere „Flexibilität“ auf als Objekte der beiden anderen Klassen. Die Klasse der achsenparalleler Rechtecke wird mit  $\mathcal{R}$  bezeichnet.

Im Folgenden werden zwei Zuordnungsprobleme mit achsenparallelen Rechtecken untersucht. Dabei wird unterschieden, ob die zugrundeliegende Punktmenge in allgemeiner Lage ist oder nicht.

### 3.1 Minimale Rechtecke

Es ist leicht zu sehen, dass es für jedes achsenparallele Rechteck  $O \in \mathcal{R}$ , das genau zwei Punkte aus  $P$  enthält, ein kleineres Rechteck  $O' \in \mathcal{R}$  gibt, das diese zwei Punkte auf zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken enthält. Damit ist das minimale Rechteck das die zwei Punkte enthält eindeutig bestimmt. Abbildung 3.1 illustriert diese Eigenschaft achsenparalleler Rechtecke an einem Beispiel.



**Abbildung 3.1** : Reduzierung einer Rechteckszuordnung auf minimale Rechtecke: die Zuordnung mit den gestrichelten Rechtecken enthält eine Zuordnung, bei der die Rechtecke die einander zuzuordnenden Punkte auf zwei diagonal gegenüberliegende Ecken enthalten.

## 3.2 Das Entscheidungsproblem ERRZ

Wir betrachten folgendes Entscheidungsproblem (Existiert Realisierung durch Rechteck-Zuordnung, ERRZ)

Gegeben: Eine Punktmenge  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  und eine perfekte kombinatorische Zuordnung  $M \subseteq E_{\mathcal{R}}$ ,  $|M| = n$ .

Gesucht: Gibt es eine perfekte starke Zuordnung mittels achsenparalleler Rechtecke, die  $M$  realisiert? Gegebenenfalls soll eine solche Zuordnung angegeben werden.

Wie in Abschnitt 3.1 geschildert, enthält jede perfekte, starke Zuordnung mittels achsenparalleler Rechtecke eine Zuordnung, bei der die Punkte auf diagonal gegenüberliegenden Ecken der Rechtecke liegen. Die Existenz einer perfekten, starken Rechteck-Zuordnung, die  $M$  realisiert, kann daher auf der Menge der minimalen Rechtecke getestet werden. Dazu muss überprüft werden, ob sich zwei minimale Rechtecke überschneiden. Das geht in  $O(n \log n)$  Zeit mit dem Algorithmus von Edelsbrunner (siehe [PS85], Seite 359).

### 3.3 Existenz einer perfekten, starken Zuordnung

Im Folgenden wird nun das Problem der Suche nach einer starken perfekten Zuordnung mittels achsenparalleler Rechtecke behandelt. Dabei ist es für die Komplexität der Lösung entscheidend, ob die Punkte in allgemeine Lage sind, oder nicht.

#### 3.3.1 Punktemengen in allgemeiner Lage

**Problem:**

Gegeben: Eine Punktemenge  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  in allgemeiner Lage.

Gesucht: Gibt es eine perfekte, starke Zuordnung  $M \subseteq E_{\mathcal{R}}$  mittels achsenparalleler Rechtecke? Gegebenenfalls soll eine solche Zuordnung angegeben werden.

Die allgemeine Lage der Punktemenge kann benutzt werden, um einen sehr einfachen und effizienten Algorithmus zu formulieren, der für jede Punktemenge eine perfekte, starke Zuordnung mittels achsenparalleler Rechtecke liefert:

---

**Algorithm 1:** MATCHLEXORD( $P, c$ )

---

**Eingabe:** Punktemenge  $P$  mit  $2n$  Punkten in allg. Lage,  $c \in \{x, y\}$

**Ausgabe:** Perfekte, starke Rechteck-Zuordnung  $M = \{O_1, \dots, O_n\}$

// Lexikographische Ordnung

$(p_1, \dots, p_{2n}) \leftarrow \text{LexOrd}(P, c)$

// Zuordnung mittels Rechtecke

$Z \leftarrow \emptyset$

**für**  $i \leftarrow 1$  **bis**  $n$  **tue**

$Z \leftarrow Z \cup \{\text{Rechteck}(p_{2i-1}, p_{2i})\}$

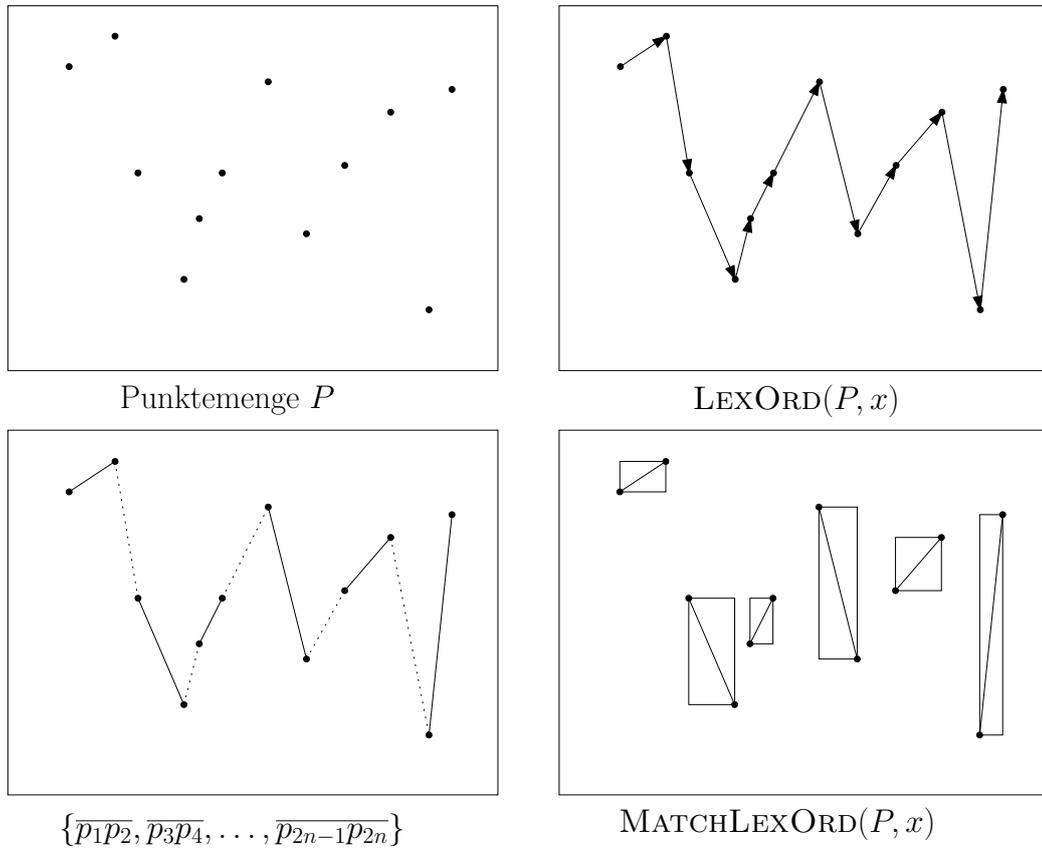
**zurück**  $M$

---

Der Algorithmus MATCHLEXORD ist in Abbildung 3.2 an einem Beispiel illustriert.

**Lemma 3.1** *Der Algorithmus MATCHLEXORD liefert für eine Menge von  $2n$  Punkten in allgemeiner Lage in  $O(n \log n)$  Zeit eine perfekte starke Rechteckszuordnung.*

*Beweis.* Die allgemeine Lage der Punktemenge führt dazu, dass keine zwei nacheinanderfolgende Punkte eine gleiche Koordinate haben. Damit können sich zwei benachbarte Rechtecke nicht an ihrem Rand berühren. Die lexikographische Sortierung benötigt  $O(n \log n)$  Zeit und die Berechnung der Rechtecke aus der sortierten Liste kann in  $O(n)$  durchgeführt werden. Damit liefert der Algorithmus



**Abbildung 3.2** : Der Algorithmus MATCHLEXORD angewandt auf eine Beispieldpunktemenge.

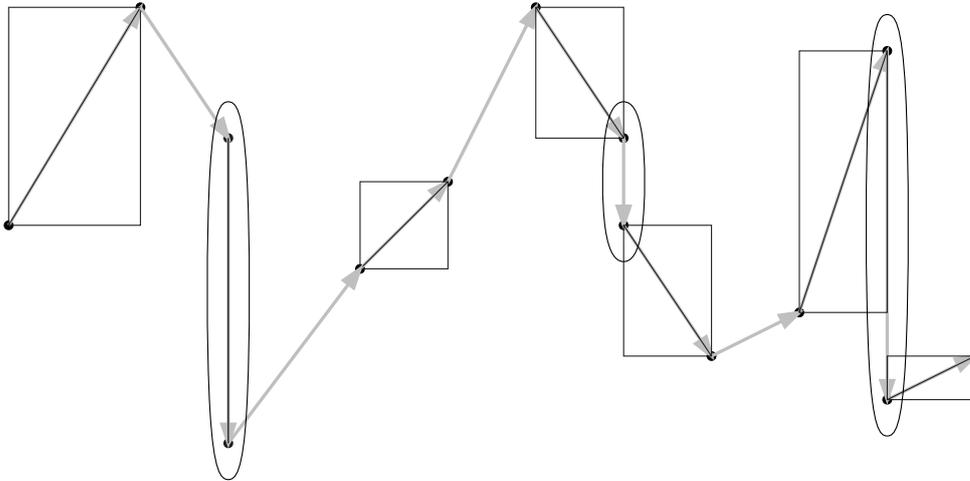
MATCHLEXORD eine Lösung in  $O(n \log n)$  Zeit. □

### 3.3.2 Punktemengen ohne allgemeine Lage

**Beobachtung 3.1** Die allgemeine Lage der Punktemenge ist eine hinreichende aber nicht notwendige Vorbedingung für die Korrektheit des Algorithmus MATCHLEXORD.

Abbildung 3.3 zeigt eine Punktemenge, die nicht in allgemeiner Lage ist, für die der Algorithmus MATCHLEXORD jedoch funktioniert.

Man sieht, dass zwei Punkte mit gleicher  $x$ -Koordinate keine Probleme bereiten, wenn sie einander zugeordnet werden, oder wenn sich die Intervalle der  $y$ -Koordinaten zwei aufeinanderfolgender „kritischer“ Punktepaare nicht überschneiden. Genauer:



**Abbildung 3.3** : Beispiel einer Punktmenge für die MATCHLEXORD eine Lösung liefert, obwohl sie nicht in allgemeiner Lage ist. Die Punktepaare mit gleicher  $x$ -Koordinate sind durch geschlossene Kurven markiert. Die lexikographische Ordnung der Punkte ist durch die grauen Pfeile dargestellt.

**Lemma 3.2** Sei  $P = (p_1, \dots, p_{2n})$  eine lexikographisch sortierte Punktfolge und  $M = \{(p_1, p_2), \dots, (p_{2n-1}, p_{2n})\}$  eine perfekte kombinatorische Zuordnung.  $M$  kann durch eine starke perfekte Rechteck-Zuordnung realisiert werden, genau dann, wenn

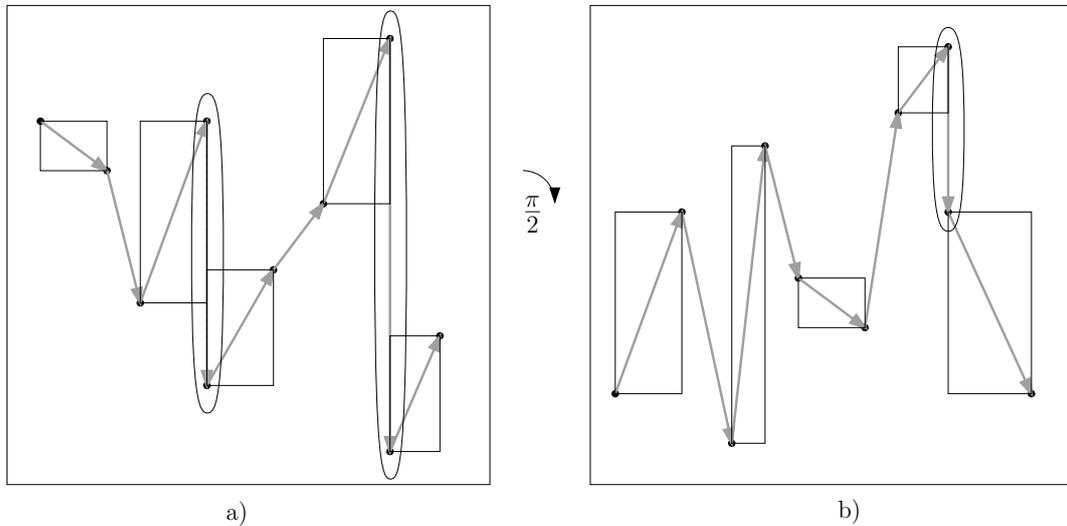
für alle  $i = 2k + 1$ ,  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ , mit  $x(p_i) = x(p_{i+1})$ , gilt :

$$\begin{aligned} & [\min(y(p_{i-1}), y(p_i)), \max(y(p_{i-1}), y(p_i))] \cap \\ & [\min(y(p_{i+1}), y(p_{i+2})), \max(y(p_{i+1}), y(p_{i+2}))] = \emptyset \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Bedingung in Lemma 3.2 für eine sortierte Punktmenge in  $O(n)$  Zeit überprüft werden kann.

