

# Übung Algorithmische Geometrie

## Delauney Triangulierung

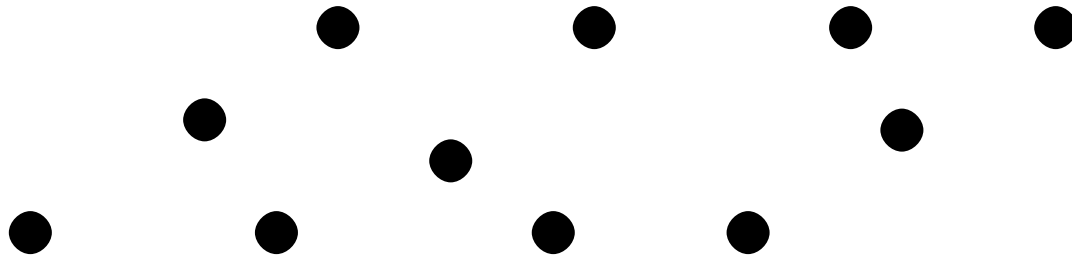
LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann  
18.06.2014



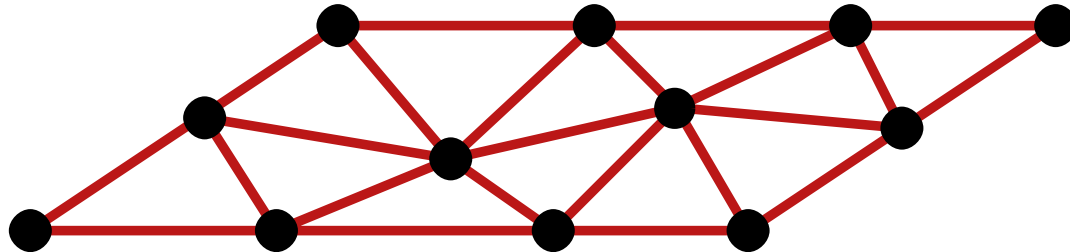
# Triangulierung von Punkten

**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



# Triangulierung von Punkten

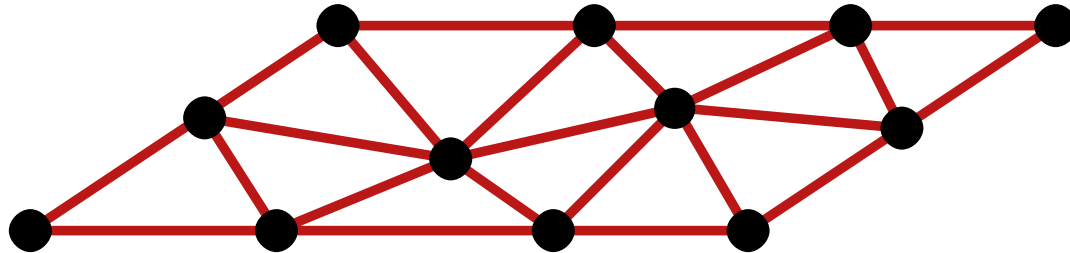
**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



**Beob.:**

# Triangulierung von Punkten

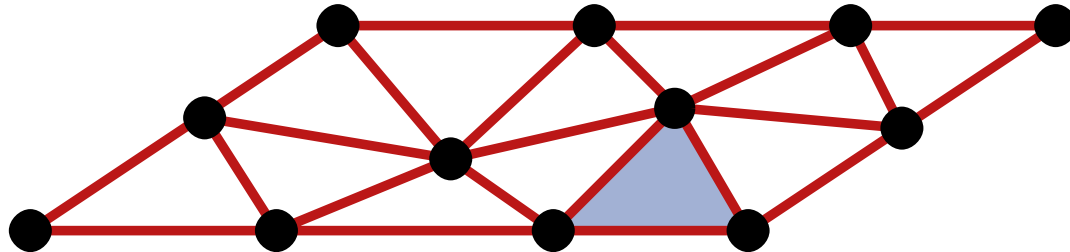
**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



**Beob.:** ■ alle inneren Facetten sind Dreiecke

# Triangulierung von Punkten

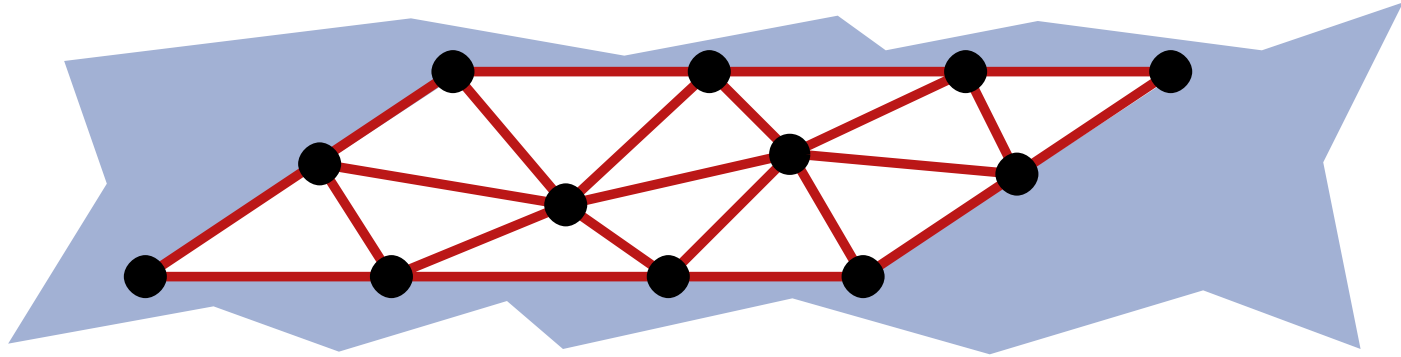
**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



**Beob.:** ■ alle inneren Facetten sind Dreiecke

# Triangulierung von Punkten

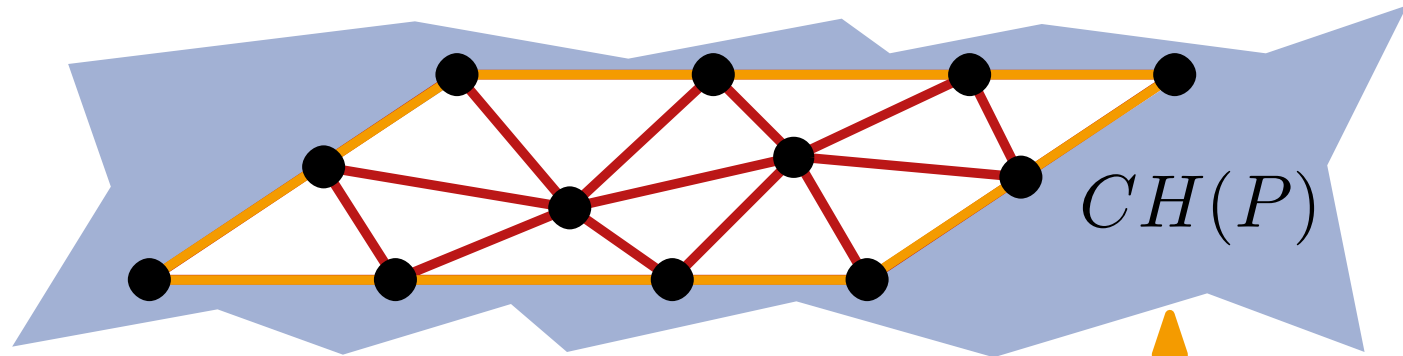
**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



- Beob.:**
- alle inneren Facetten sind Dreiecke
  - äußere Facette ist Komplement der konvexen Hülle

# Triangulierung von Punkten

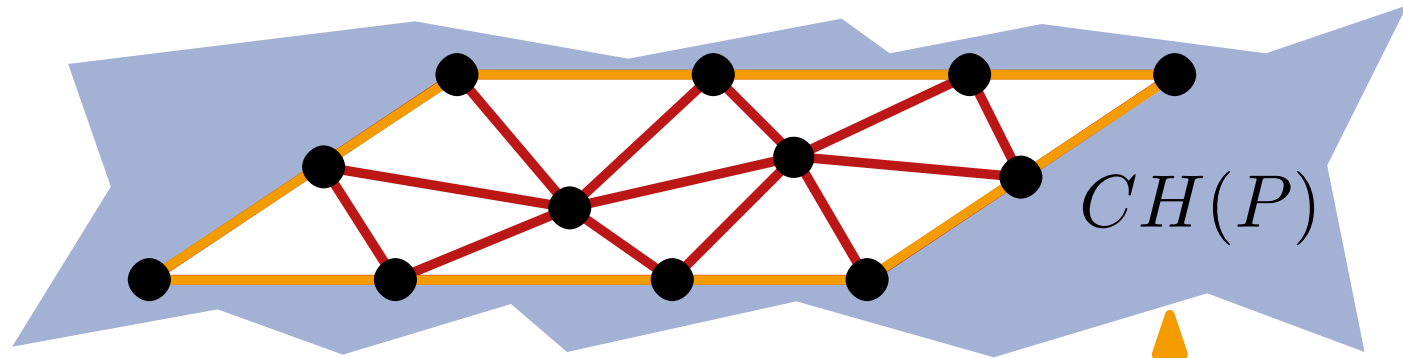
**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



- Beob.:**
- alle inneren Facetten sind Dreiecke
  - äußere Facette ist Komplement der konvexen Hülle

# Triangulierung von Punkten

**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



**Beob.:**

- alle inneren Facetten sind Dreiecke
- äußere Facette ist Komplement der konvexen Hülle

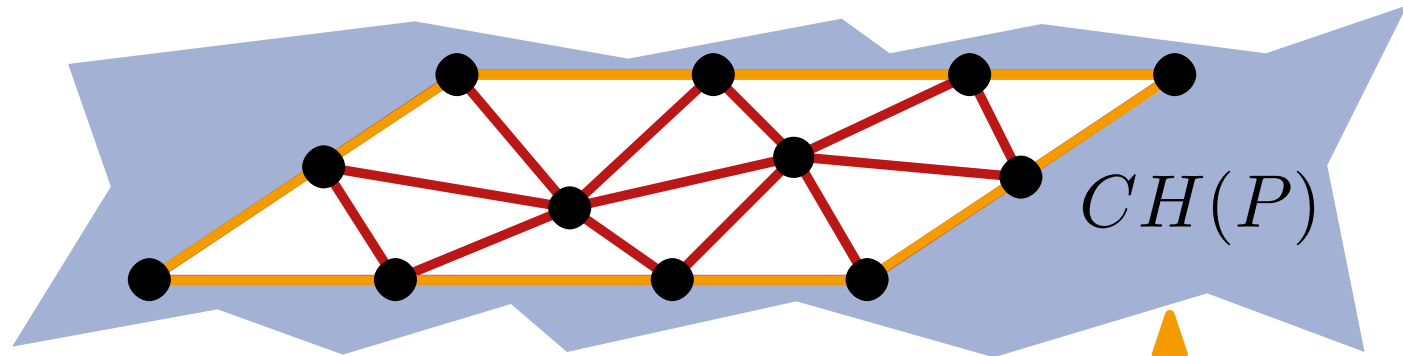
**Satz 1:** Sei  $P$  eine Menge von  $n$  nicht kollinearen Punkten und  $h$  die Anzahl Punkte auf  $CH(P)$ .

Dann hat *jede* Triangulierung von  $P$   $t(n, h)$  Dreiecke und  $e(n, h)$  Kanten.



# Triangulierung von Punkten

**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



**Beob.:**

- alle inneren Facetten sind Dreiecke
- äußere Facette ist Komplement der konvexen Hülle

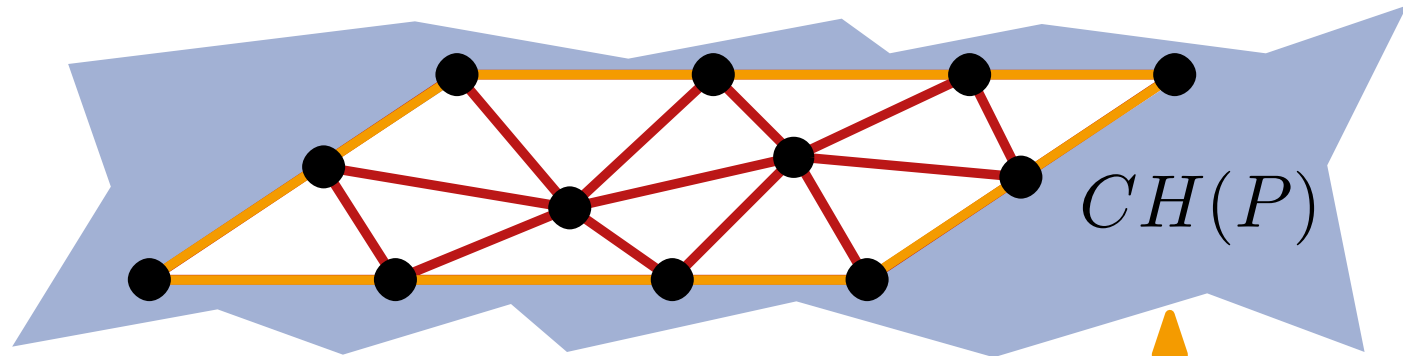
**Satz 1:** Sei  $P$  eine Menge von  $n$  nicht kollinearen Punkten und  $h$  die Anzahl Punkte auf  $CH(P)$ .