In manchen Fällen kann eine Vertauschung der Reihenfolge der Koordinaten in der Lexikographischen Sortierung zu einer perfekten, starken Zuordnung führen. Dies entspricht einer Rotation der Punktmenge um  $\pi/2$  im Uhrzeigersinn und anschließendem Lösen durch MATCHLEXORD. Abbildung 3.4 gibt ein Beispiel einer Punktmenge an, für die der Algorithmus MATCHLEXORD erst nach einer Rotation um  $\pi/2$  im Uhrzeigersinn eine korrekte Lösung liefert.

Die notwendige Vorbedingung für die Korrektheit der Lösung des Algorithmus MATCHLEXORD kann damit abgeschwächt werden. Das führt zum Algorithmus MATCHLEXORD-2D, der die Bedingung von Lemma 3.2 für beide Dimensionen überprüft.



**Abbildung 3.4** : Beispiel einer Punktmenge für die der Algorithmus MATCHLEXORD erst nach einer Rotation um  $\pi/2$  im Uhrzeigersinn eine Lösung liefert.

### 3.4 Eine einfache 1/2-Approximation

Der Algorithmus zur Berechnung einer perfekten, starken Zuordnung von Punkten mittels achsenparalleler Rechtecke für eine Punktmenge in allgemeiner Lage kann modifiziert werden, um einen Approximationsalgorithmus für den allgemeinen Fall zu liefern. Dabei wird versucht, die Stellen, an denen der Algorithmus MATCHLEXORD-2D Überschneidungen verursachen würde, zu erkennen und gezielt zu umgehen.

Die Anforderungen an den Approximationsalgorithmus sind folgende:

- Der Approximationsalgorithmus soll eine perfekte starke Zuordnung liefern, wenn MATCHLEXORD-2D eine liefert.
- Für Punktmenge für die MATCHLEXORD-2D keine Lösung liefern würde, soll der Approximationsalgorithmus eine starke Zuordnung liefern, die mindestens die Hälfte der Punkte überdeckt.

Falls die Bedingung aus Lemma 3.2 in einer Achsenrichtung erfüllt ist, wird der Algorithmus MATCHLEXORD2D aufgerufen.

Sonst wird die Punktmenge in Mengen  $H_i$  und  $V_j$  partitioniert.  $V_j$  sind maximale Teilmengen nacheinanderfolgender Punkte die die gleiche Koordinate in der

betrachteten Achsenrichtung haben, und  $H_i$  sind die dazwischenliegende Teilmengen. Für diese Mengen wird jeweils der Algorithmus MATCHLEXORD ausgeführt und die Ergebnisse werden zusammengefügt. Man beachte, dass der Algorithmus MATCHLEXORD für eine Menge des Typs  $H_i$  bzw.  $V_j$  eine perfekte starke Zuordnung liefert, wenn die Anzahl der Punkte gerade ist.

Eine Verbesserung kann an manchen Fällen erzielt werden, wenn die Partitionierung und anschließende Berechnung der Teillösungen in beiden Richtungen vorgenommen wird. Die zwei resultierende Gesamtergebnisse werden miteinander verglichen, und das mit der größten Punkteüberdeckung als Lösung zurückgegeben.

Die Teilmengen  $H_i$  und  $V_j$  in  $x$ -Richtung sind wie folgt definiert:

- $H_i = \{p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+k}\}$ ,  $x(p_l) \neq x(p_{l+1})$ ,  $i \leq l \leq i+k-1$ ,  
 $x(p_{i-2}) = x(p_{i-1})$ ,  $x(p_{i+k+1}) = x(p_{i+k+2})$ , und
- $V_j = \{p_j, p_{j+1}, \dots, p_{j+k}\}$ ,  $x(p_l) = x(p_{l+1})$ ,  $j \leq l \leq j+k-1$ ,  
 $x(p_{j-1}) \neq x(p_j)$ ,  $x(p_{j+k}) \neq x(p_{j+k+1})$ .

Damit besteht eine Menge  $H_i$  aus einer nicht erweiterbaren Reihe – in der lexikographisch sortierten Punktmenge  $P$  – von Punkten die verschiedene  $x$ -Koordinaten haben. Eine Menge  $V_j$  besteht aus einer nicht erweiterbaren Reihe von Punkten, die dieselbe  $x$ -Koordinate haben. Diese Definition lässt sich für die  $y$ -Richtung analog formulieren.

Die Mengen  $H_i$  und  $V_j$  werden durch den Index ihres ersten Punktes indiziert. Dies wird durch das Einführen der Variablen  $hidx$ ,  $vidx$  erzielt (Zeilen 1 und 2). Der letzte Punkt wird in Zeile 15 in die entsprechende Menge  $H_i$  oder  $V_j$  hinzugefügt.

Für jede Achsenrichtung wird die Punktmenge lexikographisch sortiert und anschließend wird die Bedingung aus Lemma 3.2 überprüft (Zeile 2 bzw. 17). Falls die Bedingung erfüllt ist, kann für die Punktmenge mit MATCHLEXORD eine perfekte, starke Zuordnung gefunden werden (Zeile 12 bzw. 27). Falls die Bedingung in einer Achsenrichtung nicht erfüllt wird, wird die Punktmenge in disjunkte Teilmengen  $H_i$ ,  $V_i$  partitioniert. In diesen Teilmengen wird jeweils eine Zuordnung berechnet, und zu einem Gesamtergebnis zusammengefügt. Das wird durch die Funktion PARTMATCH durchgeführt (Zeile 15 bzw. 30). Die somit gewonnenen Zuordnungen in jeder Richtung werden verglichen, und diejenige mit der größten Anzahl von überdeckten Punkten wird als Gesamtlösung zurückgegeben (Zeile 31).

### 3.4.1 Laufzeit des Approximationsalgorithmus

Der Approximationsalgorithmus besteht im Wesentlichen aus einem zweimaligen Ausführen des Algorithmus MATCHLEXORD und der Überprüfung der Vorbedingung aus Lemma 3.2. Die Vorbedingung kann in  $O(n)$  Zeit überprüft werden, die lexikographische Sortierung benötigt  $O(n \log n)$  Zeit. Insgesamt ist also die Laufzeit des Approximationsalgorithmus  $O(n \log n)$ .

### 3.4.2 Begründung des Approximationsfaktors

Die Mengen  $H_i$  und  $V_i$  erfüllen die Bedingung aus Lemma 3.2. Damit liefert der Algorithmus MATCHLEXORD eine perfekte, starke Teilzuordnung, falls die Anzahl der Punkte gerade ist, und eine starke Teilzuordnung bei der ein Punkt übrig bleibt, falls die Anzahl der Punkte ungerade ist. Der Anteil der Punkte die von der Teilzuordnung überdeckt werden wird größer, je größer die Anzahl der Punkte einer solchen Menge ist.

**Beobachtung 3.2** *In einer Partitionierung einer Punktemenge die die Bedingung aus Lemma 3.2 verletzt in  $H_i$ 's und  $V_i$ 's können zwei Mengen  $H_i$  nicht aufeinanderfolgen.*

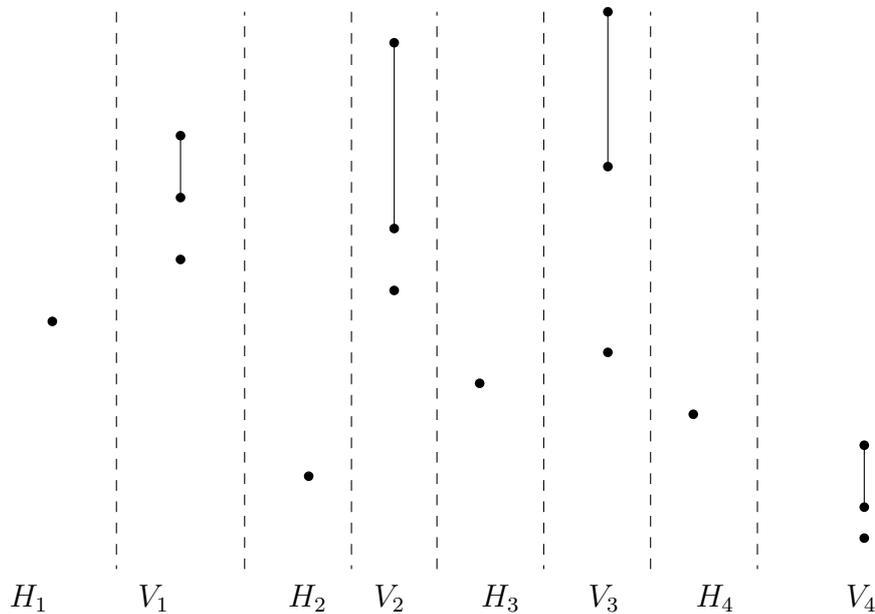
Nach der Definition von  $H_i$  ist eine solche Menge nicht erweiterbar. Würden zwei Mengen  $H_1$  und  $H_2$  aufeinanderfolgend auftauchen, so könnte man sie zu einer größeren Menge  $H_{12}$  zusammenfassen, die keine aufeinanderfolgende Punkte mit gleicher  $x$ -Koordinate aufweist.

**Beobachtung 3.3** *Eine Punktemenge  $V_i$  hat mindestens 2 Elemente.*

Der ungünstigste Fall für den ersten Teil des Algorithmus MATCHLEXORD-APP tritt also auf, wenn die Punktemenge die Bedingung aus Lemma 3.2 verletzt und in der Partitionierung viele Teilmengen vorkommen, die eine kleine, ungerade Anzahl von Punkten haben. Nach Beobachtung 3.2 müssen möglichst kleine  $H_i$ 's durch möglichst kleine  $V_i$ 's getrennt werden. Nach Beobachtung 3.3 hat jedes  $V_i$  mindestens 2 Punkte und damit die Anzahl der Punkte ungerade ist, hat jedes  $V_i$  genau 3 Punkte. Die Mengen  $H_i$  haben 1 Punkt. Abbildung 3.5 zeigt eine Menge die diese Bedingungen erfüllt.

Die Teilzuordnungen bestehen in diesem Fall aus keinem Rechteck für die  $H_i$ 's und einem Rechteck für die  $V_i$ 's, wodurch 0/1 bzw. 2/3 Punkte von der Teilzuordnung überdeckt werden. Insgesamt werden damit für zwei nacheinanderfolgende Mengen  $H_i, V_j$  2/4 Punkte von der Zuordnung überdeckt. Man beachte, dass der Fall zweier nacheinanderfolgenden Mengen  $V_i, V_j$  günstiger ist, da dort 4/6 Punkten zugeordnet werden können.

### 3.5. EINE PUNKTEMENGE, FÜR DIE ES KEINE PERFEKTE ZUORDNUNG GIBT 21



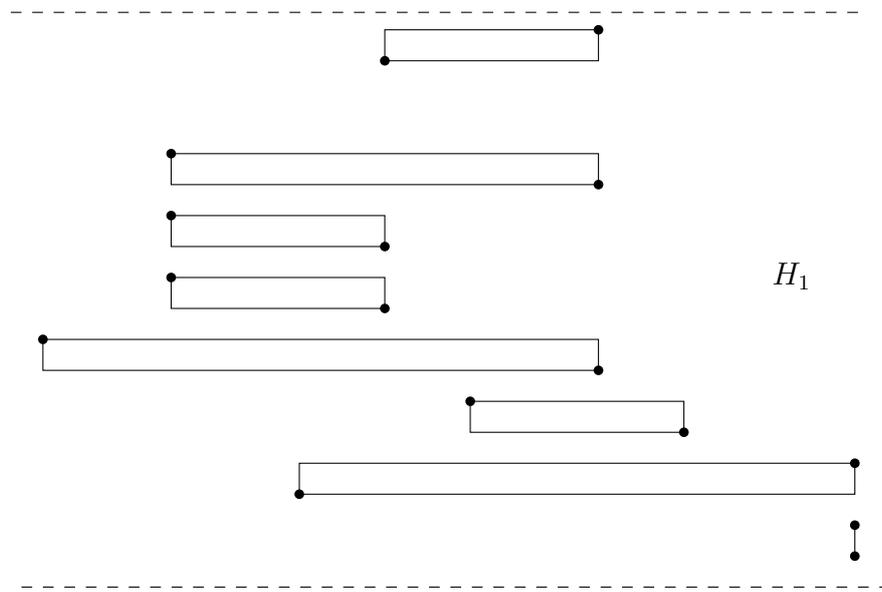
**Abbildung 3.5 :** Eine Punktemenge für die in einer Richtung nur die Hälfte der Punkte durch eine starken Rechtecks-Zuordnung überdeckt werden kann.

An Abbildung 3.6 erkennt man, dass der zweite Teil des Algorithmus MATCHLEXORDAPP eine bessere Zuordnung liefert.

Dennoch ist die Abschätzung des Approximationsfaktors auf  $1/2$  scharf: Abbildung 3.7 a) gibt eine Punktemenge an für die der Algorithmus nur die Hälfte der Punkte durch eine Zuordnung überdeckt. In beiden Richtungen wechseln sich dreielementige Mengen  $V_i$  und einelementige Mengen  $H_j$  ab. Die durchgezogene Linien stellen die Zuordnung im ersten Teil des Algorithmus MATCHLEXORDAPP dar, die punktierte Linien die Zuordnung im zweiten Teil. Beide Zuordnungen überdecken genau die Hälfte der Punkte. Eine starke Zuordnung, die alle bis auf zwei Punkte überdeckt, ist in Abbildung 3.7 b) angegeben. Da diese Menge beliebig wiederholt werden kann, können beliebig große Punktemengen mit  $4n$  Punkten angegeben werden, für die der Approximationsalgorithmus nur die Hälfte der Punkte überdeckt, eine optimale Zuordnung jedoch alle bis auf zwei Punkte überdeckt.

## 3.5 Eine Punktemenge, für die es keine perfekte Zuordnung gibt

Nach Beobachtung 2.1 kann eine Punktemenge keine perfekte Zuordnung haben, wenn es zwei isolierte Punkte gibt, die zum selben Punkt im Zuordnungsgraph



**Abbildung 3.6 :** In der vertikalen Richtung besteht die Partitionierung der Punktmenge aus einer Teilmenge  $H_1$ . Für solche Teilmengen gibt es immer starke Zuordnungen die perfekt sind, wenn die Anzahl der Punkte gerade ist. Damit liefert der Algorithmus MATHLEXORDAPP im zweiten Teil eine perfekte, starke Zuordnung für die Punktmenge aus Abbildung 3.5.

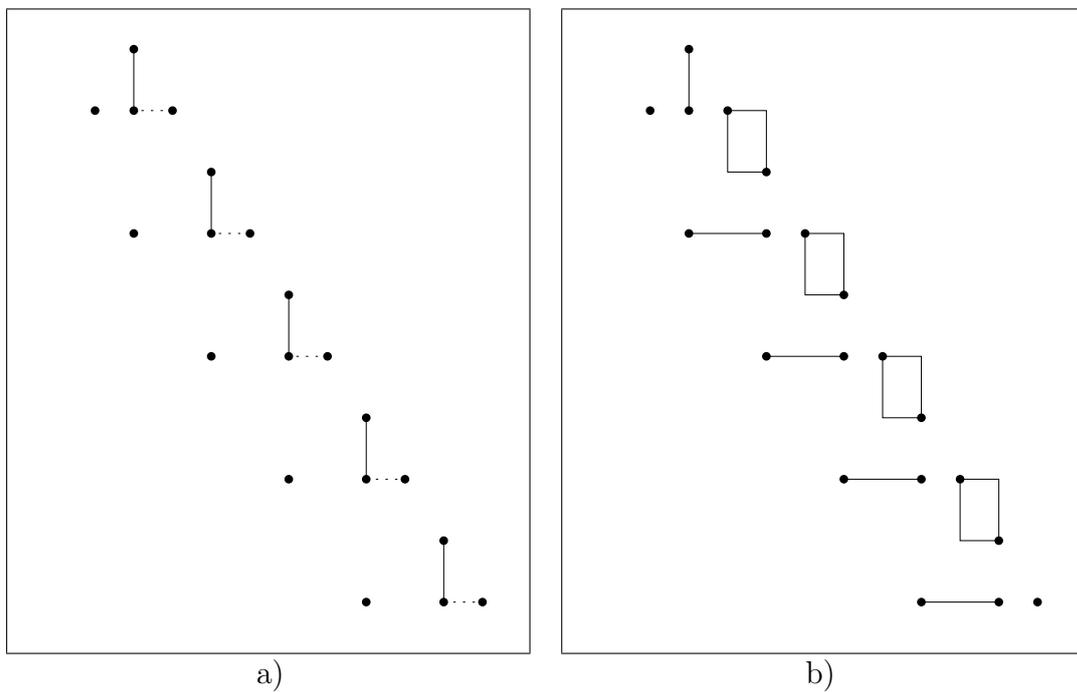
adjazent sind. Diese notwendige Bedingung für die Existenz einer perfekten Zuordnung kann benutzt werden, um Punktmenge zu konstruieren, bei denen möglichst viele isolierte Punkte um die Zuordnung zu einem Punkt konkurrieren. Das liefert eine obere Schranke für die Anzahl der Punkte, die von einer optimalen Zuordnung überdeckt werden.

Abbildung 3.8 gibt ein Beispiel einer Punktmenge an, bei der nur  $2/3$  der Punkte von einer Zuordnung überdeckt werden können. Drei Punkte dieser Punktmenge liegen auf den Ecken eines achsenparallelen Hilfsrechtecks und werden in Richtung der Diagonalen, die die Ecke ohne Punkt enthält, einmal wiederholt. Die entstehende Punktmenge mit 6 Elementen besitzt nur Zuordnungen die höchstens 4 der 6 Punkte überdecken.

Die Punktmenge aus Abbildung 3.8 kann beliebig oft wiederholt werden, wodurch Mengen mit  $6n$  Punkten gewonnen werden, bei denen höchstens  $4n$  Punkte durch eine Zuordnung überdeckt werden können. Dass eine bessere Zuordnung durch teilmengenübergreifende Zuordnungen erreicht werden kann, wird in Abbildung 3.9 gezeigt.

Man beachte, dass der Algorithmus MATCHLEXORDAPP in diesem Fall eine Optimale Lösung liefern würde.

3.5. EINE PUNKTEMENGE, FÜR DIE ES KEINE PERFEKTE ZUORDNUNG GIBT<sup>23</sup>



**Abbildung 3.7 :** Eine Punktemenge für die der Algorithmus MATCHLEXORD-APP nur die Hälfte der Punkte durch eine starke Zuordnung überdecken kann.

---

**Algorithm 2:** MATCHLEXORD-2D( $P$ )

---

**Eingabe:**  $P = \{p_1, \dots, p_{2n}\}$   
**Ausgabe:** Perfekte, starke Rechtecks-Zuordnung  
//Überprüfe Bedingung aus Lemma 3.2 in  $x$ -Richtung  
 $P \leftarrow \text{LexOrd}(P, x)$   
*schwach*  $\leftarrow$  falsch  
**für**  $i = 1$  **bis**  $2n - 1$ ,  $i$  ungerade **tue**  
    **wenn**  $x(p_i) = x(p_{i+1})$  **dann**  
        *leftinterval*  $\leftarrow [\min(y(p_{i-1}), y(p_i)), \max(y(p_{i-1}), y(p_i))]$   
        *rightinterval*  $\leftarrow [\min(y(p_{i+1}), y(p_{i+2})), \max(y(p_{i+1}), y(p_{i+2}))]$   
        **wenn**  $\text{leftinterval} \cap \text{rightinterval} \neq \emptyset$  **dann**  
            *schwach*  $\leftarrow$  wahr  
            abbruch  
    **wenn** *schwach* = falsch **dann**  
        **zurück** MATCHLEXORD( $P, x$ )  
        abbruch  
**sonst**  
    //Überprüfe Bedingung aus Lemma 3.2 in  $y$ -Richtung  
     $P \leftarrow \text{LexOrd}(P, y)$   
    *schwach* = falsch  
    **für**  $i = 1$  **bis**  $2n - 1$ ,  $i$  ungerade **tue**  
        **wenn**  $y(p_i) = x(p_{i+1})$  **dann**  
            *lowinterval*  $\leftarrow [\min(x(p_{i-1}), x(p_i)), \max(x(p_{i-1}), x(p_i))]$   
            *highinterval*  $\leftarrow [\min(x(p_{i+1}), x(p_{i+2})), \max(x(p_{i+1}), x(p_{i+2}))]$   
            **wenn**  $\text{lowinterval} \cap \text{highinterval} \neq \emptyset$  **dann**  
                *schwach*  $\leftarrow$  wahr  
                abbruch  
        **wenn** *schwach* = falsch **dann**  
            **zurück** MATCHLEXORD( $P, y$ )  
            abbruch  
    **sonst**  
        **zurück** „Bedingung nicht erfüllt“

---

3.5. EINE PUNKTEMENGE, FÜR DIE ES KEINE PERFEKTE ZUORDNUNG GIBT 25

---

**Function** PARTMATCH( $P, c$ )

---

**Eingabe** : lex. geordnete Punktmenge  $P = \{p_1, \dots, p_{2n}\}$ ,  $c \in \{x, y\}$

**Ausgabe**: Menge der Teilzuordnungen für  $H_i$ 's,  $V_j$ 's

```

1 hidx ← 1
2 vidx ← 1
  i ← 1
  solange i ≤ 2n - 1 tue
    | solange x(pi) = x(pi+1) tue
    |   | wenn hidx = i dann vidx ← i
    |   |   Hhidx ← Hhidx ∪ {pi}
    |   |   vidx ++
    |   |   i ++
    |   | solange x(pi) ≠ x(pi+1) tue
    |   |   | wenn vidx = i dann hidx ← i
    |   |   |   Vvidx ← Vvidx ∪ {pi}
    |   |   |   hidx ++
    |   |   |   i ++
15 wenn x(p2n) = x(p2n-1) dann
    | Vvidx ∪ {p2n}
  sonst
    | Hhidx ∪ {p2n}
  Lc ← ∅
  für alle S ∈ {Hi, Vj} tue
    | Lc ← Lc ∪ MATCHLEXORD(S, c)
  zurück Lc

```

---

---

**Algorithm 4:** MATCHLEXORDAPP

---

**Eingabe:**  $P = \{p_1, \dots, p_{2n}\}$   
**Ausgabe:** Starke Rechtecks-Zuordnung  $M$  mit  $|M| \geq 1/2|P|$   
//Überprüfe Bedingung aus Lemma 3.2 in  $x$ -Richtung

2  $P \leftarrow \text{LexOrd}(P, x)$   
*schwach*  $\leftarrow$  falsch

**für**  $i = 1$  **bis**  $2n - 1$ ,  $i$  ungerade **tue**

**wenn**  $x(p_i) = x(p_{i+1})$  **dann**  
    *leftinterval*  $\leftarrow [\min(y(p_{i-1}), y(p_i)), \max(y(p_{i-1}), y(p_i))]$   
    *rightinterval*  $\leftarrow [\min(y(p_{i+1}), y(p_{i+2})), \max(y(p_{i+1}), y(p_{i+2}))]$   
    **wenn**  $\text{leftinterval} \cap \text{rightinterval} \neq \emptyset$  **dann**  
        *schwach*  $\leftarrow$  wahr  
        abbruch

**wenn** *schwach* = falsch **dann**

12 | **zurück** MATCHLEXORD( $P, x$ )  
| abbruch

**sonst**

15 |  $L_x \leftarrow \text{partmatch}(P, x)$   
| //Überprüfe Bedingung aus Lemma 3.2 in  $y$ -Richtung

17  $P \leftarrow \text{LexOrd}(P, y)$   
*schwach* = falsch

**für**  $i = 1$  **bis**  $2n - 1$ ,  $i$  ungerade **tue**

**wenn**  $y(p_i) = x(p_{i+1})$  **dann**  
    *lowinterval*  $\leftarrow [\min(x(p_{i-1}), x(p_i)), \max(x(p_{i-1}), x(p_i))]$   
    *highinterval*  $\leftarrow [\min(x(p_{i+1}), x(p_{i+2})), \max(x(p_{i+1}), x(p_{i+2}))]$   
    **wenn**  $\text{lowinterval} \cap \text{highinterval} \neq \emptyset$  **dann**  
        *schwach*  $\leftarrow$  wahr  
        abbruch