Dann hat *jede* Triangulierung von  $P$   $t(n, h)$  Dreiecke und  $e(n, h)$  Kanten.

Berechne  $t$  und  $e$ !

# Triangulierung von Punkten

**Def.:** Eine **Triangulierung** einer Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$  ist eine maximale planare Unterteilung mit Knotenmenge  $P$ .



**Beob.:**

- alle inneren Facetten sind Dreiecke
- äußere Facette ist Komplement der konvexen Hülle

**Satz 1:** Sei  $P$  eine Menge von  $n$  nicht kollinearen Punkten und  $h$  die Anzahl Punkte auf  $CH(P)$ .

Dann hat *jede* Triangulierung von  $P$   $(2n - 2 - h)$  Dreiecke und  $(3n - 3 - h)$  Kanten.

# Aufgabe 1

## Problem:

Sei  $P \subset \mathbb{R}^2$  eine Menge von  $n$  Punkten.

- a) Maximale Anzahl an verschiedenen Triangulierungen für  $P$  beschränkt durch  $2^{\binom{n}{2}}$ .
- b) Beispielmenge  $P$  bei der für jede Triangulierung ein Knoten ex. der Grad  $n - 1$  hat?

# Aufgabe 1

## Problem:

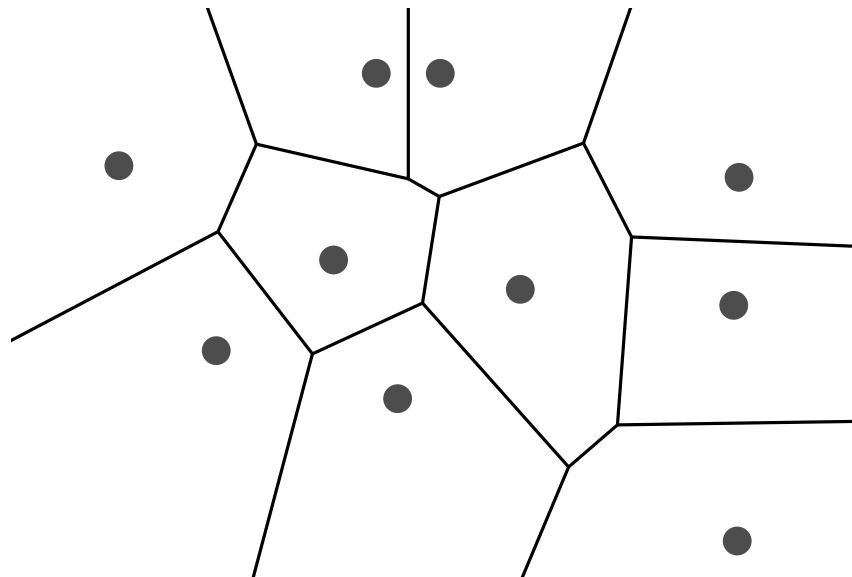
Sei  $P \subset \mathbb{R}^2$  eine Menge von  $n$  Punkten.

- a) Maximale Anzahl an verschiedenen Triangulierungen für  $P$  beschränkt durch  $2^{\binom{n}{2}}$ .
- b) Beispielmenge  $P$  bei der für jede Triangulierung ein Knoten ex. der Grad  $n - 1$  hat?

# Die Delaunay-Triangulierung

Sei  $\text{Vor}(P)$  das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge  $P$ .

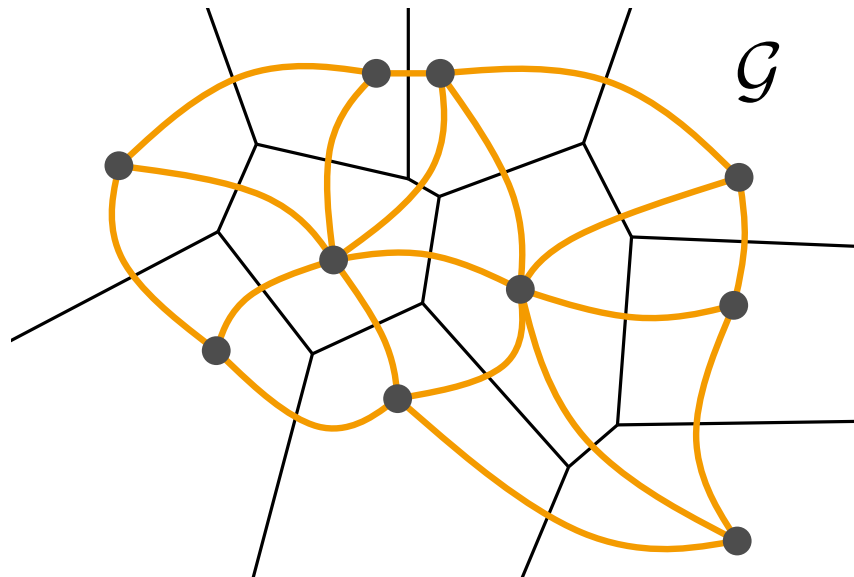
**Def.:** Der Graph  $\mathcal{G} = (P, E)$  mit  
 $E = \{pq \mid \mathcal{V}(p) \text{ und } \mathcal{V}(q) \text{ sind benachbart}\}$   
heißt **Dualgraph** von  $\text{Vor}(P)$ .



# Die Delaunay-Triangulierung

Sei  $\text{Vor}(P)$  das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge  $P$ .

**Def.:** Der Graph  $\mathcal{G} = (P, E)$  mit  
 $E = \{pq \mid \mathcal{V}(p) \text{ und } \mathcal{V}(q) \text{ sind benachbart}\}$   
heißt **Dualgraph** von  $\text{Vor}(P)$ .

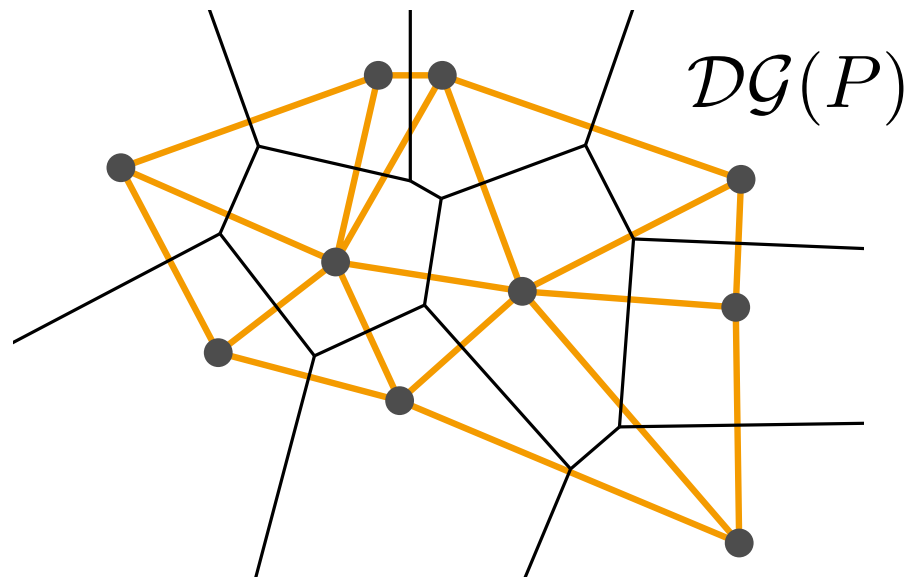


# Die Delaunay-Triangulierung

Sei  $\text{Vor}(P)$  das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge  $P$ .

**Def.:** Der Graph  $\mathcal{G} = (P, E)$  mit  
 $E = \{pq \mid \mathcal{V}(p) \text{ und } \mathcal{V}(q) \text{ sind benachbart}\}$   
heißt **Dualgraph** von  $\text{Vor}(P)$ .

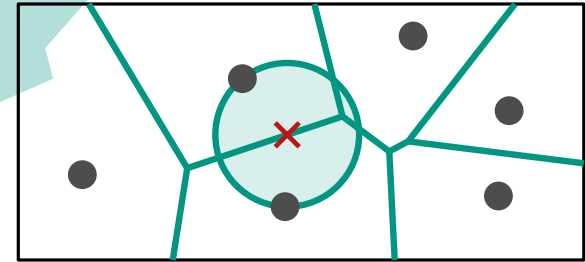
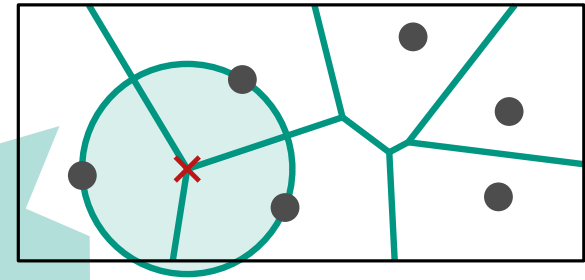
**Def.:** Die geradlinige Zeichnung von  $\mathcal{G}$  heißt **Delaunay-Graph**  $\mathcal{DG}(P)$ .



# Charakterisierung

## Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3,$
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}.$

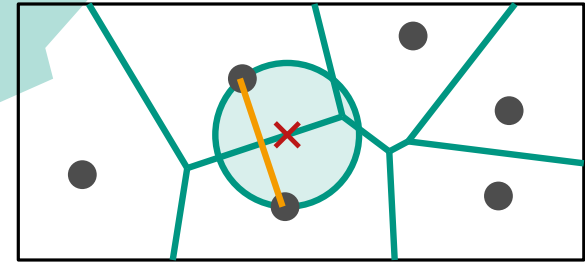
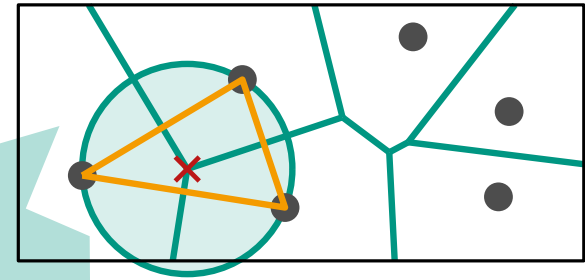




# Charakterisierung

## Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



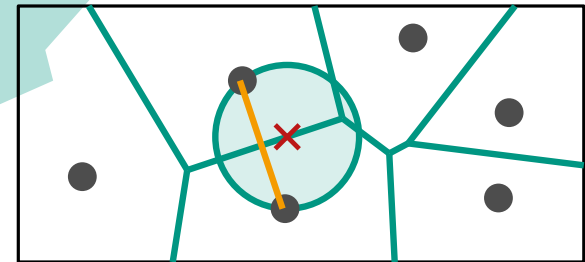
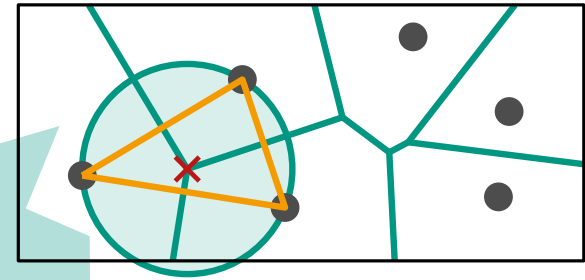
## Satz 4: Sei $P$ eine Menge von Punkten.

- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Charakterisierung

## Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



## Satz 4: Sei $P$ eine Menge von Punkten.

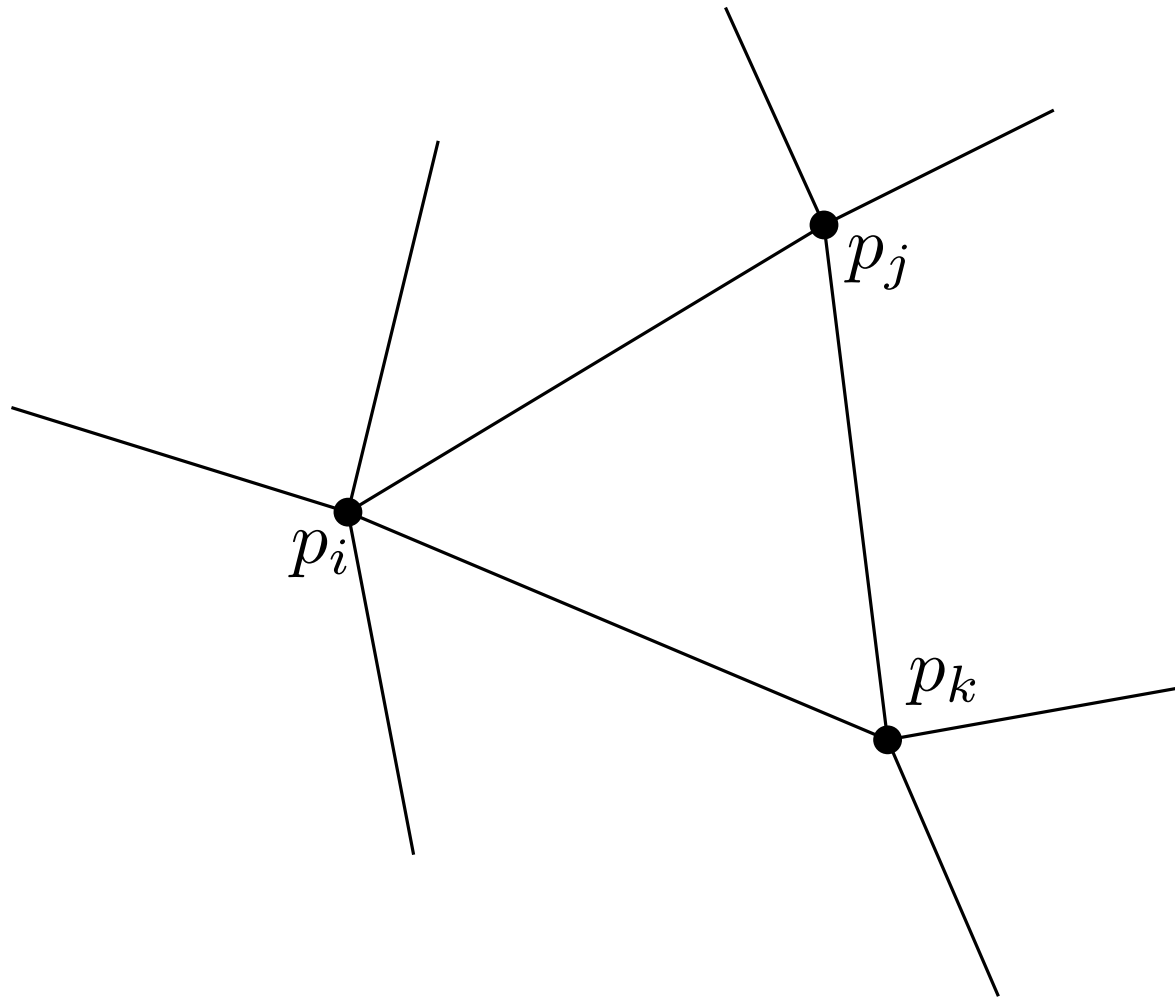
- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Satz 5: Sei $P$ Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $P$ .