**wenn** *schwach* = falsch **dann**

27 | **zurück** MATCHLEXORD( $P, x$ )  
| abbruch

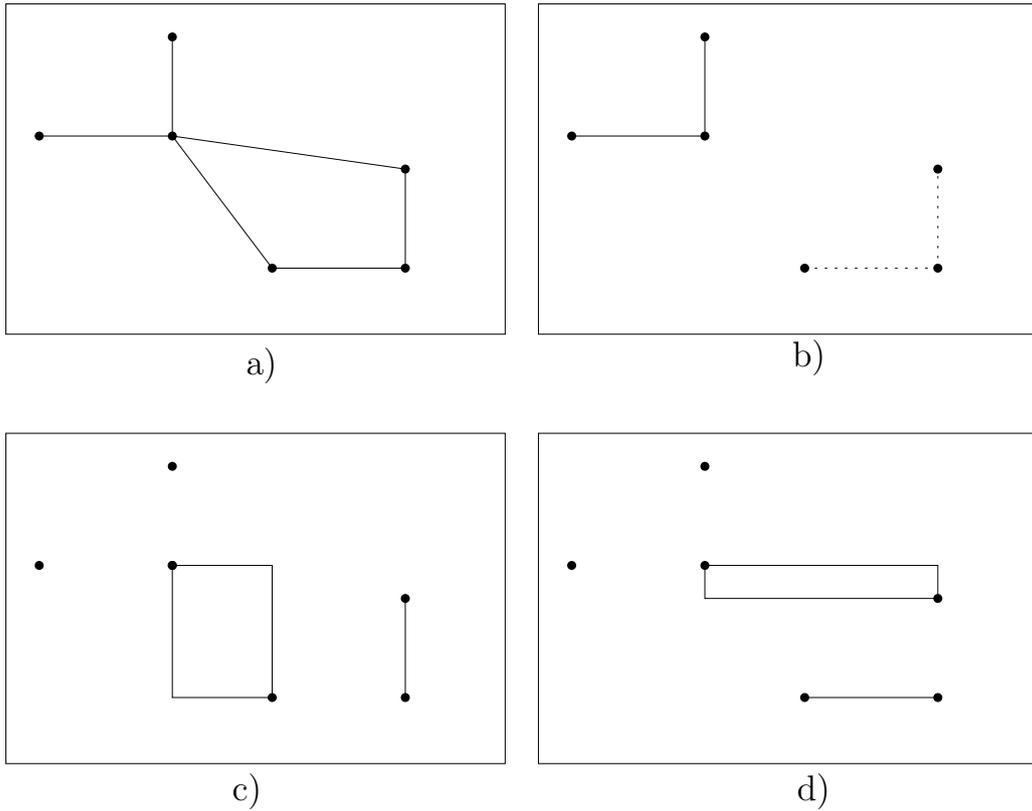
**sonst**

30 |  $L_y \leftarrow \text{partmatch}(P, y)$

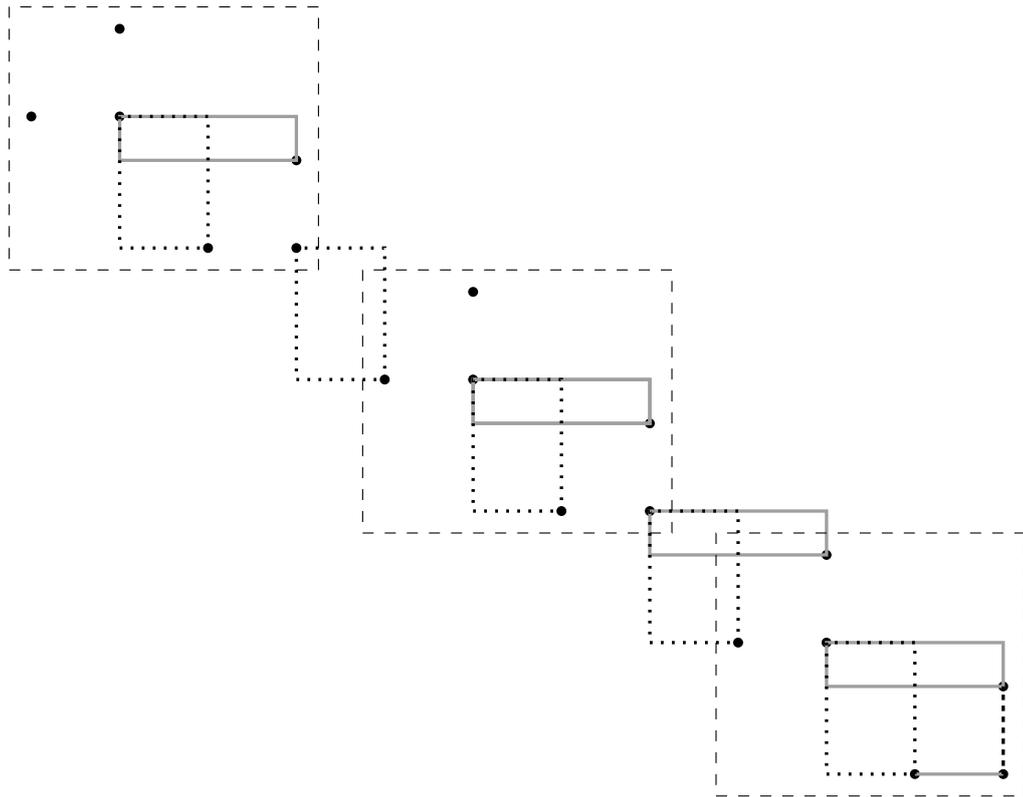
31 **zurück**  $\text{argmax}\{|L_x|, |L_y|\}$ 

---

3.5. EINE PUNKTEMENGE, FÜR DIE ES KEINE PERFЕКTE ZUORDNUNG GIBT<sup>27</sup>



**Abbildung 3.8** : Beispiel einer Punktmenge, bei der nur  $2/3$  der Punkte von einer Zuordnung überdeckt werden: a) der Zuordnungsgraph der Punktmenge, b) vier Kombinationen einer durchgezogenen und einer gestrichelten Linie ergeben jeweils eine Zuordnung, c) und d) die restlichen maximalen Zuordnungen für die Punktmenge. Jede dieser Zuordnungen überdeckt 4 der 6 Punkte.



**Abbildung 3.9** : Punktemenge mit  $6n$  (hier  $n = 3$ ) Punkten, für die jede Rechtecks-Zuordnung höchstens  $2/3$  der Punkte zuordnet. Die Kopien der Punktemenge werden durch gestrichelte Rechtecke hervorgehoben. Die zwei Arten von teilmengenübergreifende Zuordnungen sind grau bzw. punktiert dargestellt, und führen offensichtlich auch nicht zu Verbesserungen.

# Kapitel 4

## Zuordnung von Punkten mittels achsenparalleler Quadrate

In diesem Kapitel wird das Problem der Zuordnung von Punkten mittels achsenparalleler Quadrate (kurz: Quadrat-Zuordnung) untersucht. Das Entscheidungsproblem, ob eine gegebene Zuordnung von Punkten durch eine perfekte starke Quadrat-Zuordnung realisiert werden kann, wird im Abschnitt 4.1 analysiert. Im Abschnitt 4.2 wird ein Polynomialzeitalgorithmus zur Lösung dieses Entscheidungsproblems angegeben. Dieses Ergebnis kann auf ein Problem aus der Landkarten-Beschriftung übertragen werden, das in Kapitel 5 vorgestellt wird.

Die Klasse der achsenparalleler Quadrate wird mit  $\mathcal{Q}$  bezeichnet.

### 4.1 Das Entscheidungsproblem

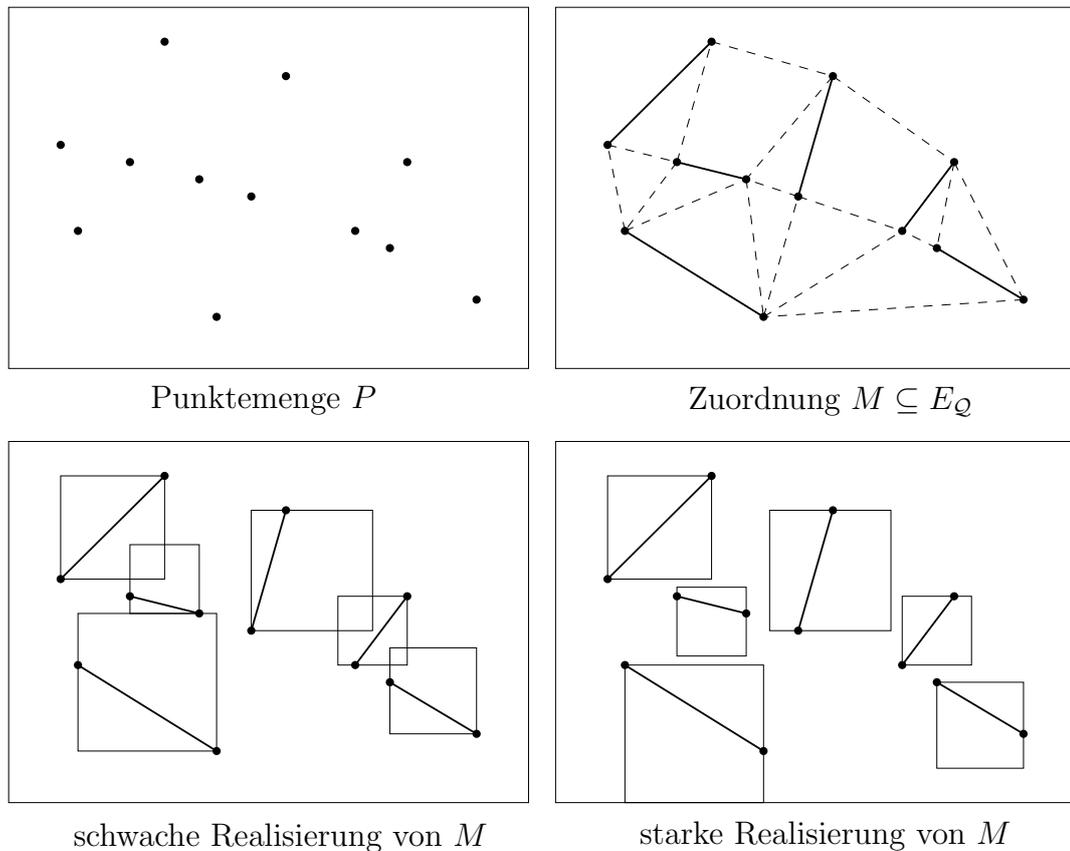
Wir betrachten folgendes Entscheidungsproblem (**Existiert Realisierung durch Quadrat-Zuordnung, ERQZ**)

Gegeben: Eine Menge  $P$  von  $2n$  Punkten in der Ebene und eine Zuordnung  $M = \{\{p, q\} \mid p \neq q \in P\}$ .

Gesucht: Kann  $M$  durch eine starke Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate realisiert werden? Gegebenenfalls soll eine solche Zuordnung angegeben werden.

Man beachte, dass durch  $M$  eine Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate noch nicht festgelegt ist. Abbildung 4.1 gibt eine Punktmenge an, eine perfekte Zuordnung in  $G_{\mathcal{Q}}$ , sowie eine starke und eine schwache Quadrat-Zuordnung, die  $M$  realisieren.

Interessanterweise stellt sich heraus, dass ein spezielles Problem aus dem Bereich der Beschriftung von Landkarten zur Lösung dieses Entscheidungsproblems herangezogen werden kann.



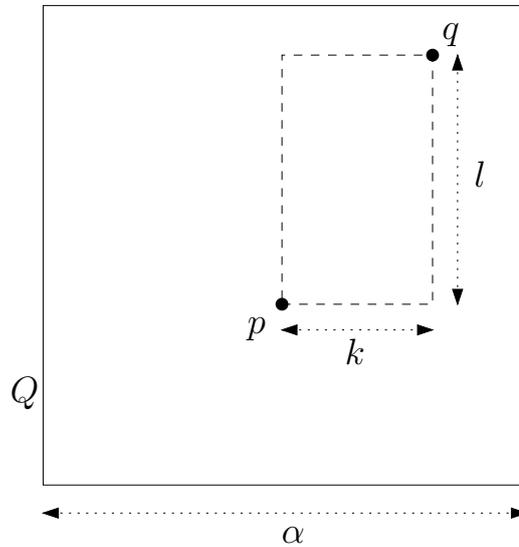
**Abbildung 4.1** : Beispiele von Quadrat-Zuordnungen: a) die gegebene Punktemenge, b) der Zuordnungsgraph in gestrichelten Linien und die gegebene Zuordnung  $M$  in durchgezogenen Linien, c) eine perfekte schwache Zuordnung und d) eine perfekte starke Zuordnung, die jeweils  $M$  realisieren.

### 4.1.1 Vorbereitende Überlegungen

In diesem Abschnitt wird das Problem ERQZ analysiert und das Modell der gleitenden Quadrate eingeführt.

**Lemma 4.1** *Gibt es für zwei Punkte  $p, q$  einer gegebenen Punktemenge  $P$  ein achsenparalleles Quadrat  $Q$ , das genau diese zwei Punkte enthält, so gibt es auch ein achsenparalleles Quadrat  $Q' \subseteq Q$ , so dass  $p, q \in \partial Q'$ .*

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, dass ein Quadrat das  $p$  und  $q$  enthält „schrumpfen“ kann, bis es beide Punkte an seinem Rand enthält. Dieses Quadrat kann nicht weiter schrumpfen, ohne die Punkte zu verlassen, und ist offensichtlich im großen Quadrat enthalten. In diesem Sinne ist das entstehende Quadrat minimal



**Abbildung 4.2 :** Wenn es ein Quadrat  $Q$  gibt, das genau die Punkte  $p, q$  enthält, so gibt es auch ein Quadrat  $Q'$ , das in  $Q$  enthalten ist und beide Punkte auf seinem Rand enthält.

unter allen Quadraten die  $p$  und  $q$  enthalten.  $\square$

**Definition 4.1** Seien  $p, q \in P$ ,  $p \neq q$  und  $Q \in \mathcal{Q}$  ein achsenparalleles Quadrat das  $p$  und  $q$  einander zuordnet.  $Q$  heißt minimal, wenn es die Seitenlänge  $\alpha := \min\{|x(p) - x(q)|, |y(p) - y(q)|\}$  hat. In diesem Fall liegen die Punkte  $p$  und  $q$  am Rand des Quadrats.

Man beachte, dass für die Klasse der achsenparallelen Quadrate  $\mathcal{Q}$ , im Gegensatz zur Klasse der achsenparallelen Rechtecke, ein minimales Quadrat nicht eindeutig festgelegt ist. Während ein minimales Rechteck die zwei Punkte auf gegenüberliegenden Ecken enthalten muss, kann ein Quadrat im Allgemeinen in Richtung der kleineren Koordinatendifferenz gleiten, ohne die Punkte zu verlassen.

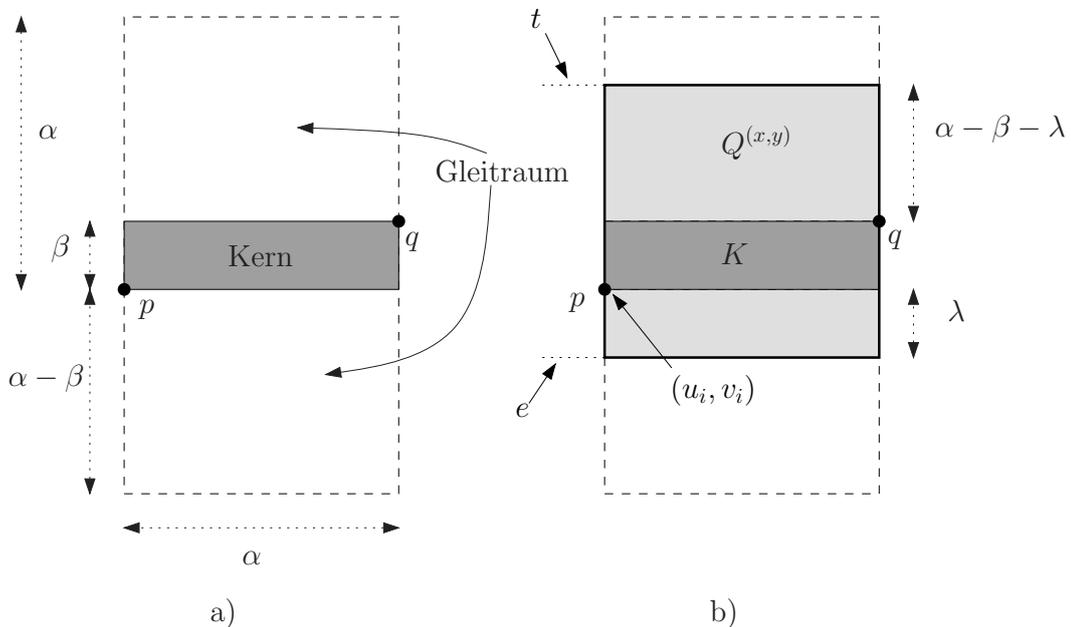
**Korollar 4.1** Für jede perfekte, starke Quadrat-Zuordnung  $M = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ , gibt es eine perfekte, starke Quadrat-Zuordnung  $M' = \{Q'_1, \dots, Q'_n\}$ , bei der alle Quadrate minimal sind und für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $Q'_i \subseteq Q_i$ .

Dieses Korollar hat zur Folge, dass es genügt, sich bei der Lösung des Entscheidungsproblems auf Quadrat-Zuordnungen mit minimalen Quadraten zu beschränken.

### 4.1.2 Das Modell der gleitenden Quadrate

Sei eine Quadrat-Zuordnung  $M = \{Q_1, \dots, Q_n\}$  gegeben und  $p, q$  zwei Punkte der Menge  $P$ , die einander durch ein Quadrat  $Q_i$  zugeordnet werden. Dadurch ist festgelegt, dass das achsenparallele Rechteck, das von  $p$  und  $q$  aufgespannt wird, in  $Q_i$  enthalten ist, unabhängig von der Lage des Quadrats  $Q_i$ . Weiterhin besagt Definition 4.1, dass ein minimales Quadrat die zwei Punkte auf seinem Rand enthält und die Seitenlänge  $\alpha$  hat.

Nach Korollar 4.1 genügt es zur Lösung des Entscheidungsproblems für zwei Punkte  $p$  und  $q$  alle minimale Quadrate zu betrachten (siehe Abbildung 4.3). Im Folgenden wird das achsenparallele Rechteck, das von zwei Punkten  $p_i$  und  $q_i$  aufgespannt wird, *der Kern*  $K_i$  des Quadrats  $Q_i$  genannt, das die Punkte  $p_i$  und  $q_i$  einander zuordnet. Eine Position, bei der das Quadrat die längere der zwei Seiten des Kerns berührt, wird *Extremalposition* genannt. Der Raum, der zur Ergänzung des Kerns zu einem Quadrat der Seitenlänge  $\alpha$  benötigt wird, wird im Folgenden als *Gleitraum*  $G_i$  bezeichnet. Man beachte, dass der Kern zu einer Strecke entarten kann, falls  $p_i$  und  $q_i$  eine gleiche Koordinate haben, und dass der Gleitraum verschwindet, wenn  $p_i$  und  $q_i$  auf der Diagonalen eines Quadrats liegen. Im Folgenden werden Punktepaare *vertikal* genannt, wenn der Kern höher als breit ist, sonst werden sie *horizontal* genannt.



**Abbildung 4.3 :** a) Das Modell der gleitenden Quadrate und b) eine der möglichen Platzierungen von  $Q$ .

### 4.1.3 Beschriftung von achsenparallelen Strecken

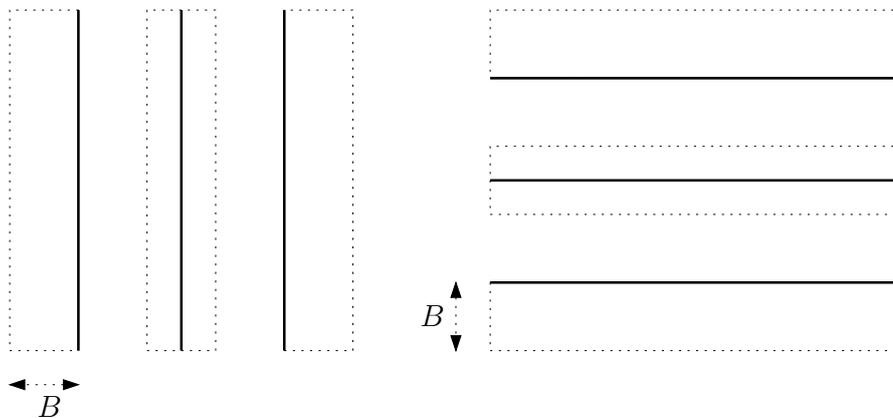
Es hat sich herausgestellt, dass ein Problem aus dem Bereich der Landkartenbeschriftung ein wertvolles Hilfsmittel zur Lösung des Entscheidungsproblems darstellt. Das Problem der Beschriftung von achsenparallelen Strecken (**E**xistiert **B**eschriftung von **A**chsenparallelen **S**trecken, EBAS) wird in diesem Abschnitt untersucht und mit dem Entscheidungsproblem ERQZ in Verbindung gebracht.

Das Problem EBAS ist wie folgt definiert:

Gegeben: Eine Menge  $S$  von  $n$  sich nicht überschneidenden achsenparallelen Strecken und eine Zahl  $B \in \mathbb{R}^+$ .

Gesucht: Jede Strecke kann durch ein achsenparalleles Rechteck beschriftet werden, das dieselbe Länge bzw. Höhe hat wie die Strecke und Höhe bzw. Breite  $B$ . Die Beschriftung muss an einer von 3 möglichen Positionen platziert werden (s. Abbildung 4.4). Gibt es eine gültige Beschriftung für  $P$ , d.h. eine Beschriftung, bei der sich keine zwei Beschriftungen überschneiden?

Die Platzierung einer Beschriftung wird dabei stets durch die Koordinaten der linken unteren Ecke angegeben. Im Folgenden bezeichne  $O^{(x,y)}$  mit  $O \in \mathcal{O}$  das Objekt  $O$  an der Position  $(x,y)$ .



**Abbildung 4.4** : Das Problem der Beschriftung von achsenparallelen Strecken mit drei möglichen Plazierungen der Beschriftung.

Poon et al. [PZC98] haben für dieses Problem einen Algorithmus mit Laufzeit  $O(n^2)$  vorgestellt. Dabei wurde das Entscheidungsproblem auf die Überprüfung der Erfüllbarkeit einer 2-SAT-Formel zurückgeführt. Stijk und van Kreveld [SvK99] haben die Laufzeit dieses Algorithmus auf  $O(n \log n)$  verbessert, indem sie die 2-SAT-Klauseln nur bei Bedarf berechnet haben. Poon et al. [PZC98] haben weiterhin gezeigt, dass dieses Problem auf  $m \geq 2$  äquidistante Plazierungen

für die Beschriftung verallgemeinert werden kann und haben eine Lösung vorgestellt, die wiederum durch eine Verbesserung von Strijk und van Kreveld [SvK99] zu einem Algorithmus mit der Laufzeit  $O(mn \log n)$  führte. Die Formulierung der 2-SAT-Formel wird im Abschnitt 4.2.1 erklärt.

Nach Kim et al. [KSY99] sind die Einschränkungen, dass die Anzahl der möglichen Platzierungen für jede Strecke gleich ist und dass die möglichen Platzierungen äquidistant innerhalb der zwei Extrempositionen liegen, unwesentlich für Korrektheit und Laufzeit des Algorithmus. Dies führt zum folgenden Lemma:

**Satz 4.1 ([KSY99])** *Sei eine Menge  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  von sich nicht überschneidenden achsenparallelen Strecken und  $B$  eine positive reelle Zahl. Für jedes  $s_i$  sei  $E_i$  die Menge aller möglichen Platzierungen der Beschriftung von  $p_i$  und  $k_{\max} := \max\{|E_1|, \dots, |E_n|\}$ . Dann ist das Problem, zu entscheiden, ob es für  $S$  eine gültige Beschriftung mit Rechtecken der Breite  $B$  gibt, in  $O(k_{\max} n \log n)$  lösbar.*

Dieses Ergebnis benutzen wir, um einen polynomiellen Entscheidungsalgorithmus anzugeben, der für eine kombinatorische Zuordnung überprüft, ob sie durch eine perfekte, starke Quadrat-Zuordnung realisiert werden kann.

Die Probleme EBAS und ERQZ weisen folgende Gemeinsamkeiten auf:

- In Beiden Problemen gibt es achsenparallele rechteckige Objekte, die innerhalb eines vordefinierten Bereiches verschiebbar sind.
- In Beiden Problemen kann ein Objekt höchstens in einer Richtung gleiten, horizontal oder vertikal.
- Eine Lösung für jedes der zwei Probleme besteht aus einer Menge von sich nicht überschneidenden Objekten.

Kim et al. [KSY99] haben eine Diskretisierung des Positionsraums der Objekte vorgenommen. Die Existenz einer Platzierung der Objekte so, dass sie sich nicht überschneiden, wurde anschließend auf die Erfüllbarkeit einer 2-SAT-Formel zurückgeführt, die effizient überprüft werden kann.

Diese Vorgehensweise kann auch für die Lösung des Problems ERQZ benutzt werden. Auf folgende Unterschiede zwischen den zwei Problemen ist dabei zu achten:

- In ERQZ befindet sich in der Mitte des Gleitraums ein Rechteck, wobei der Mittelpunkt des Gleitraums in EBAS eine Strecke ist. Eine Strecke kann als Kern betrachtet werden, der in einer Richtung keine Ausdehnung hat.

- In EBAS wird vorausgesetzt, dass die Strecken sich nicht überschneiden. Das muss für die Kerne im Problem ERQZ überprüft werden. Man beachte dass sich zwei Kerne  $K_i, K_j$  schneiden können, auch wenn  $\{p_i, q_i\}, \{p_j, q_j\} \in E_Q$  ist.
- In EBAS sind die gleitende Beschriftungen Rechtecke einer vorgegebenen Höhe, wobei die gleitende Objekte in ERQZ Quadrate verschiedener Seitenlängen sind.

Im folgenden Abschnitt wird die Vorgehensweise von Kim et al. [KSY99] angepasst und ein Polynomialzeitalgorithmus für die Lösung von ERQZ angegeben.

## 4.2 Ein Polynomialzeitalgorithmus zur Lösung des Problems ERQZ

In diesem Abschnitt wird ein Polynomialzeitalgorithmus zur Lösung des Problems ERQZ angegeben.

**Beobachtung 4.1** *Seien eine Menge  $P$  von  $2n$  Punkten in der Ebene und eine kombinatorische Zuordnung  $M = \{\{p_i, q_i\} \mid p_i, q_i \in P\}$  gegeben. Falls es  $1 \leq i < j \leq n$  gibt so dass  $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ , dann gibt es keine starke Quadrat-Zuordnung, die  $M$  realisiert.*

Diese Beobachtung liefert eine notwendige Bedingung für die Existenz einer starken Quadrat-Zuordnung, die die gegebene kombinatorische Zuordnung realisiert. Bei der Lösung des Entscheidungsproblems kann das in  $O(n \log n)$  Zeit durch den Algorithmus von Edelsbrunner (siehe [PS85], Seite 359) als Abbruchbedingung überprüft werden. Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass für alle  $1 \leq i < j \leq n$  gilt  $K_i \cap K_j = \emptyset$ .

Als nächstes müssen für alle Punktepaare aus den möglichen Platzierungen des kleinsten Quadrats durch die die zwei Punkte einander zugeordnet werden, diejenigen errechnet werden, die für eine starke Zuordnung relevant sind. Dadurch wird der kontinuierliche Positionsraum diskretisiert, und die Formulierung einer 2-SAT-Formel vorbereitet (siehe Abschnitt 4.2.1).

**Bemerkung 4.1** Im Folgenden wird die Definition der Quadrat-Zuordnung relaxiert, indem zugelassen wird, dass das Quadrat  $Q_i$ , das zur Zuordnung des Punktepaars  $\{p_i, q_i\}$  benutzt wird, weitere Punkte auf seinem Rand enthalten kann.

Diese Relaxierung der Definition der Quadrat-Zuordnung hat zur Folge, dass sich zwei Quadrate am Rand berühren dürfen, selbst wenn ein Punkt auf der

Strecke liegt, an der sich die zwei Quadrate berühren. Man beachte, dass die Relaxierung der Definition der Quadrat-Zuordnung keinen Einfluss auf die Anwendung auf das Problem der Landkartenbeschriftung hat (siehe Kapitel 5).

**Definition 4.2** *Zwei Punktepaare  $\{p_i, q_i\}, \{p_j, q_j\}$  interagieren, wenn sich ihre Gleiträume schneiden, d.h. wenn  $G_i \cap G_j \neq \emptyset$ .*

Die Menge der Paare von interagierenden Punktepaare kann in  $O(n \log n)$  Zeit durch eine Modifikation der Trapez-Zerlegung (siehe [PS85]) berechnet werden. Es gibt nur  $O(n)$  Paare von interagierenden horizontalen Punktepaaren.