- $\mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung  
 $\Leftrightarrow$  Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

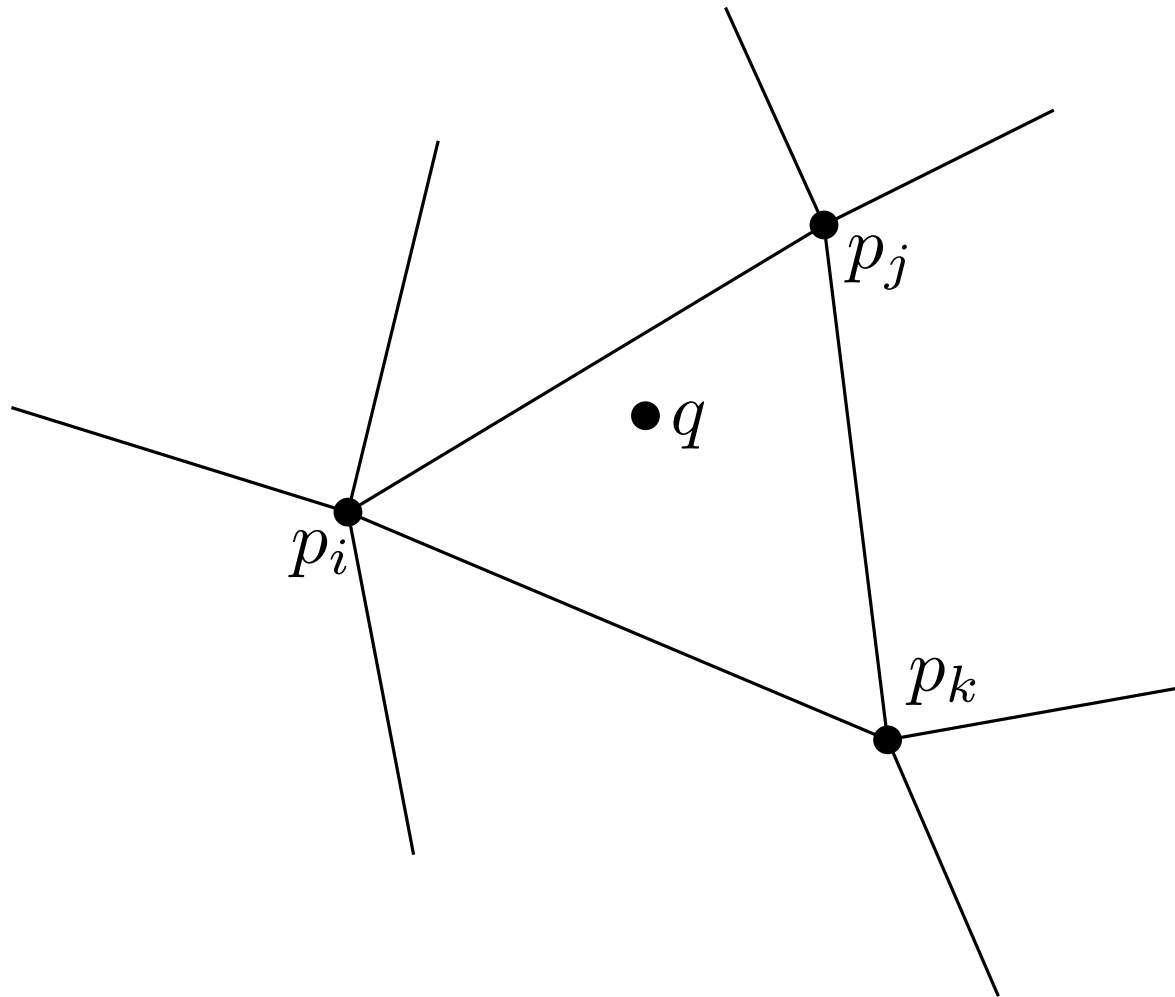
## Aufgabe 2

- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



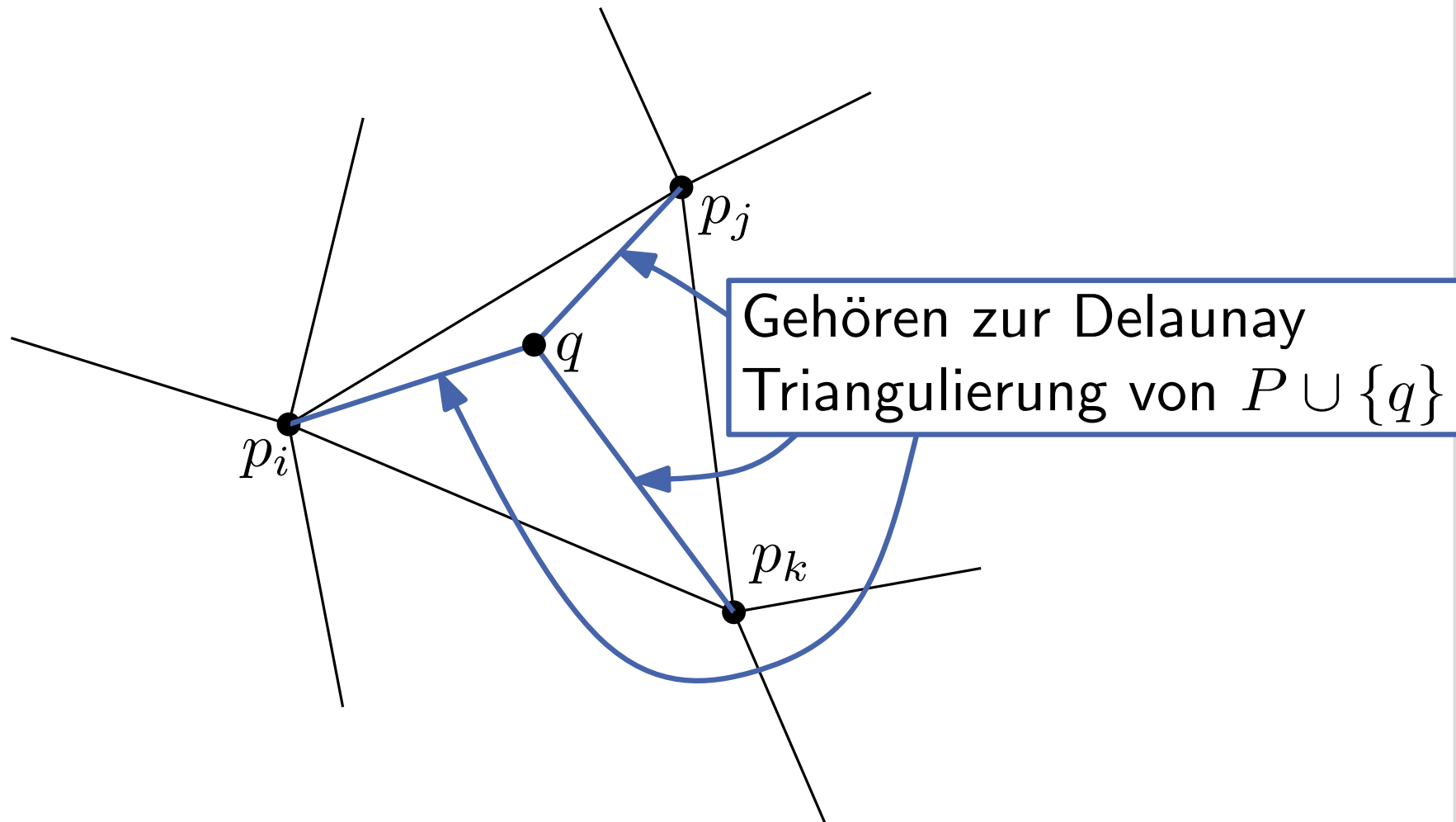
## Aufgabe 2

- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



## Aufgabe 2

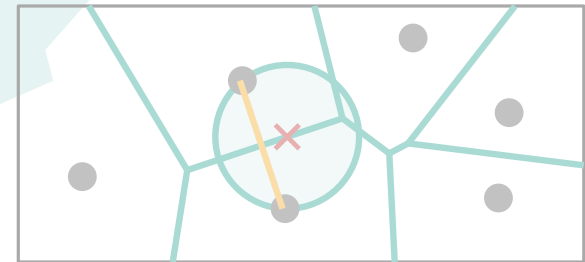
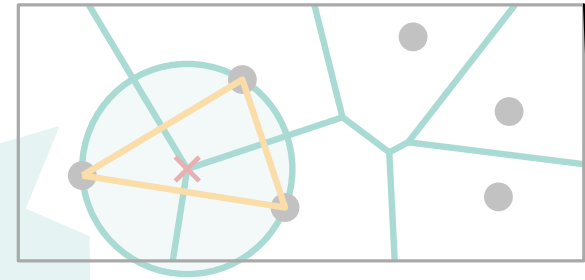
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



# Charakterisierung

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



**Satz 4:** Sei  $P$  eine Menge von Punkten.

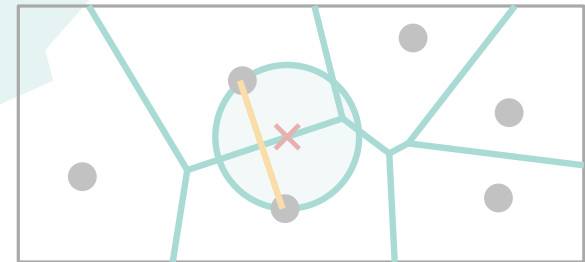
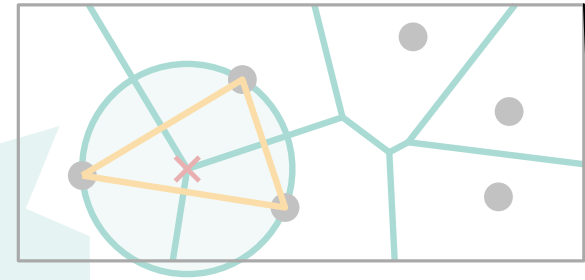
- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

**Satz 5:** Sei  $P$  Punktmenge und  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung von  $P$ .  
 $\mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung  
 $\Leftrightarrow$  Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