**Definition 4.3** *Zwei horizontale (vertikale) Punktepaare  $\{p_i, q_i\}, \{p_j, q_j\}$  sind sichtbar, wenn es eine vertikale (horizontale) Strecke gibt, die die Kerne  $K_i$  und  $K_j$  und keinen weiteren Kern schneidet.*

Sichtbare Punktepaare können sich bei der Platzierung ihrer Quadrate direkt oder indirekt beeinflussen, was zur folgenden Definition führt:

**Definition 4.4** *Seien zwei horizontale Punktepaare  $\{p_i, q_i\}, \{p_j, q_j\}$  mit  $i < j$  gegeben und liege das Punktepaar  $\{p_i, q_i\}$  tiefer als  $\{p_j, q_j\}$ , d.h.  $\max\{y(p_i), y(q_i)\} \leq \min\{y(p_j), y(q_j)\}$ . Weiterhin sei  $Q_i^{(x,y)}$  eine mögliche Platzierung des Quadrats  $Q_i$ . Das Punktepaar  $\{p_i, q_i\}$  verursacht eine Position  $Q_j^{(x',y')}$  des Quadrats  $Q_j$ , wenn es eine Folge  $\{p_i, q_i\}, \dots, \{p_j, q_j\}$  von Punktepaaren und eine Folge von reellen Zahlen  $z_i, \dots, z_j$  gibt, die folgende Bedingungen erfüllen:*

- $z_i = y_i$  und  $z_j = y_j$ ,
- je zwei aufeinanderfolgende Punktepaare sind sichtbar,
- $z_k = z_{k-1} + \alpha_{k-1}$  für  $k = i + 1, \dots, j$

Für vertikale Punktepaare gilt eine analoge Definition; dabei werden die Rollen von  $x$ - und  $y$ -Koordinaten vertauscht.

Im Folgenden wird der Algorithmus CALCRELPOS zur Berechnung der relevanten Positionen jedes Quadrates beschrieben. Die relevanten Positionen der horizontal und der vertikal gleitenden Quadraten werden getrennt berechnet. Die zwei entsprechenden Teile des Algorithmus werden CALCRELPOSHORIZ bzw. CALCRELPOSVERT genannt.

Für die Berechnung der relevanten Positionen der vertikal gleitenden Quadrate in Algorithmus 5 werden die Punktepaare aufsteigend nach der  $y$ -Koordinate der oberen Kante der Kerne sortiert. Sei  $\{p_1, q_1\}, \dots, \{p_n, q_n\}$  die geordnete Liste. Für jeden Kern  $K_i$  bezeichne  $u_i$  die  $y$ -Koordinate der unteren Kante des

Kerns  $K_i$  und  $v_i$  die  $x$ -Koordinate der linken Kante des Kerns  $K_i$  (siehe Abbildung 4.3). Sei  $E_i$  die Menge der möglichen Positionen von  $Q_i$ , die aus Tripeln besteht, in deren erster Komponente die  $y$ -Koordinate von  $Q_i$  falls  $\{p_i, q_i\}$  horizontal ist bzw. die  $x$ -Koordinate von  $Q_i$  falls  $\{p_i, q_i\}$  vertikal ist. In der zweiten Komponente steht der Index des Punktpaares, das diese Position als mögliche Platzierung für  $Q_i$  verursacht. In der dritten Komponente steht die Position des verursachenden Punktpaares. Dabei bedeutet eine 0 in der zweiten Komponente, dass diese Position eine Extremposition für  $Q_i$  ist und nicht durch ein anderes Punktpaar hervorgerufen wurde. Die Position des Quadrats eines Punktpaares, das die andere Orientierung hat, ist für die Interaktion nicht relevant und wird daher auf  $-1$  gesetzt.

Für den  $i$ -ten horizontalen Kern seien  $(u_i, v_i)$  die Koordinaten der linken unteren Ecke (siehe Abbildung 4.3),  $\alpha_i$  die Länge der längeren Seite des Kerns und  $\beta_i$  die Länge der kürzeren Seite des Kerns. Für ein Quadrat an der Position mit  $e_j$  sei  $t_j$  die  $y$ -Koordinate der oberen Kante, d.h.  $t_j = e_j + \alpha_j$ .

---

**Algorithm 5:** Algorithmus CALCRELPOSHORIZ
 

---

**Eingabe :** Nach  $y$ -Koord. sortierte Folge von Kernen  $K_i$   
**Ausgabe:** Mengen  $E_i$  für alle horiz. Kerne  
**für**  $i \leftarrow 1$  **bis**  $n$  **tue**

3	<b>wenn</b> $K_i$ horizontal <b>dann</b> $E_i \leftarrow \{(v_i - \alpha_i + \beta_i, 0, -1)\}$ // Extremposition
5	<b>für</b> $j < i$ , $K_j$ vertikal, $K_i$ und $K_j$ interagieren <b>tue</b> $E_i \leftarrow E_i \cup \{(t_j, j, -1)\}$ // obere Kante vertikalen Kerns $T \leftarrow \emptyset$
11	<b>für</b> $j \leftarrow 1$ <b>bis</b> $i$ <b>tue</b> <b>wenn</b> $K_i$ horizontal, $K_i$ und $K_j$ interagieren <b>dann</b> <b>für alle</b> $(e_j, k, k_{\text{pos}}) \in E_j$ <b>tue</b> <b>wenn</b> $t_j \geq u_i - \alpha_i + \beta_i$ <b>dann</b> $T \leftarrow T \cup \{(t_j, k, k_{\text{pos}})\}$
15	<b>für</b> $k \leftarrow 1$ <b>bis</b> $i$ <b>tue</b> <b>wenn</b> es gibt $(t, k, k_{\text{pos}}) \in T$ <b>dann</b> Sei $(t^*, k, k_{\text{pos}})$ mit $t^*$ maximal $E_i \leftarrow E_i \cup \{(t, k, k_{\text{pos}})\}$

---

In Zeile 3 im Algorithmus 5 wird die untere Extremposition von  $Q_i$  in die Menge der möglichen Positionen aufgenommen.

In Zeile 5 im Algorithmus 5 wird jedes vertikale Punktpaar, das unterhalb von  $\{p_i, q_i\}$  liegt und mit  $\{p_i, q_i\}$  interagiert, untersucht. Die  $y$ -Koordinate der oberen

Kante des Kerns des vertikalen Punktepaars wird als mögliche  $y$ -Koordinate der Position des Quadrats  $Q_i$  aufgenommen.

In Zeile 11 im Algorithmus 5 werden die horizontalen Punktepaare untersucht, die unterhalb von  $\{p_i, q_i\}$  liegen und mit  $\{p_i, q_i\}$  interagieren. Zunächst wird für jedes solches Punktepaar und jede mögliche Platzierung seines Quadrats die  $y$ -Koordinate der oberen Kante des Quadrats in die Menge  $T$  aufgenommen. Anschließend wird bei allen Platzierungen von Quadraten unterhalb von  $\{p_i, q_i\}$ , die von einem einzigen Punktepaar *gleichzeitig* verursacht werden können, die  $y$ -Koordinate der oberen Kante des Quadrats beibehalten, das am meisten in den Gleitraum von  $\{p_i, q_i\}$  eindringt. Dieser Schritt wird in Abbildung 4.5 an einem Beispiel illustriert. Man beachte, dass die Menge  $T$  einen Speicherbedarf von  $O(n^2)$  hat.

Es ist leicht zu sehen, dass dieselben Überlegungen zu einem Verfahren für die Berechnung der Mengen  $E_i$  für die vertikalen Punktepaare führen. Dazu müssen die Rollen der vertikalen und horizontalen Punktepaare vertauscht werden. Die daraus entstehende Liste wird aufsteigend nach  $x$ -Koordinate sortiert, d.h. die Mengen vom Typ  $E_i$  der weiter links vorkommenden vertikalen Punktepaare werden als erstes berechnet.

Nach der Berechnung der möglichen Positionen für jedes Quadrat kann die Existenz einer perfekten starken Quadrat-Zuordnung in  $O(k_{\max} n \log n)$  Zeit (siehe Lemma 4.1) berechnet werden, wobei  $k_{\max} := \max\{|E_i|, 1 \leq i \leq n\}$ .

### 4.2.1 Die 2-SAT-Technik

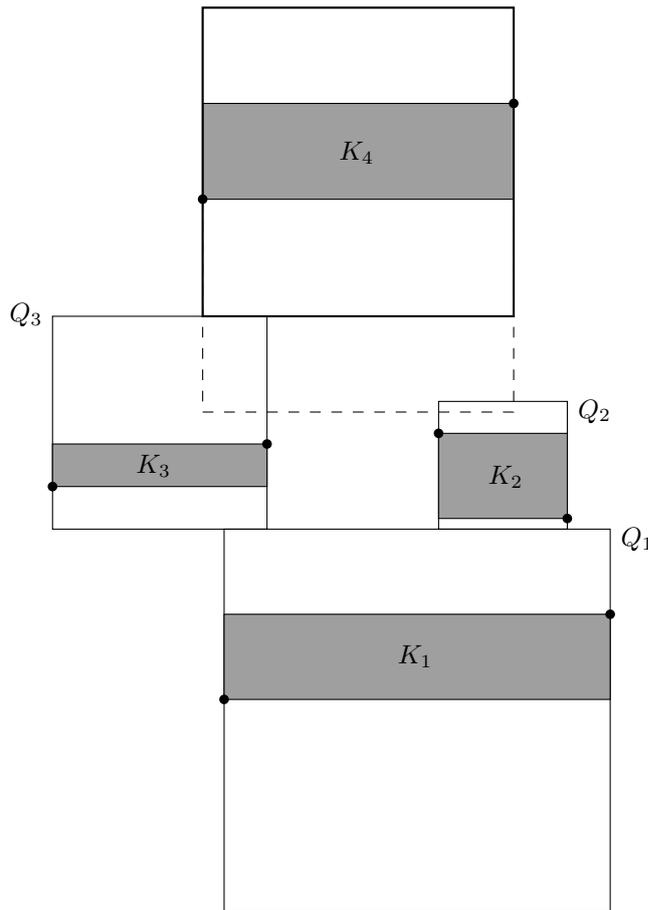
Poon et al. [PZC98] haben die Existenz einer gültigen Beschriftung für eine Menge von achsenparallelen Strecken auf die Erfüllbarkeit einer 2-SAT-Formel zurückgeführt. Dieselbe Überlegung kann benutzt werden, um das Problem der Existenz einer starken Quadrat-Zuordnung zur Realisierung einer gegebenen kombinatorischen Zuordnung zu lösen.

Dazu werden zwei Arten von 2-SAT-Klauseln benötigt:

1. Klauseln die erzwingen, dass das Quadrat an einer seiner vordefinierten möglichen Positionen platziert wird.
2. Klauseln die Überschneidungen von Quadraten unterbinden.

Eine Formel für die möglichen Positionen eines Quadrats ist in Abbildung 4.6 gegeben.

Die Projektion der Quadrate auf den Gleitraum teilt diesen in die Bereiche  $r_1, r_2, r_3, r'_1, r'_2$  und  $r'_3$  auf. Die Position eines Quadrats kann durch die Überdeckung und Nicht-Überdeckung für jeden dieser Bereiche angegeben werden.



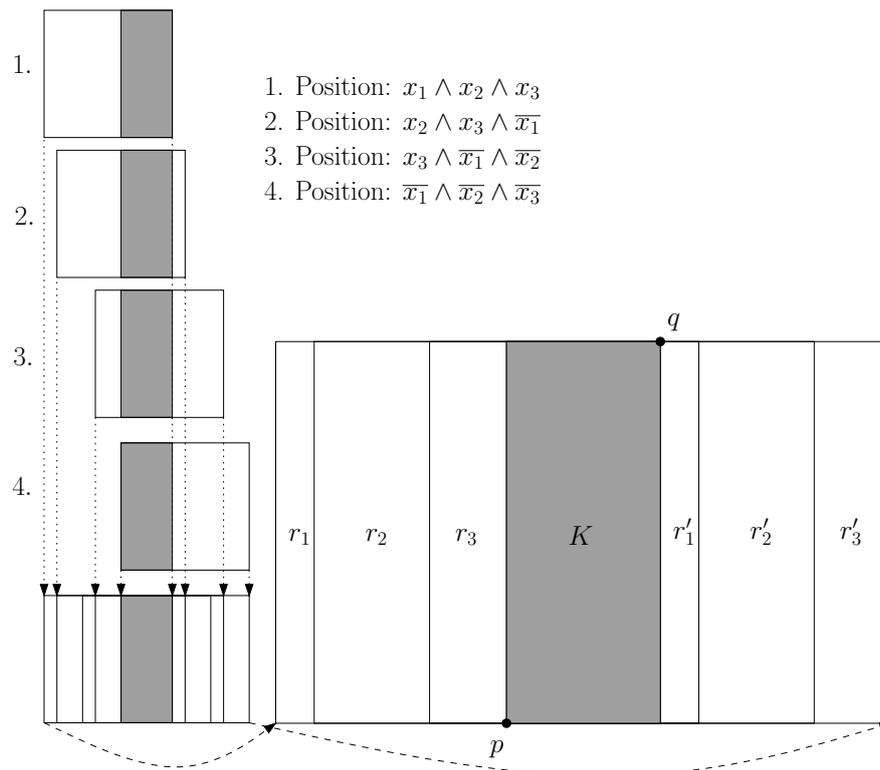
**Abbildung 4.5 :** Bei der Berechnung von  $E_4$  wird die  $y$ -Koordinate der oberen Kante von  $Q_2$  nicht beachtet, da die Position von  $Q_1$  gleichzeitig eine Position von  $Q_3$  verursacht, bei der die obere Kante von  $Q_3$  weiter in den Gleitraum  $G_4$  hineindringt.

Zum Beispiel entspricht die zweite Position der Überdeckung von  $r_2, r_3$  und  $r'_1$  und der Nicht-Überdeckung von  $r_1, r'_2$  und  $r'_3$ . Für  $r_i$  und  $r'_i$  kann eine boolesche Variable  $x_i$  eingeführt werden, die den Wahrheitswert *wahr* annimmt, wenn  $r_i$  überdeckt wird und den Wahrheitswert *falsch*, wenn  $r'_i$  überdeckt wird. Eine gleichzeitige Belegung von  $r_i$  und  $r'_i$  ist ausgeschlossen, da diese zwei Bereiche Abstand  $\alpha$  von einander haben, wobei  $\alpha$  die Seitenlänge des Quadrats ist. Man beachte, dass der Kern  $K$  per Definition von jedem Quadrat überdeckt wird.

Damit ergibt sich folgende Formel für die gültige Platzierung des Quadrats:

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_3 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$$

Es ist zu zeigen, dass diese Formel in eine 2-SAT Formel überführt werden kann.



**Abbildung 4.6** : Beispiel für die Formulierung der verschiedenen Platzierungen eines Quadrats durch eine 2-SAT-Klausel.

Die Bereiche  $r_1$  und  $r'_3$  aus Abbildung 4.6 liegen an den Rändern des Gleitraums, und können bei einer Platzierung des Quadrats nur dann belegt werden, wenn auch die zwei nächstliegenden Bereiche belegt werden. Das kann durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$\overline{(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_3 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_3 \wedge x_1)}$$

Durch Anwenden der Regeln der booleschen Algebra kann diese Formel in folgender 2-SAT Formel überführt werden:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_1)$$

Das Ergebnis kann durch eine Wahrheitstabelle überprüft werden:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

An dieser Tabelle und an Abbildung 4.6 erkennt man, dass die 2-SAT Formel genau dann erfüllt ist, wenn eine der vier möglichen Positionen des Quadrats angenommen wird.

Analog können auch für  $k > 4$  mögliche Positionen eines Quadrats die Klauseln vom 1. Typ in eine 2-SAT-Form überführt werden.

Die Formeln vom 2. Typ sorgen dafür, dass bei Erfüllbarkeit der 2-SAT-Formel keine Überschneidungen der Quadrate auftauchen. Ähnlich kann auch das Verhindern von Überschneidungen durch eine 2-SAT Formel ausgedrückt werden. Schneiden sich die Bereiche  $r_{i3}$  und  $r'_{j7}$  der Gleiträume der Kerne  $G_i$  und  $G_j$ , so wird die Klausel  $\overline{x_{i3}} \wedge \overline{x_{j7}}$  in der äquivalenten Form  $\overline{x_{i3}} \vee x_{j7}$  zur 2-SAT Formel konjugiert.

Insgesamt ist die 2-SAT Formel genau dann erfüllbar, wenn die Quadrate in eine ihrer vordefinierten Positionen platziert werden können, so dass sie sich nicht überschneiden.

### 4.2.2 Korrektheit

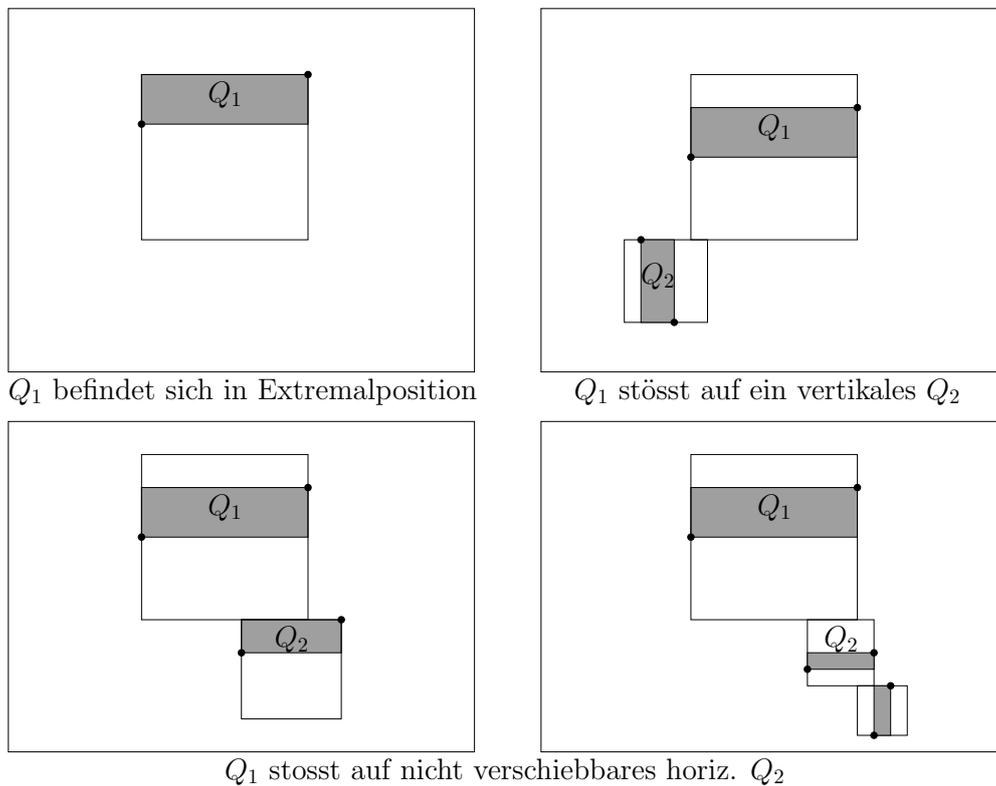
Zu zeigen ist, dass die im Abschnitt 4.2.1 beschriebene 2-SAT-Formel genau dann erfüllbar ist, wenn es tatsächlich eine starke Quadrat-Zuordnung gibt, die die gegebene kombinatorische Zuordnung realisiert.

Sei  $M = \{Q_1, \dots, Q_n\}$  ein „Zeuge“ für die Existenz einer perfekten, starken Quadrat-Zuordnung. Man verschiebe die Quadrate der vertikalen Punktepaare so weit nach links wie möglich. Anschließend werden die Quadrate der horizontalen Punktepaare so weit nach unten wie möglich verschoben. Bei diesen Verschiebungen wird die Eigenschaft der Quadrat-Zuordnung stark zu sein, nicht verändert, da die Quadrate nicht weiter verschoben werden, wenn sie ein Hindernis erreichen.

Ein Quadrat  $Q_1$  eines horizontalen Punktepaars kann aus folgenden Gründen nicht weiter nach links verschoben werden:

- (a) Es befindet sich in seiner Extremalposition.
- (b) Es stößt auf ein Quadrat  $Q_2$  eines vertikalen Punktepaars.
- (c) Es stößt auf ein Quadrat  $Q_3$  eines horizontalen Punktepaars, das nicht weiter nach links verschoben werden kann.

Abbildung 4.7 zeigt Beispiele für diese drei Situationen.



**Abbildung 4.7 :** Hindernisse bei der Verschiebung eines horizontal gleitenden Quadrats ( $Q_1$ ).

Die Position eines nicht weiter nach unten verschiebbaren Quadrats eines horizontalen Punktepaars wurde von dem Algorithmus 5 während der Berechnung von  $E_i$  berücksichtigt:

1. Die Extremalposition von  $Q_i$  wurde in Zeile 3 berücksichtigt.
2. Falls  $Q_i$  auf ein Quadrat eines vertikalen Punktepaars stößt, befindet es sich in einer Position, die in Zeile 5 berücksichtigt wurde. Dasselbe gilt, falls das Quadrat auf den Kern eines vertikalen Punktepaars stößt.

3. Falls  $Q_i$  auf den Kern eines horizontalen Punktepaars stößt, wurde dies in Zeile 11 berücksichtigt und in Zeile 15 als Maximum beibehalten. Falls  $Q_i$  auf ein Quadrat eines horizontalen Punktepaars stößt, das nicht weiter verschiebbar ist, so ist die Position des Hindernisses die maximale Position der oberen Kante aller Quadrate eines gemeinsamen Verursachers, die ihrerseits in Zeile 15 beibehalten wurde.

Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass auch die Position eines Quadrats eines vertikalen Punktepaars, das nicht weiter nach links verschoben werden kann, von Algorithmus CALCRELPOSVERT berücksichtigt wurde.

**Satz 4.2** *Sei  $P$  eine Menge von  $2n$  Punkten in der Ebene,  $M$  eine kombinatorische Zuordnung und  $Z$  eine starke Quadrat-Zuordnung, die  $M$  realisiert. Weiterhin sei  $Z'$  die starke Quadrat-Zuordnung, die entsteht, wenn alle Quadrate so weit nach links und so weit nach unten verschoben werden wie möglich. Dann gilt nach Ausführung des Algorithmus' CALCRELPOS: Für jedes  $Q_i^{(x,y)}$  in  $Z'$  ist die Position  $(x, y)$  in  $E_i$  enthalten.*

Man beachte, dass die Interaktion zwischen horizontaler und vertikaler Punktepaare nicht dazu führen kann, dass Positionen entstehen, die vom Algorithmus CALCRELPOS nicht berücksichtigt wurden. Dies wird dadurch sichergestellt, dass, bei Interaktion zwischen zwei Punktepaaren verschiedener Orientierungen, nicht überprüft wird für welche Positionen des potenziellen Hindernisses es tatsächlich zu Berührungen kommen kann. Sobald sich die Gleiträume überschneiden, wird die entsprechende Koordinate in die Menge der möglichen Positionen aufgenommen.

Da dies sowohl im Teil CALCRELPOSHORIZ als auch in CALCRELPOSVERT des Algorithmus passiert, ist es auch nicht entscheidend, ob zuerst nach links oder nach unten verschoben wird.

### 4.2.3 Laufzeitanalyse

Die Überprüfung der Überschneidung der Kerne kann durch den Algorithmus von Edelsbrunner (siehe [PS85], Seite 359) in  $O(n \log n)$  durchgeführt werden. Das Sortieren der Punktepaare nach  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinate der oberen bzw. rechten Kante ihres Kerns kann jeweils in  $O(n \log n)$  Zeit durchgeführt werden.

Die Berechnung der Paare von interagierenden Punktepaaren kann mit einer Modifikation der Trapez-Zerlegung in  $O(n \log n)$  Zeit durchgeführt werden. Diese Relation kann in einem „Interaktionsgraphen“ gespeichert werden, in dem Knoten Punktepaare darstellen und zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die Punktepaare interagieren.

Jedes Quadrat  $Q_i$  hat mindestens eine mögliche Platzierung für die Zuordnung der Punkte  $p_i, q_i$ , nämlich die untere bzw. linke Extremalposition.

Weiterhin kann jedes Punktepaar  $\{p_j, q_j\}$  mit  $j < i$ , das eine andere Orientierung hat als  $\{p_i, q_i\}$  und mit  $\{p_i, q_i\}$  interagiert höchstens ein neues Element zu  $E_i$  beitragen. Es gibt  $O(n)$  solche Punktepaare, und für jedes kann in konstanter Zeit ermittelt werden, ob es ein Element zu  $E_i$  beiträgt (siehe Algorithmus 5).

Jedes Punktepaar  $\{p_j, q_j\}$  mit  $j < i$  das dieselbe Orientierung hat wie  $\{p_i, q_i\}$  und mit  $\{p_i, q_i\}$  interagiert kann ebenfalls, wegen Zeile 11 im Algorithmus 5, höchstens ein neues Element zu  $E_i$  beitragen. Es gibt  $O(n)$  solche Punktepaare und für jedes kann das in  $O(n)$  Zeit ermittelt werden. Da für jedes Punktepaar  $\{p_i, q_i\}$ , jedes andere Punktepaar höchstens ein Element zu  $E_i$  beitragen kann, ist  $|E_i| = O(n)$ . Damit kann die Existenz einer perfekten, starken Quadrat-Zuordnung mit Hilfe von Lemma 4.1 in  $O(n^2 \log n)$  Zeit überprüft werden.

# Kapitel 5

## Anwendung auf Probleme der Landkartenbeschriftung

Es hat sich herausgestellt, dass der Polynomialzeitalgorithmus zur Lösung des Entscheidungsproblems aus Abschnitt 4.2 dazu benutzt werden kann, um Probleme aus dem Bereich der Landkartenbeschriftung effizient zu lösen. Solche Probleme, sowie die Anpassung des Entscheidungsalgorithmus werden in diesem Kapitel beschrieben.

### 5.1 Beschriftung von achsenparallelen Strecken durch Quadrate

Das Problem EBASQ (**E**xistiert **B**eschriftung von **A**chsenparallelen **S**trecken mittels **Q**uadrate) ist wie folgt definiert.

Gegeben: Eine Menge  $S$  von achsenparallelen Strecken.