# Charakterisierung

## Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



## Satz 4: Sei $P$ eine Menge von Punkten.

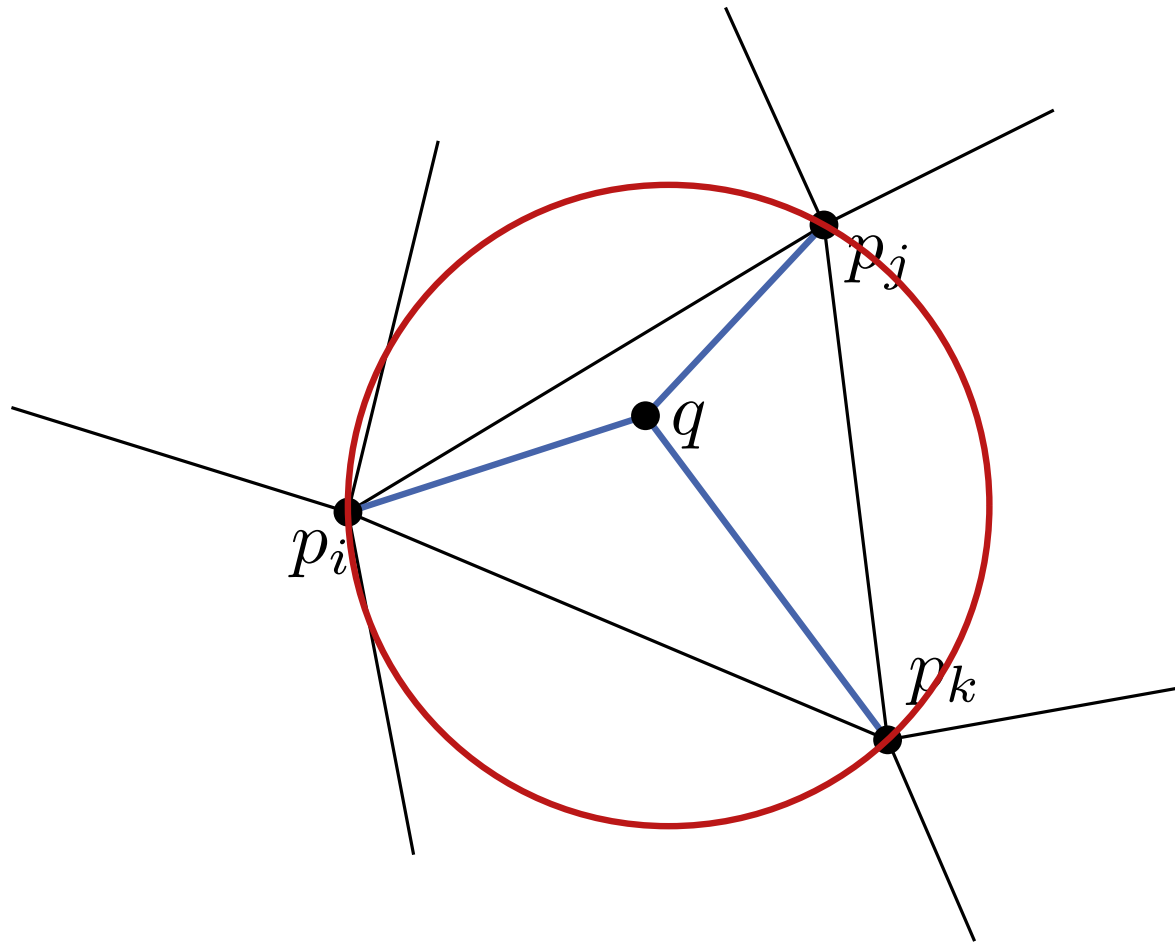
- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Satz 5: Sei $P$ Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $P$ .

- $\mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung  
 $\Leftrightarrow$  Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

## Aufgabe 2

- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .

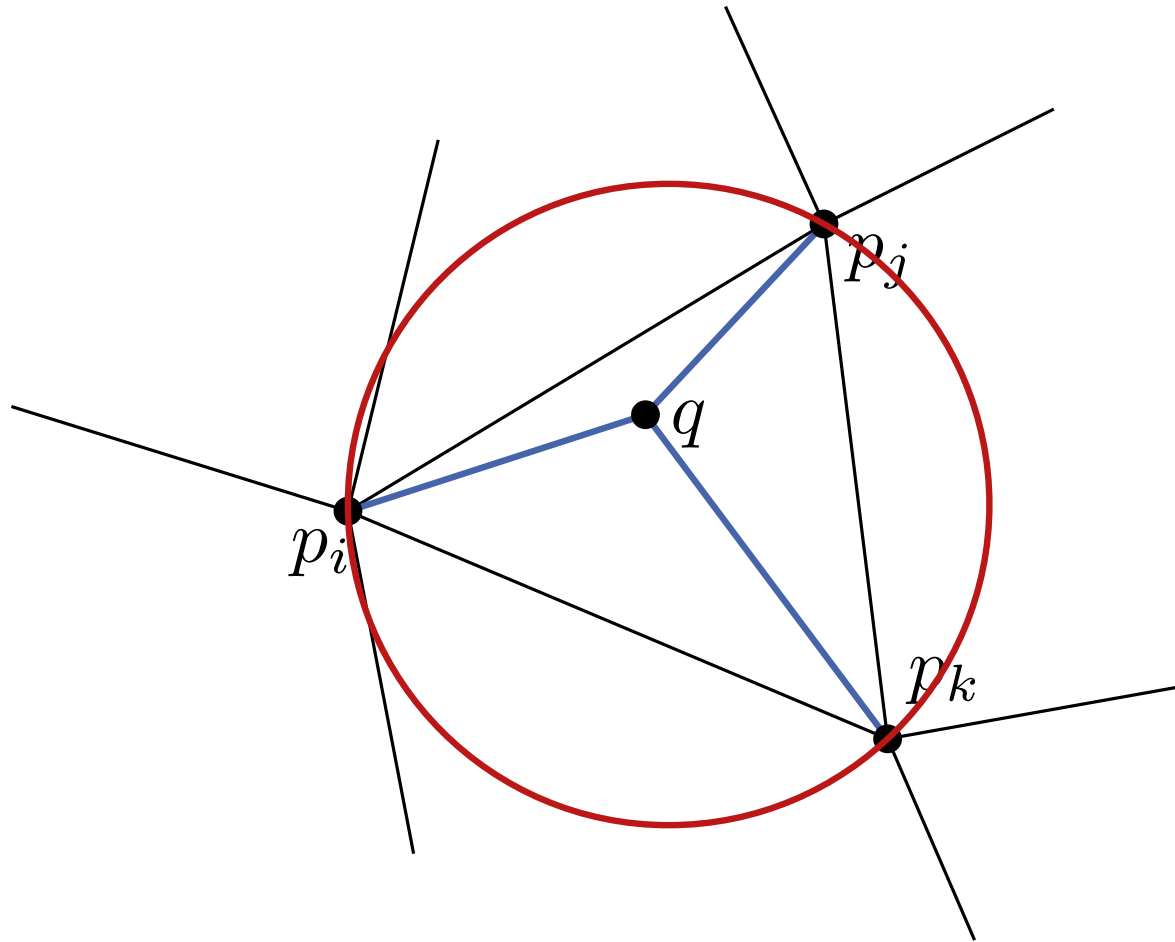


Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$



## Aufgabe 2

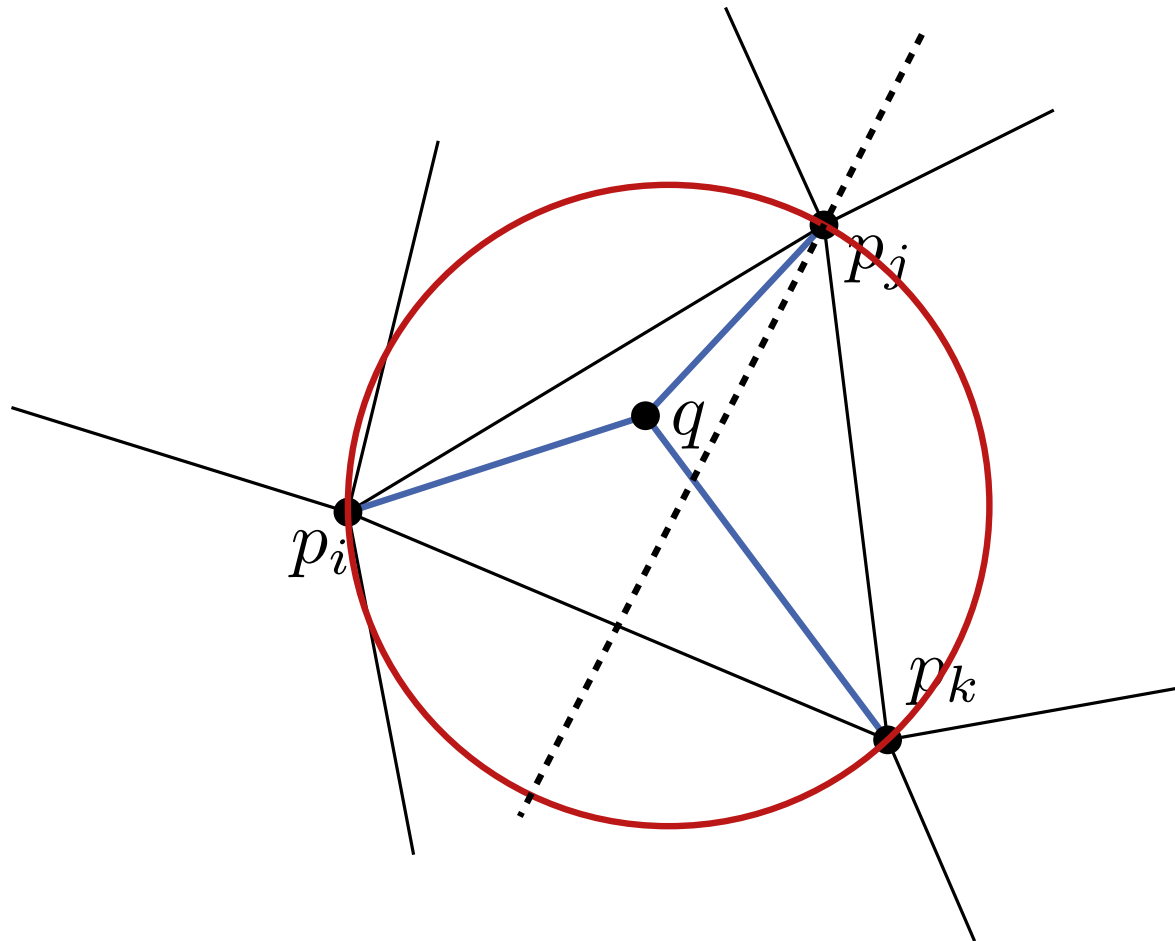
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Aufgabe 2

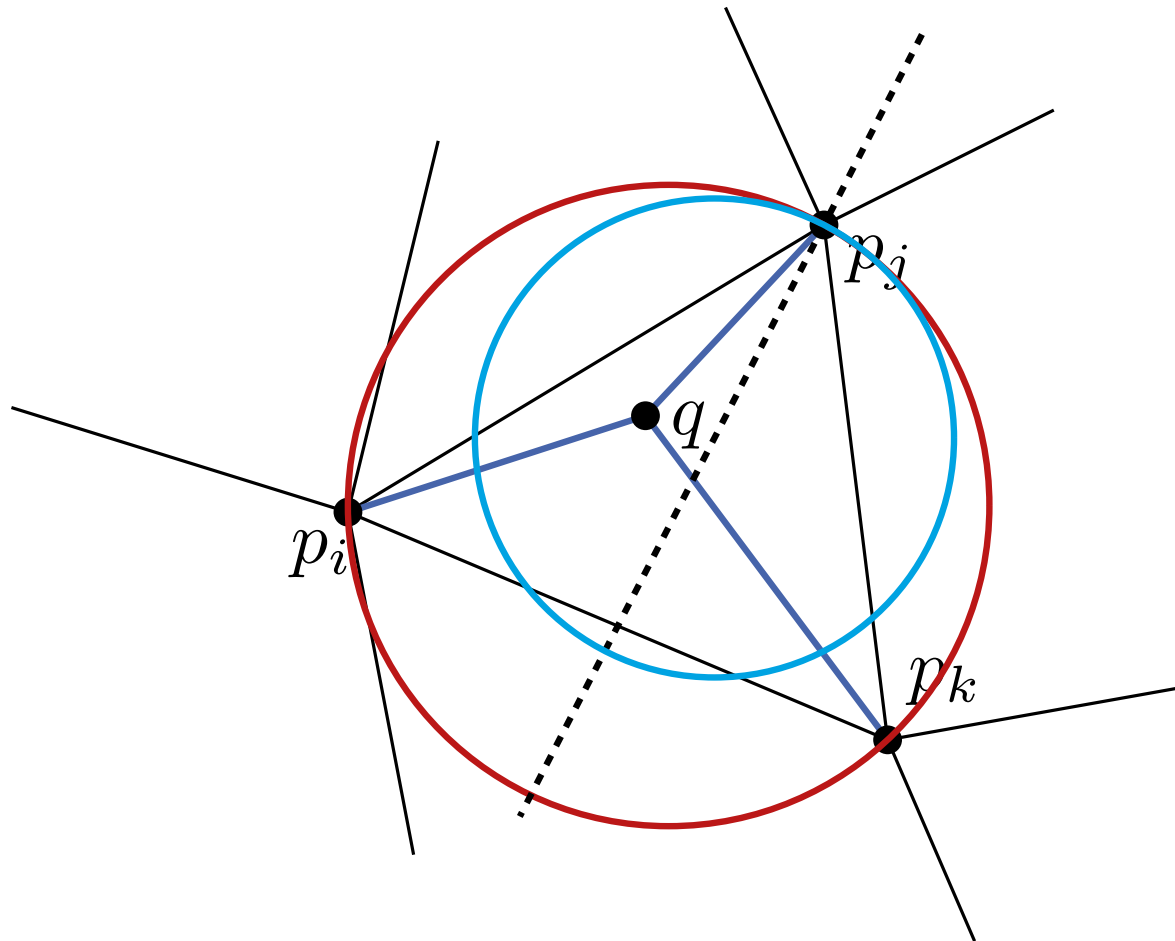
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Aufgabe 2

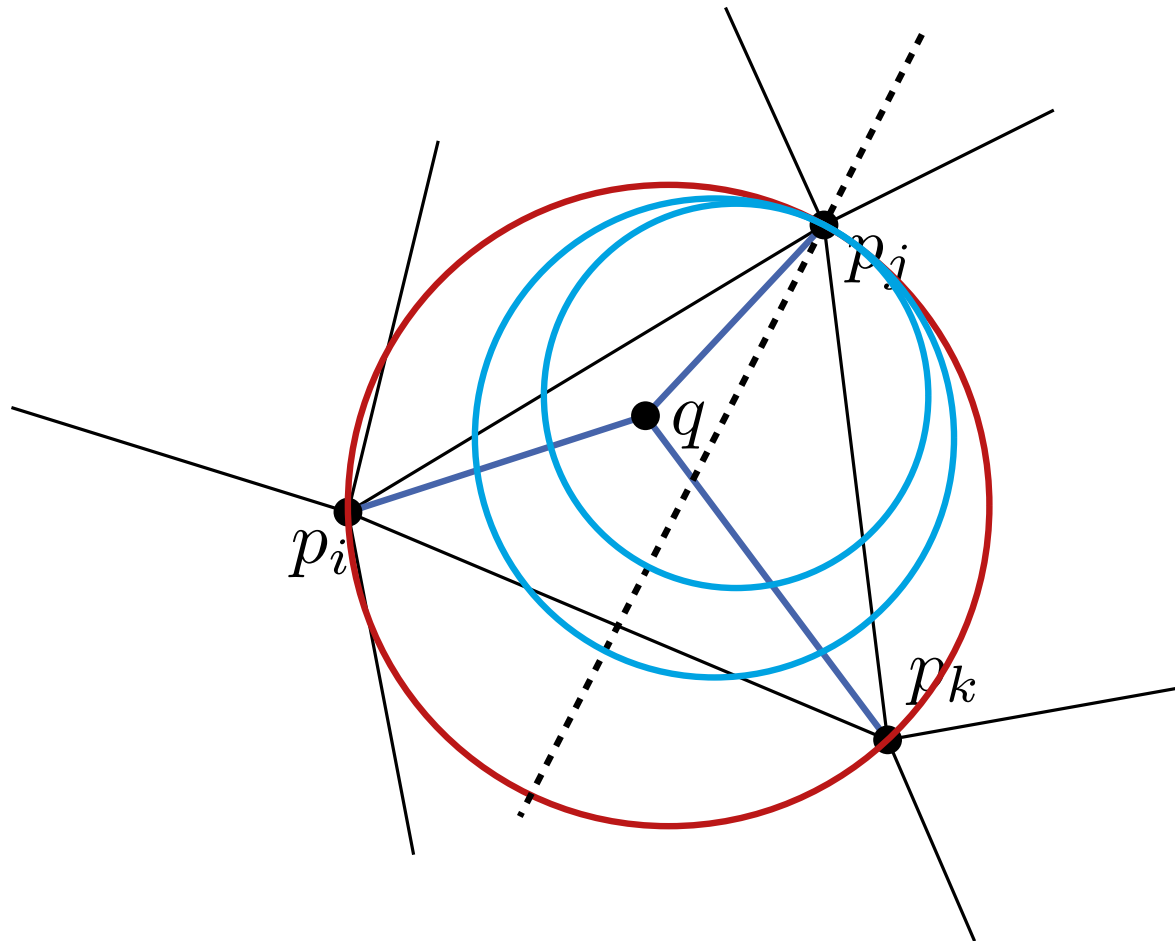
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Aufgabe 2

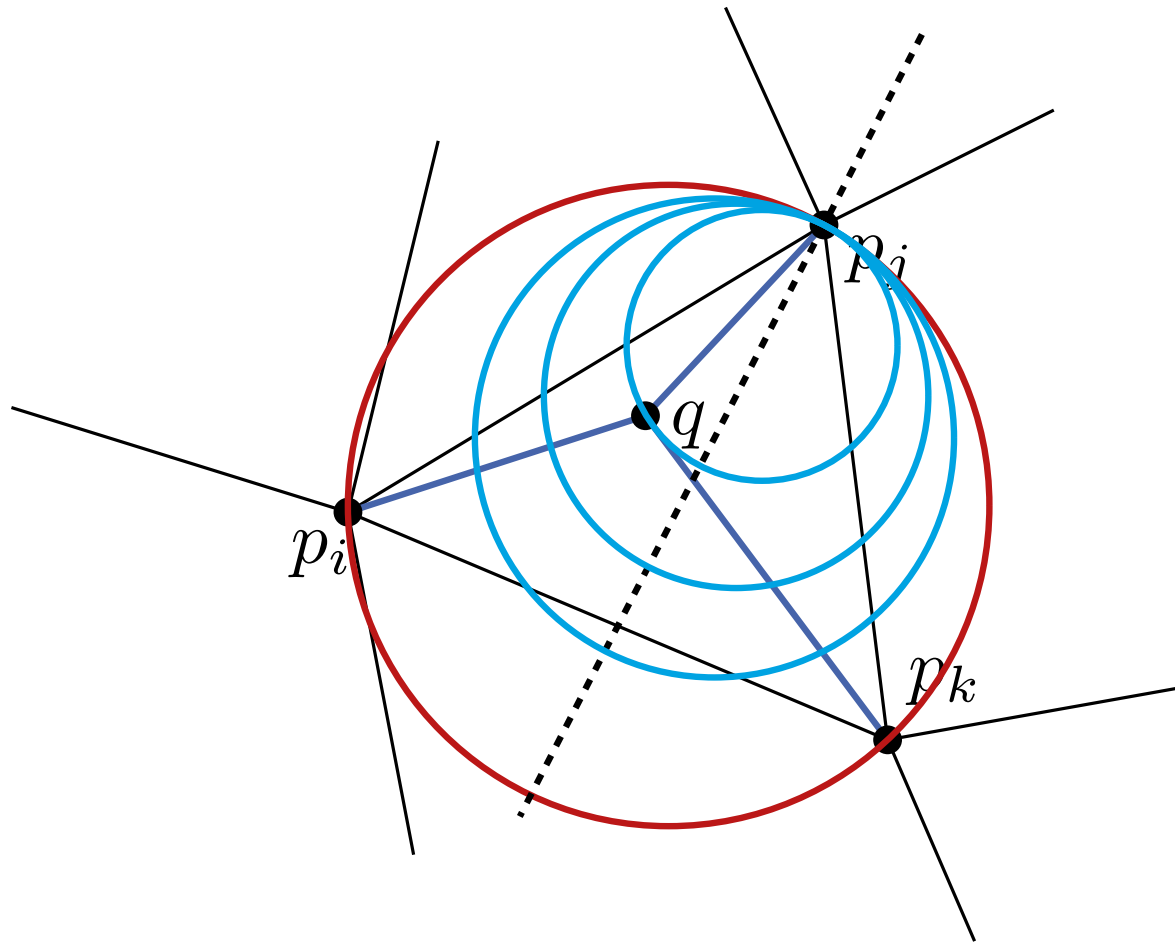
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Aufgabe 2

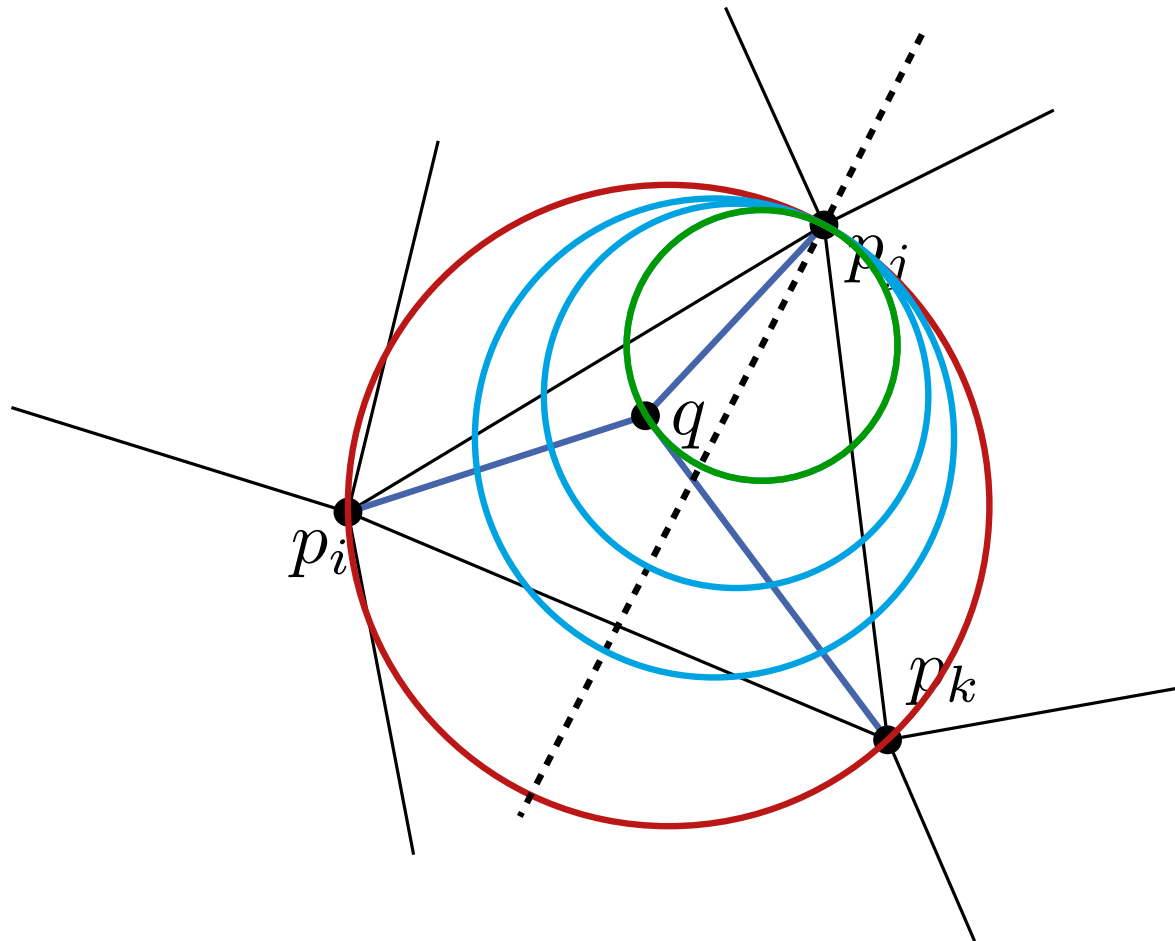
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Aufgabe 2

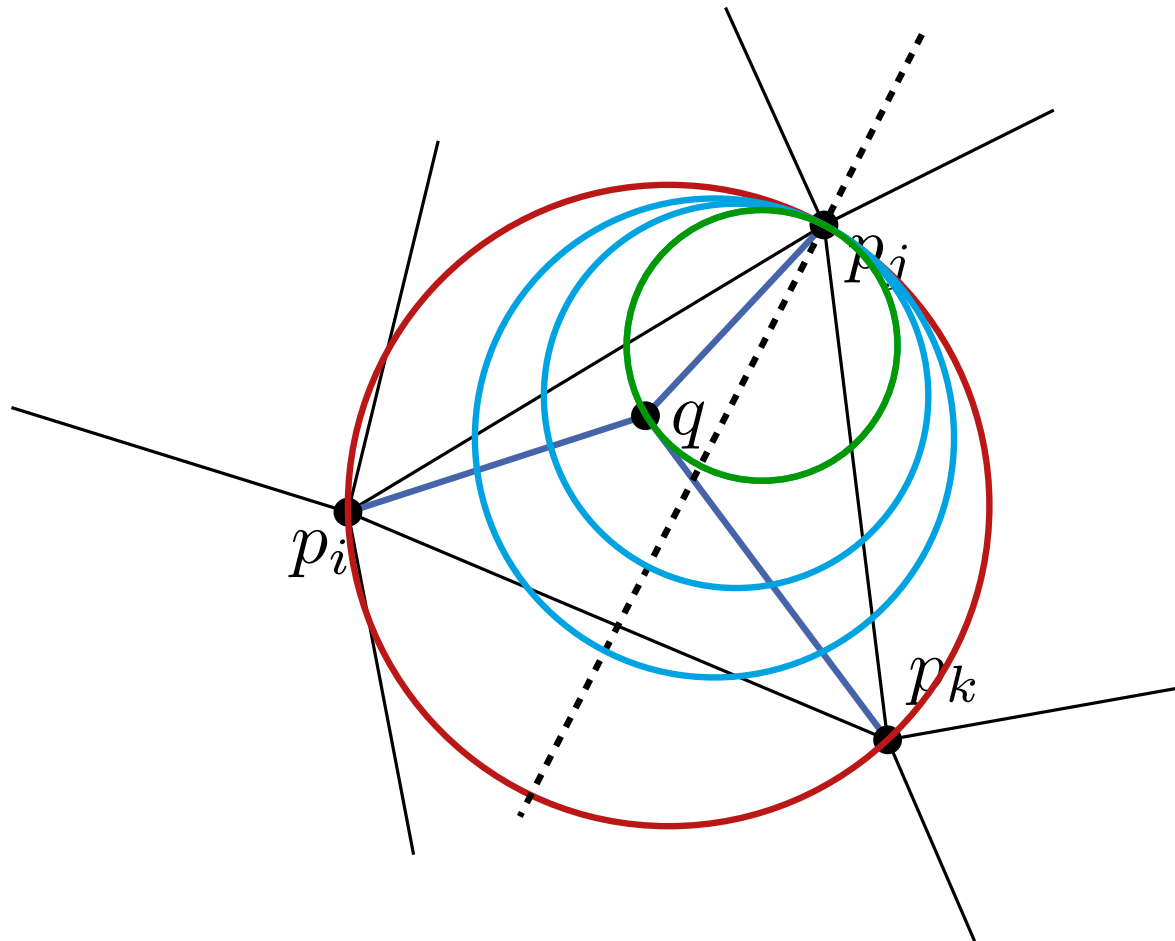
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Aufgabe 2