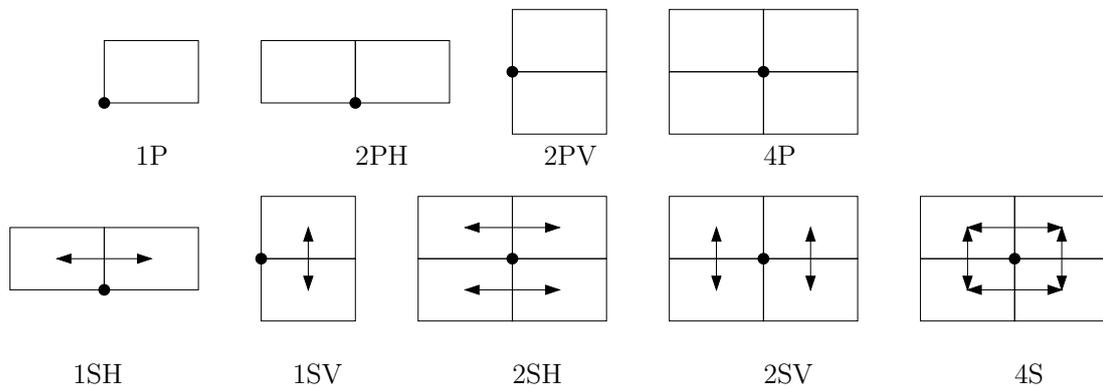
Gesucht: Eine gültige Beschriftung der Strecken durch achsenparallele Quadrate, die Seitenlänge gleich der Länge der jeweiligen Strecke haben, und die Strecke enthalten, falls eine solche Beschriftung existiert.

Im Problem der Zuordnung von Punkten mittels achsenparalleler Quadrate entartet ein horizontaler Kern zu einer Strecke, wenn die zwei Punkte, die durch das entsprechende Quadrat zugeordnet werden, die gleiche  $y$ -Koordinate haben. Analog entartet ein vertikaler Kern zu einer Strecke, wenn die beiden Punkte die gleiche  $x$ -Koordinate haben. Nach Abschnitt 4.1.2 hat ein minimales Quadrat durch das die beiden Punkte zugeordnet werden können die Seitenlänge  $\alpha - \beta = \alpha$ , was auch die Länge der zu beschriftenden Strecke ist. Das Problem der Beschriftung von achsenparallelen Strecken kann daher in das Problem der Zuordnung von Punkten mittels achsenparalleler Quadrate überführt werden, indem an den

Endpunkten jeder Strecke Punkte platziert werden die einander in der gegebenen kombinatorischen Zuordnung zugeordnet sind.

## 5.2 Beschriftung von Punkten

Verschiedene Varianten von Problemen der Beschriftung von Punkten wurden schon untersucht. Poon et al. [PSS<sup>+</sup>03] fassen verschiedene Modelle für die Beschriftung von Punkten in Zeichnung 5.1 zusammen.



**Abbildung 5.1 :** Verschiedene Modelle für die Beschriftung von Punkten.

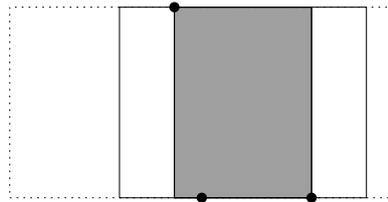
Jedes Modell hat eine Abkürzung der Form  $xMD$  wobei  $M \in \{P, S\}$  für das Modell mit fester ( $P$ ) bzw. gleitender ( $S$ ) Beschriftung steht,  $x \in \{1, 2, 4\}$  die Anzahl der festen Positionen bzw. die Anzahl der Gleitrichtungen angibt und  $D \in \{\emptyset, H, V\}$  die vertikale oder horizontale Richtung bezeichnet, in der die festen Beschriftungen angeordnet sind, bzw. die gleitende Beschriftungen gleiten können.

Eine Instanz der Probleme 1SH und 1SV mit quadratischen Beschriftungen kann, ähnlich wie eine Instanz des Problems der Beschriftung von achsenparallelen Strecken, in eine Instanz des Entscheidungsproblems überführt werden, indem ein weiterer Punkt an der gegenüberliegenden Seite der Beschriftung platziert und ein Kern daraus gebildet wird. Weiterhin können diese zwei Modelle kombiniert werden, und die Position der Beschriftung (d.h. über/unter dem Punkt bzw. rechts/links vom Punkt) variiert werden.

Auch die Seitenlänge des Quadrats zur Beschriftung von einem Punkt kann variieren. Die Seitenlänge der Beschriftung kann durch die Platzierung des zweiten Punktes festgelegt werden.

Der wesentliche Erweiterung dieser Arbeit ist, dass der Gleitraum der Beschriftung verkürzt werden kann. Dies kann dadurch erreicht werden, dass der Kern so gebildet wird, dass der zu beschriftende Punkt auf der kürzeren Seite des

Kerns liegt. Für eine vorgegebene Verkürzung des Gleitraums, muss der Kern so ausgedehnt werden, dass der verkürzte Gleitraum der Raum zwischen den zwei Extremalpositionen ist. Abbildung 5.2 illustriert diese Vorgehensweise an einem Beispiel.



**Abbildung 5.2 :** Asymmetrische Verkürzung des Gleitraums durch Bildung eines Kerns

Die Verkürzung des Gleitraums kann bei der Beschriftung von Punkten von praktischer Bedeutung sein. Zum Beispiel kann durch die Verkürzung des Gleitraums verhindert werden, dass eine Beschriftung einen wichtigen Teil der Landkarte, zum Beispiel den Verlauf eines Flusses, überdeckt. Weiterhin kann durch diese Methode verhindert werden, dass eine Beschriftung die Grenzen der Landkarte überschreitet.

Das allgemeinste Problem bei der Beschriftung von Punkten, das durch den Entscheidungsalgorithmus aus Abschnitt 4.2 gelöst werden kann ist folgendes:

**Problem:**

Gegeben: Eine Menge  $P = \{(x, y, d, p, l, s)\}$ , wobei  $(x, y)$  die Koordinaten des Punktes sind,  $d$  die Gleitrichtung (horizontal/vertikal),  $p$  die Position der Beschriftung relativ zum Punkt (links/rechts bzw. über/unter dem Punkt),  $l$  die Saitenlänge der Beschriftung und  $s \leq l/2$  die symmetrische Verkürzung des Gleitraums angibt.

Gesucht: Eine Beschriftung für  $P$ .

Man beachte, dass die Überführung einer Instanz dieses Problem auf eine Instanz des Entscheidungsproblems in  $O(n)$  durchgeführt werden kann.

**Bemerkung 5.1** Dieselben Methoden die für die Lösung des Problems ERQZ können angepasst werden um rechteckige gleitende Objekte zur Beschriftung von Punkten zu erlauben. Obwohl dieses Problem sich nicht auf eine Instanz von ERQZ überführen lässt, kann es mit denselben Methoden gelöst werden. Das liegt daran, dass es für die Formulierung der 2-SAT-Formel nicht entscheidend war, dass der Gleitraum aus zwei sich überschneidenden Quadraten besteht.



# Literaturverzeichnis

- [ÁAFM<sup>+</sup>05] ÁBREGO, B. M., E. M. ARKIN, SILVIA FERNÁNDEZ-MERCHANT, FERRAN HURTADO, MIKIO KANO, JOSEPH S. B. MITCHELL und JORGE URRUTIA: *Matching Points with Circles and Squares*. In: AKIYAMA, JIN, MIKIO KANO und XUEHOU TAN (Herausgeber): *Proc. 8th Japanese Conf. on Discrete and Computational Geometry (JCDCG'04)*, Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 2005. Erscheint in Bände. 7
- [Gab76] GABOW, H. N.: *An Efficient Implementation of Edmonds' Algorithm for Maximum Matching on Graphs*. J. ACM, 23(2):221–234, 1976.
- [Gab90] GABOW, H. N.: *Data structures for weighted matchings and nearest common ancestors with linking*. In: *Proceedings of the 1st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Seiten 434–443. ACM, 1990.
- [GIM<sup>+</sup>01] GARRIDO, M. Á., C. ITURRIAGA, A. MÁRQUEZ, J. R. PORTILLO, P. REYES und A. WOLFF: *Labeling Subway Lines*. In: EADES, PETER und TADAO TAKAOKA (Herausgeber): *Proc. 12th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'01)*, Band 2223 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 649–659, Christchurch, 19–21 Dezember 2001. Springer-Verlag.
- [GMG86] GALIL, Z., S. MICALI und H. GABOW: *An  $O(EV \log V)$  algorithm for finding a maximal weighted matching in general graphs*. SIAM J. Comput., 15(1):120–130, 1986. 5
- [HK73] HOPCROFT, J. und R. KARP: *An  $n^{5/2}$  algorithm for maximum matchings in bipartite graphs*. In: *SIAM J. Comput.*, Band 2, Seiten 225–23, 1973. 5
- [KSY99] KIM, S. K., C.-S. SHIN und T.-C. YANG: *Labeling a rectilinear map with sliding labels*. International Journal of Computational Geometry & Applications, 11(2):167–179, 1999. 34, 35

- [MV80] MICALI, S. und V. V. VAZIRANI: *An  $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$  algorithm for finding maximum matching in general graphs*. In: *Proceedings of the 21st Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, Seiten 17–27. IEEE, 1980. [5](#)
- [PS85] PREPARATA, F. P. und M. I. SHAMOS: *Computational Geometry – An introduction*. Springer-Verlag New York, 1985. [14](#), [35](#), [36](#), [43](#)
- [PSS<sup>+</sup>03] POON, S.-H., C.-S. S., T. STRIJK, T. UNO und A. WOLFF: *Labeling Points with Weights*. *Algorithmica*, 38(2):341–362, 2003. [46](#)
- [PZC98] POON, C. K., B. ZHU und F. CHIN: *A polynomial time solution for labeling a rectilinear map*. *Information Processing Letters*, 65(4):201–207, 1998. [33](#), [38](#)
- [RW93] RENDL, F. und G. WOEGINGER: *Reconstructing sets of orthogonal line segments in the plane*. *Discrete Mathematics*, 119, 1993. [7](#)
- [SvK99] STRIJK, T. und M. VAN KREVELD: *Labeling a rectilinear map more efficiently*. *Information Processing Letters*, 69(1):25–30, 1999. [33](#), [34](#)
- [VA99] VARADARAJAN, K. R. und P. K. AGARWAL: *Approximation algorithms for bipartite and non-bipartite matching in the plane*. In: *SODA '99: Proceedings of the tenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, Seiten 805–814, Philadelphia, PA, USA, 1999. Society for Industrial and Applied Mathematics. [6](#)
- [Vai88] VAIDYA, P.: *Geometry helps in matching*. In: *STOC '88: Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing*, Seiten 422–425, New York, NY, USA, 1988. ACM Press. [5](#)

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Definitionen einer starken und einer perfekten Zuordnung an einem Beispiel . . . . .	7
2.1	Beispiel einer Punktmenge die keine perfekte, starke Zuordnung mittels achsenparalleler Quadrate zulässt . . . . .	9
2.2	Beispiel eines Zuordnungsgraphen . . . . .	10
3.1	Reduzierung einer Rechteckszuordnung auf minimale Rechtecke . .	14
3.2	Der Algorithmus MATCHLEXORD angewandt auf eine Beispieldpunktmenge. . . . .	16
3.3	Beispiel einer Punktmenge für die MATCHLEXORD eine Lösung liefert, obwohl sie nicht in allgemeiner Lage ist. . . . .	17
3.4	Berechnung einer perfekten, starke Zuordnung nach Rotation . . .	18
3.5	Eine Punktmenge für die in einer Richtung nur die Hälfte der Punkte durch eine starken Rechtecks-Zuordnung überdeckt werden kann. . . . .	21
3.6	Der Algorithmus MATCHLEXORDAPP liefert im zweiten Teil eine perfekte, starke Zuordnung für die Punktmenge aus Abbildung 3.5. . . . .	22
3.7	Eine Punktmenge für die der Algorithmus MATCHLEXORDAPP nur die Hälfte der Punkte durch eine starke Zuordnung überdecken kann. . . . .	23
3.8	Beispiel einer Punktmenge, bei der nur 2/3 der Punkte von einer Zuordnung überdeckt werden . . . . .	27
3.9	Punktmenge mit $6n$ Punkten, für die eine Rechtecks-Zuordnung höchstens 2/3 der Punkte überdeckt. . . . .	28
4.1	Beispiele: perfekte starke und perfekte schwache Quadrat-Zuordnung	30

4.2	Wenn es ein Quadrat $Q$ gibt, das genau die Punkte $p, q$ enthält, so gibt es auch ein Quadrat $Q'$ , das in $Q$ enthalten ist und beide Punkte auf seinem Rand enthält. . . . .	31
4.3	Das Modell der gleitenden Quadrate . . . . .	32
4.4	Das Problem der Beschriftung von achsenparallelen Strecken mit drei möglichen Plazierungen der Beschriftung. . . . .	33
4.5	Bei der Berechnung von $E_4$ wird die $y$ -Koordinate der oberen Kante von $Q_2$ nicht beachtet, da die Position von $Q_1$ gleichzeitig eine Position von $Q_3$ verursacht, bei der die obere Kante von $Q_3$ weiter in den Gleitraum $G_4$ hineindringt. . . . .	39
4.6	Beispiel für die Formulierung der verschiedenen Platzierungen eines Quadrats durch eine 2-SAT-Klausel . . . . .	40
4.7	Hindernisse bei der Verschiebung eines horizontal gleitenden Quadrats ( $Q_1$ ). . . . .	42
5.1	Verschiedene Modelle für die Beschriftung von Punkten . . . . .	46
5.2	Asymmetrische Verkürzung des Gleitraums durch Bildung eines Kerns . . . . .	47