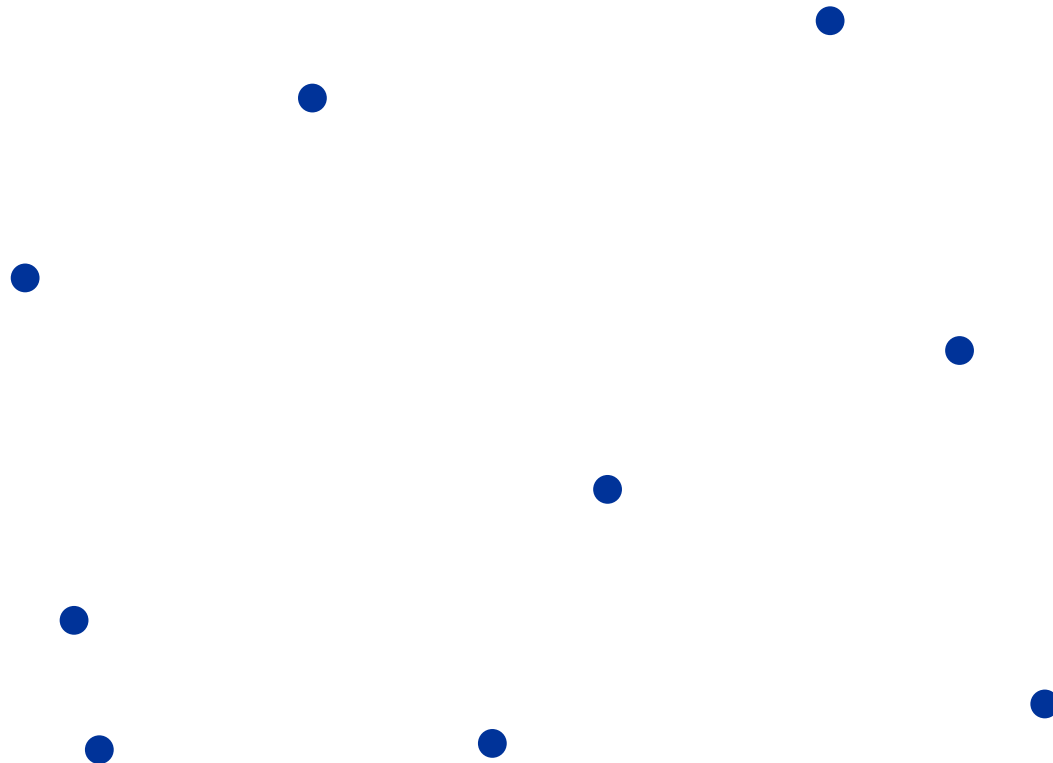
- Punktmenge  $P \subset \mathbb{R}^2$ , alle Punkte in allgemeiner Lage.
- Außerdem  $q \notin P$  aber in der konvexen Hülle von  $P$ .



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Aufgabe 3

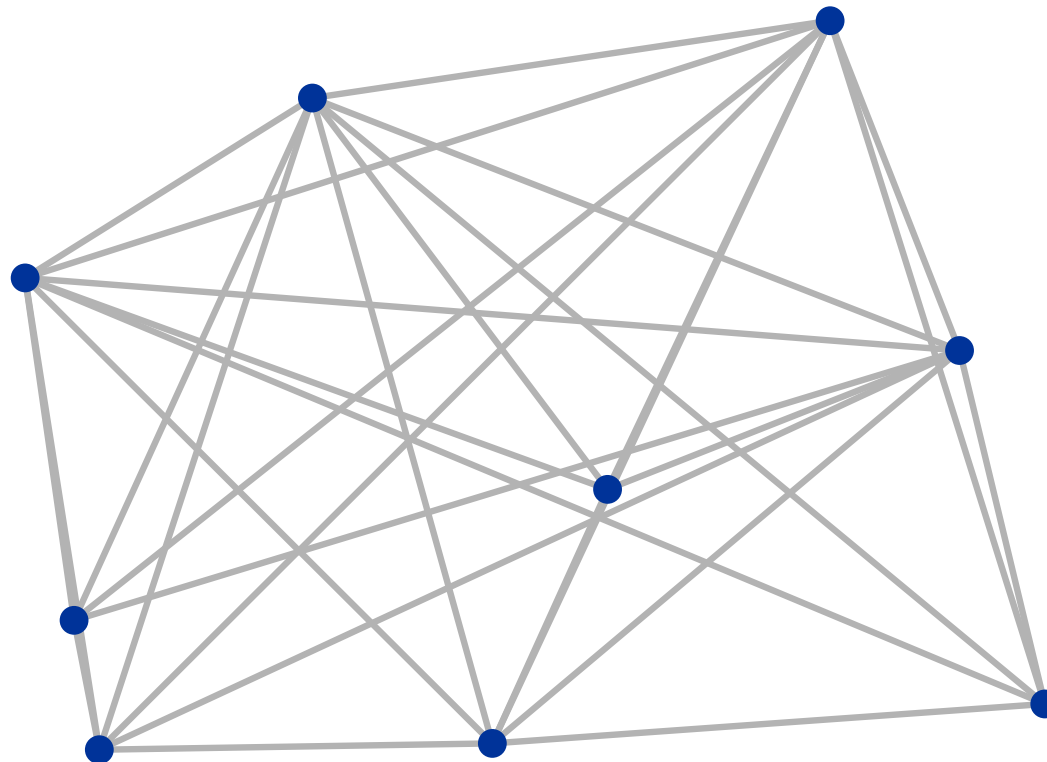
## Euklidischer Minimaler Spannbaum





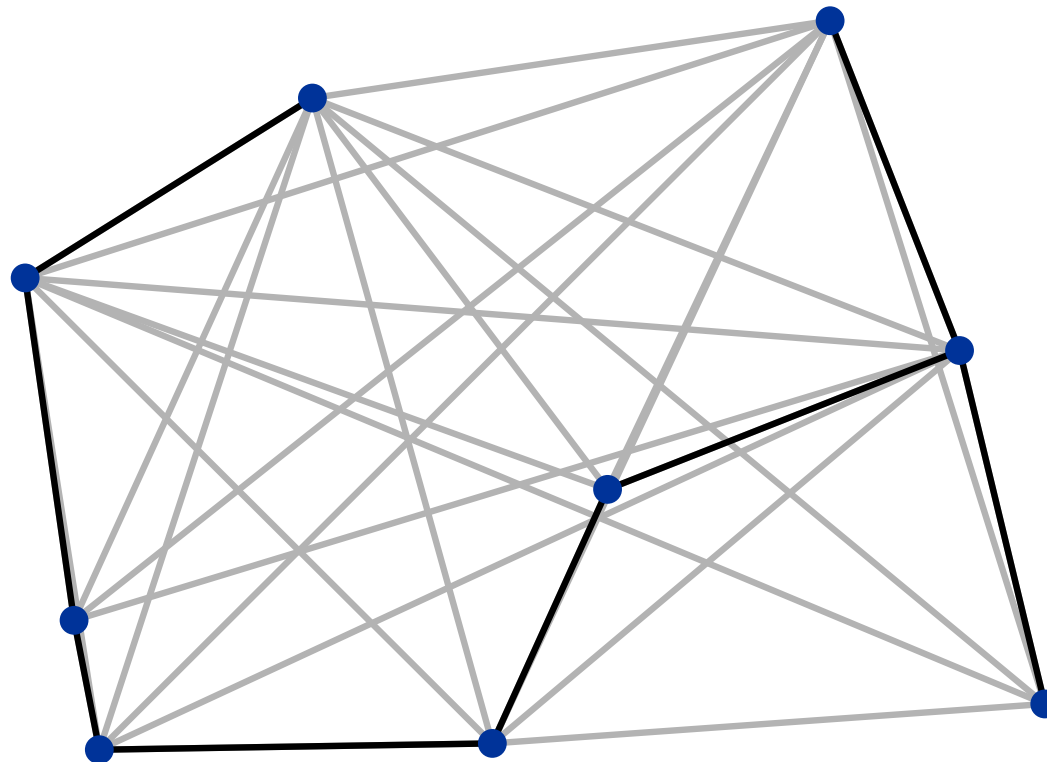
# Aufgabe 3

## Euklidischer Minimaler Spannbaum



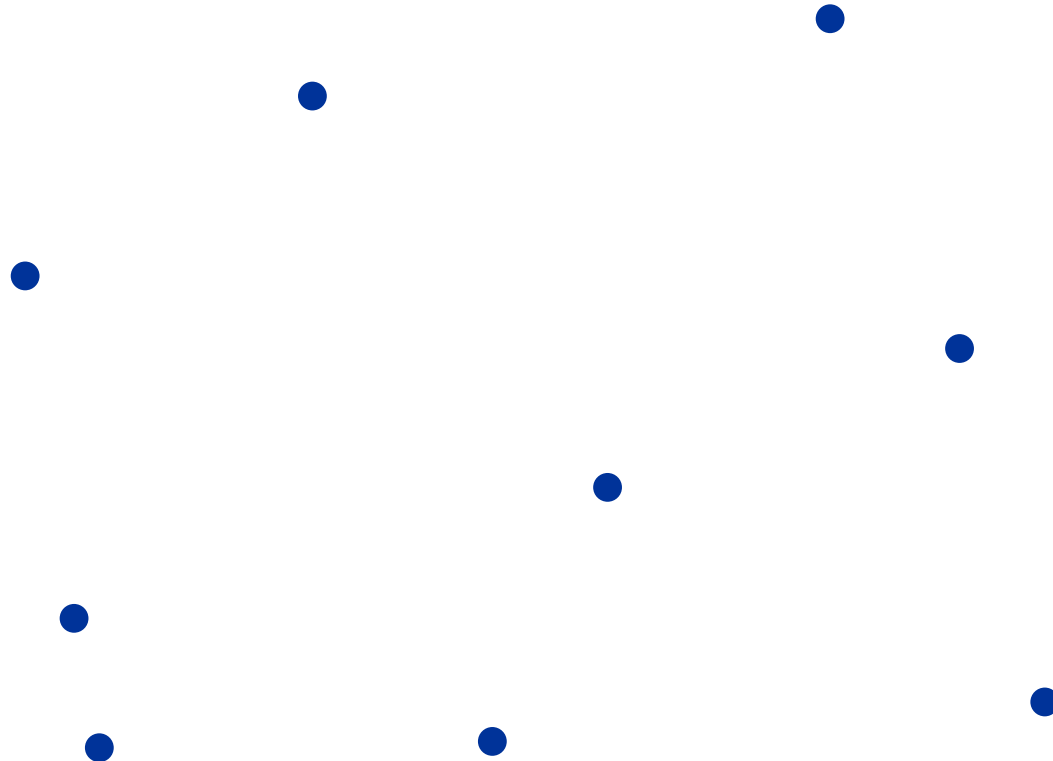
# Aufgabe 3

## Euklidischer Minimaler Spannbaum



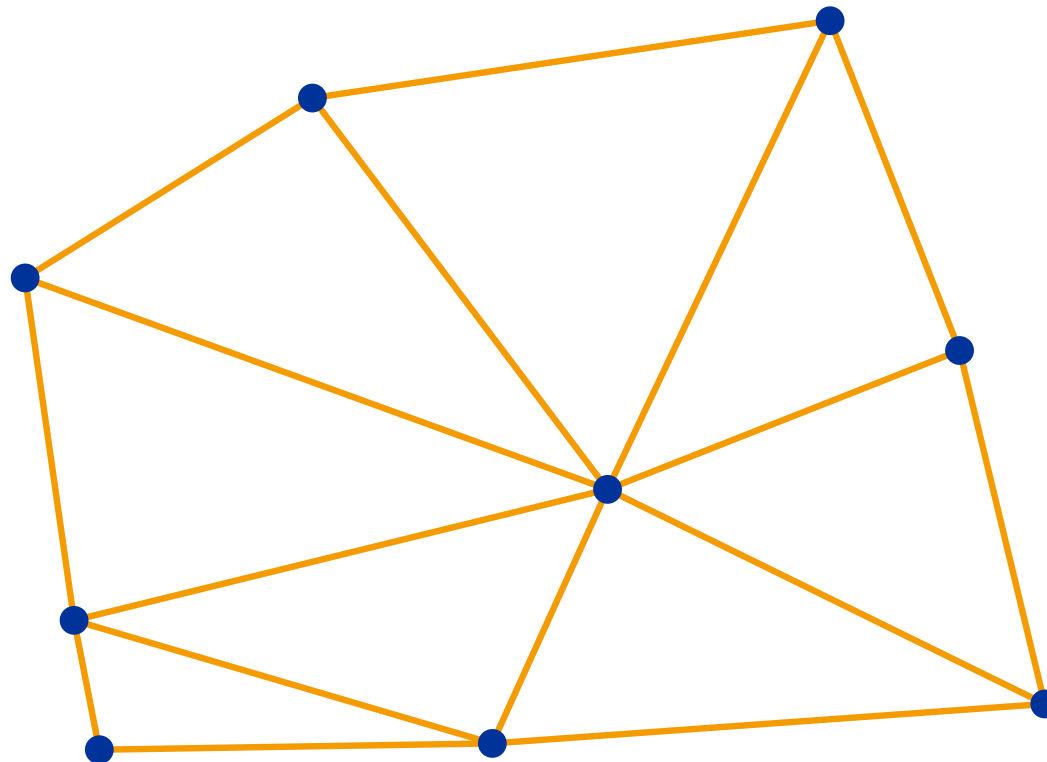
# Aufgabe 3

## Euklidischer Minimaler Spannbaum



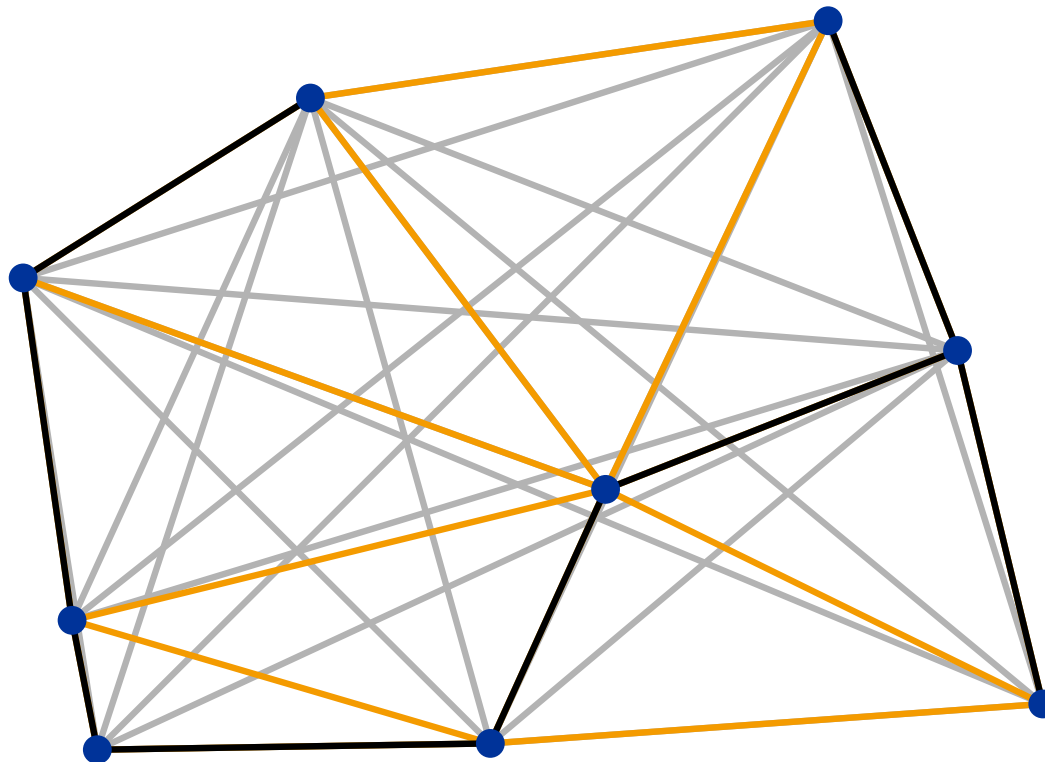
# Aufgabe 3

## Euklidischer Minimaler Spannbaum



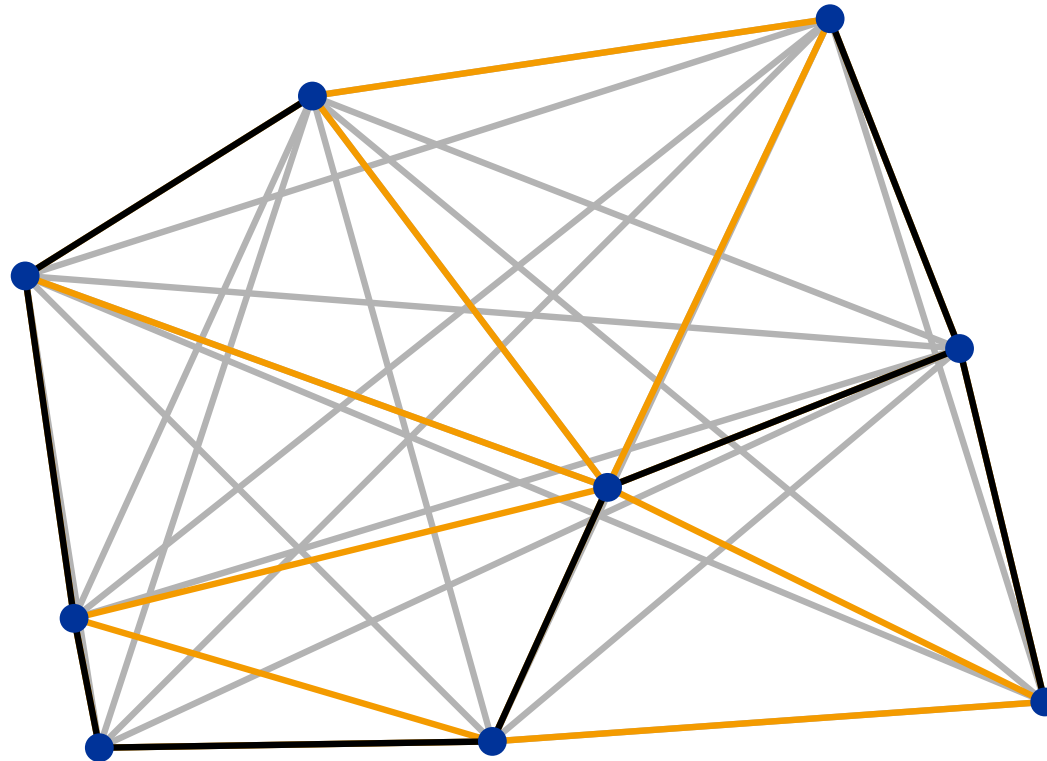
# Aufgabe 3

## Euklidischer Minimaler Spannbaum



# Aufgabe 3

## Euklidischer Minimaler Spannbaum

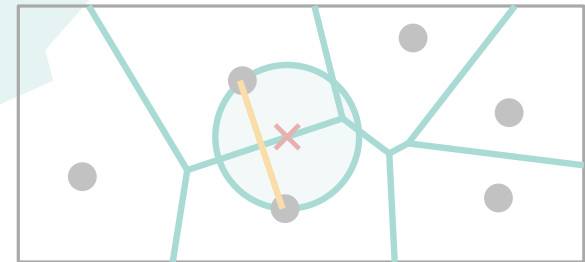
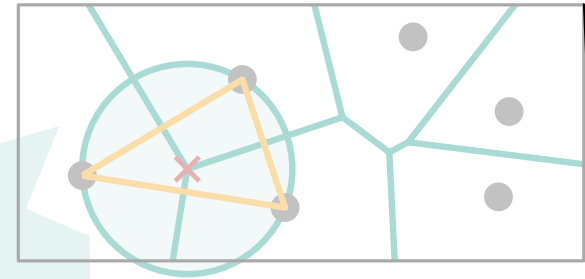


Zeige, dass Kanten aus EMST Teilmenge der Kanten aus Delaunay-Graph

# Charakterisierung

## Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



## Satz 4: Sei $P$ eine Menge von Punkten.

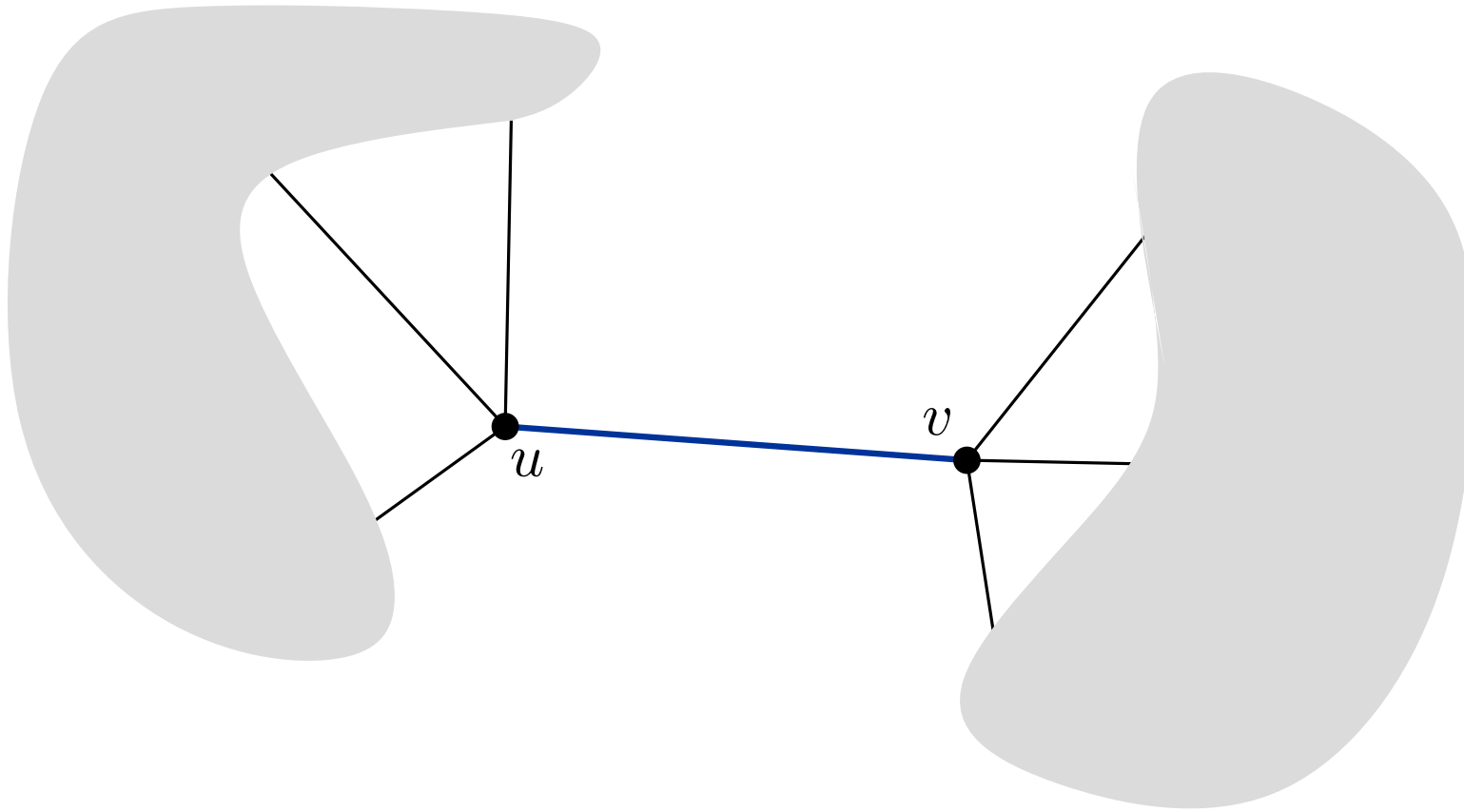
- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Satz 5: Sei $P$ Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $P$ .

$\mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung

$\Leftrightarrow$  Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

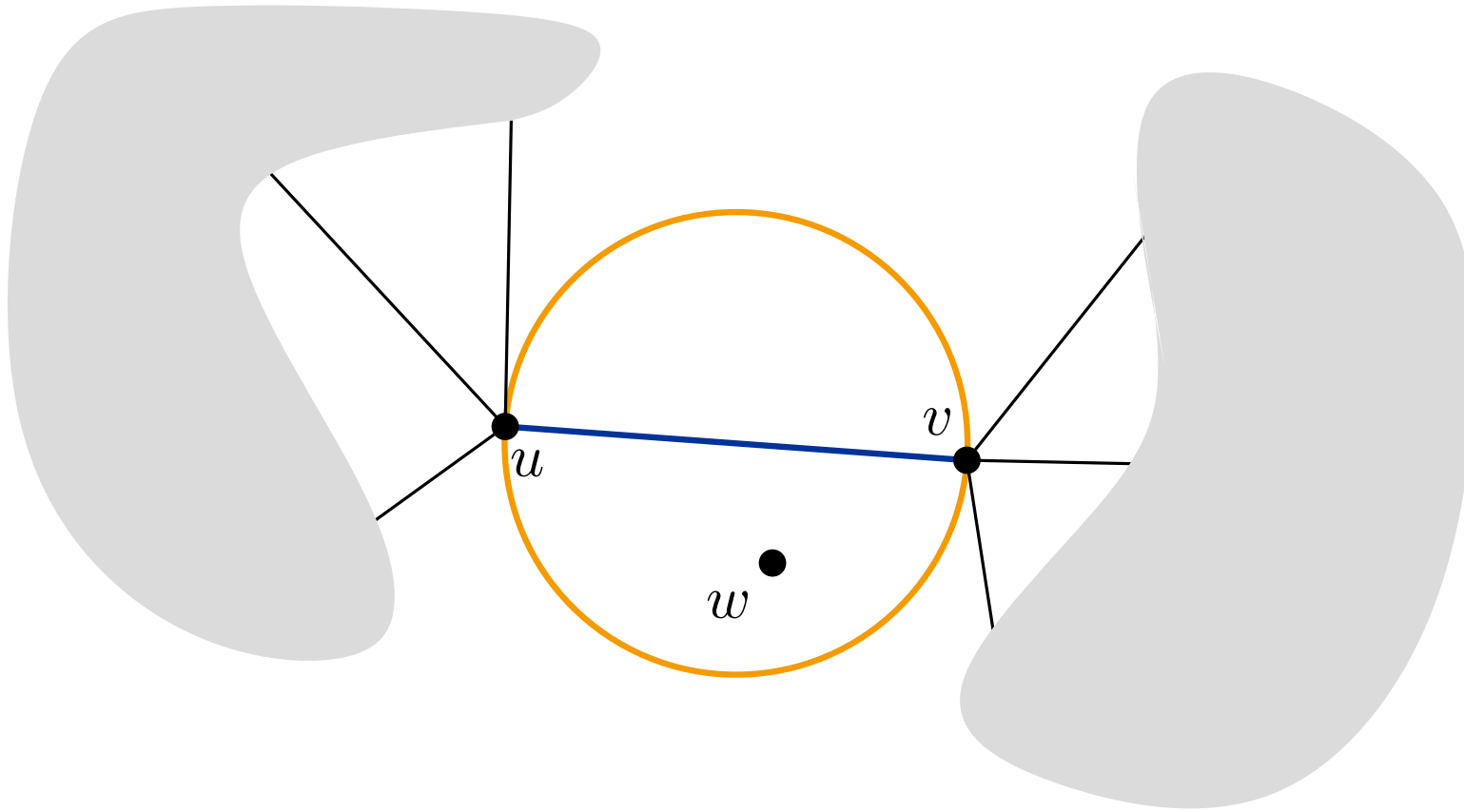
# Aufgabe 3



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

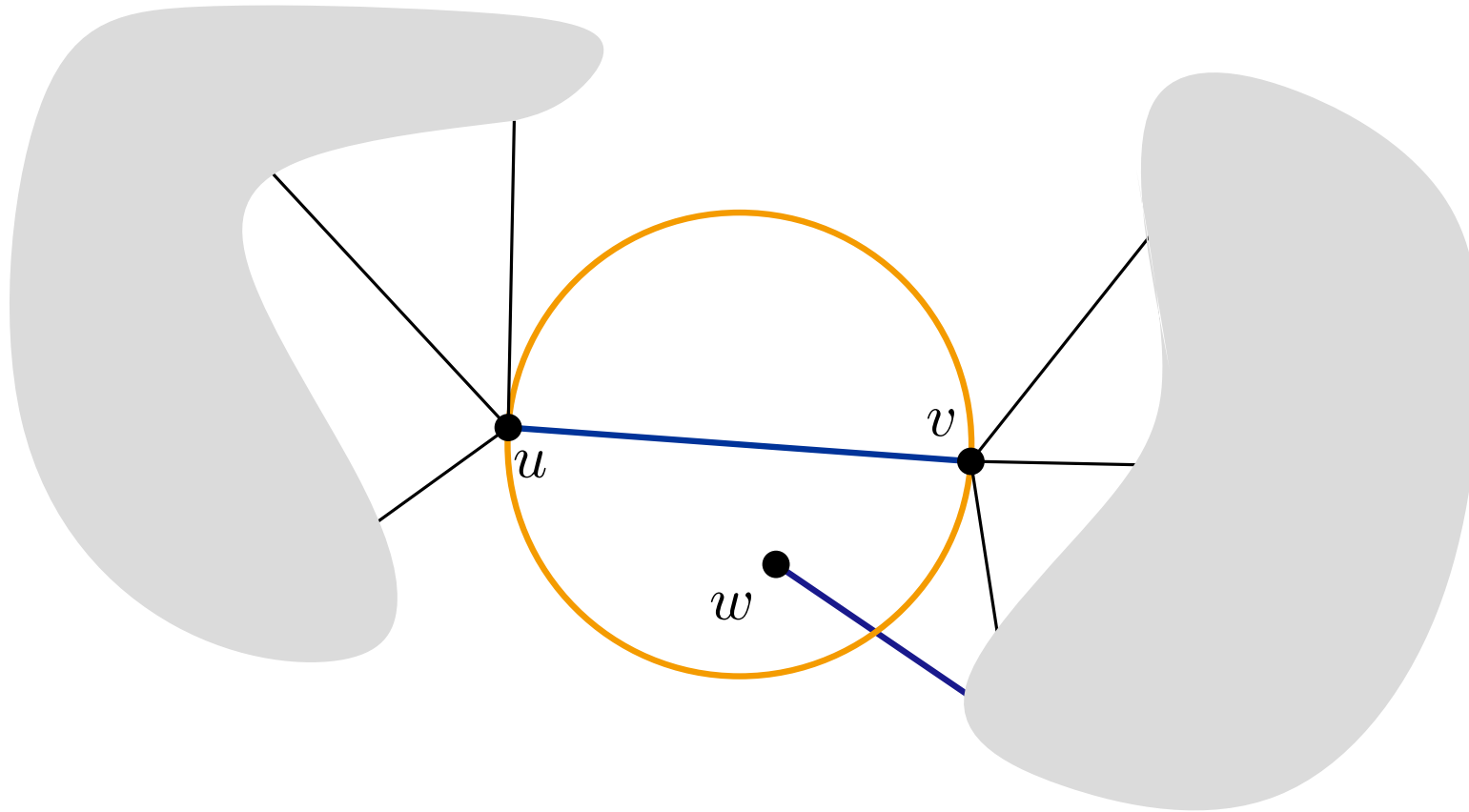


# Aufgabe 3



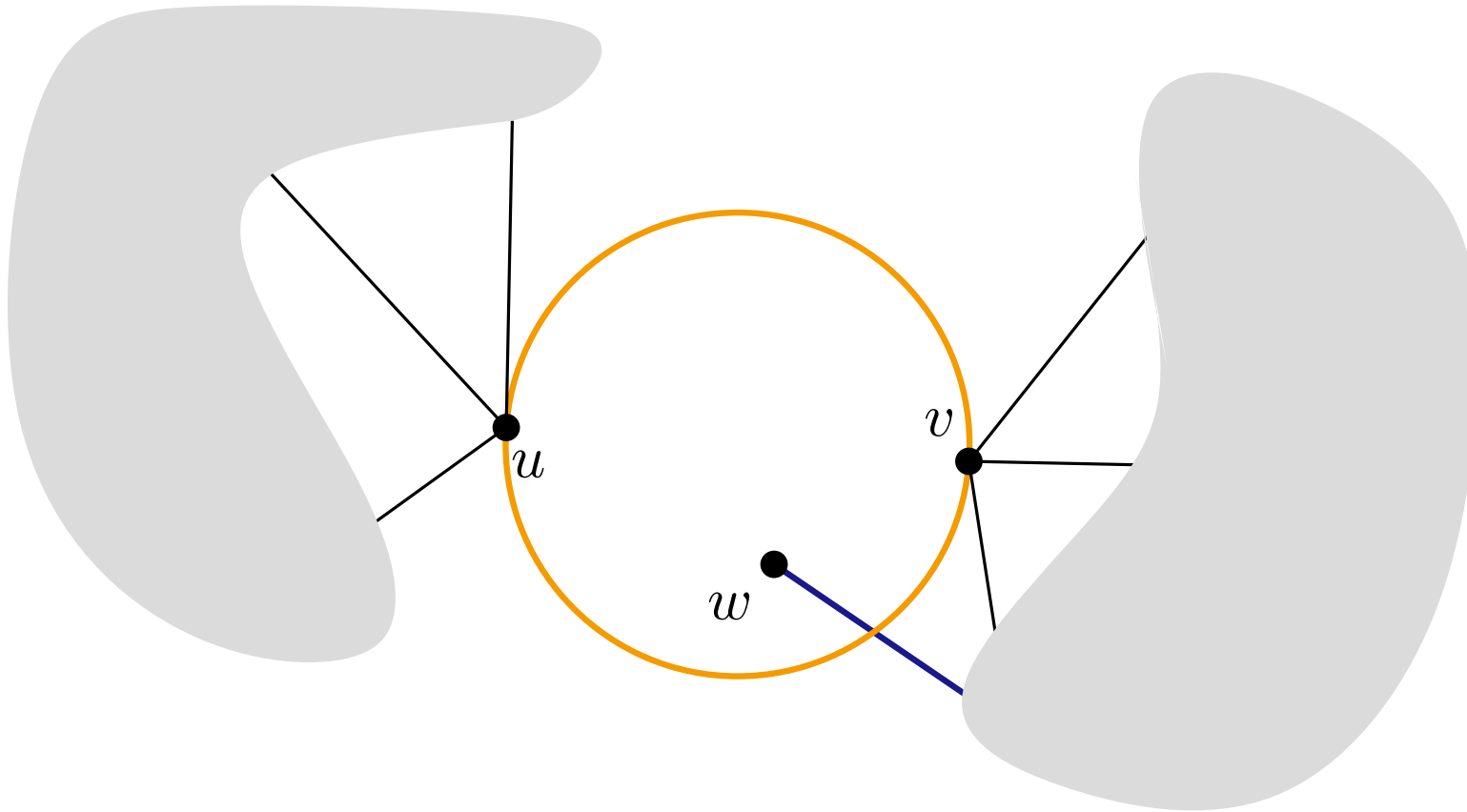
Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Aufgabe 3



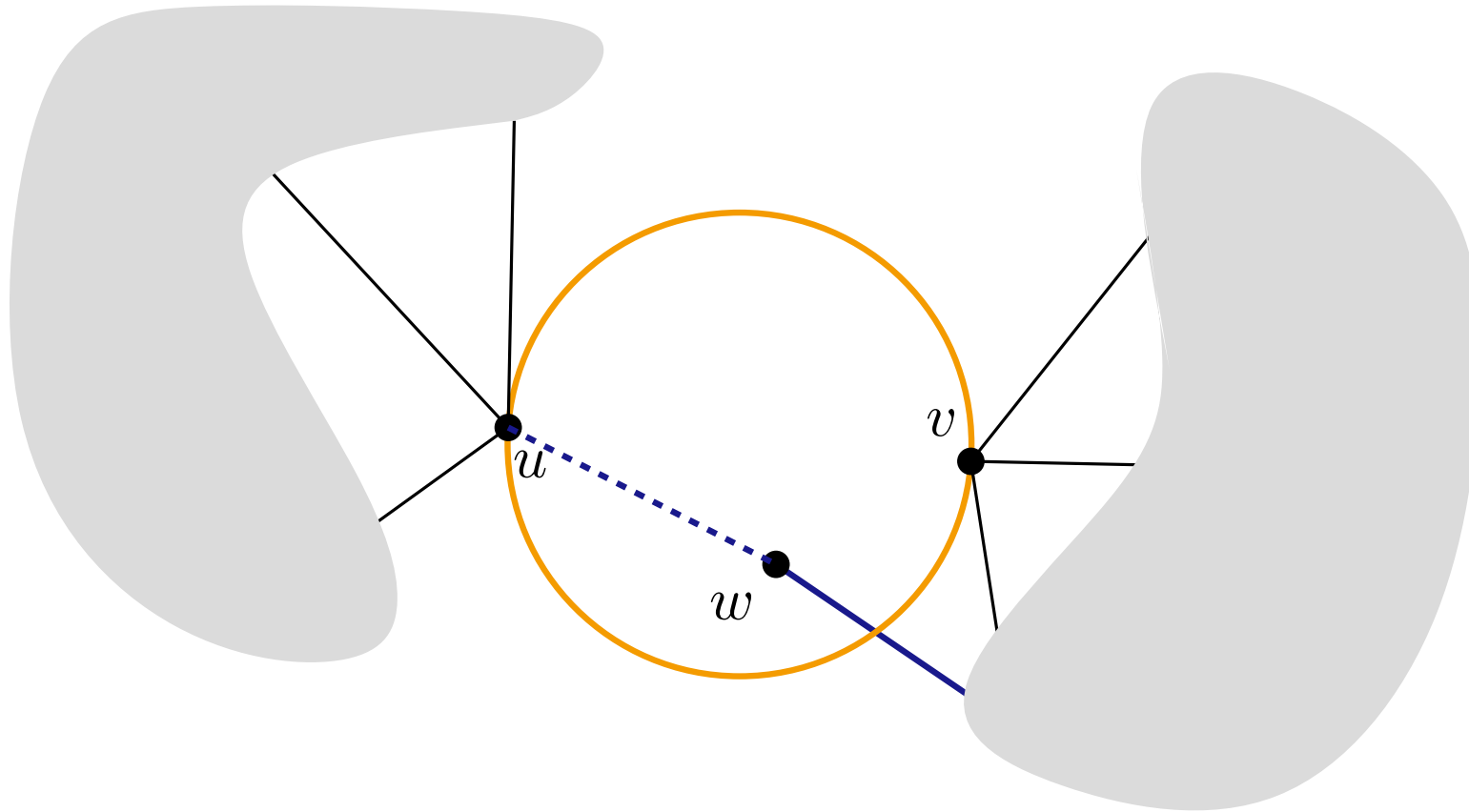
Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Aufgabe 3



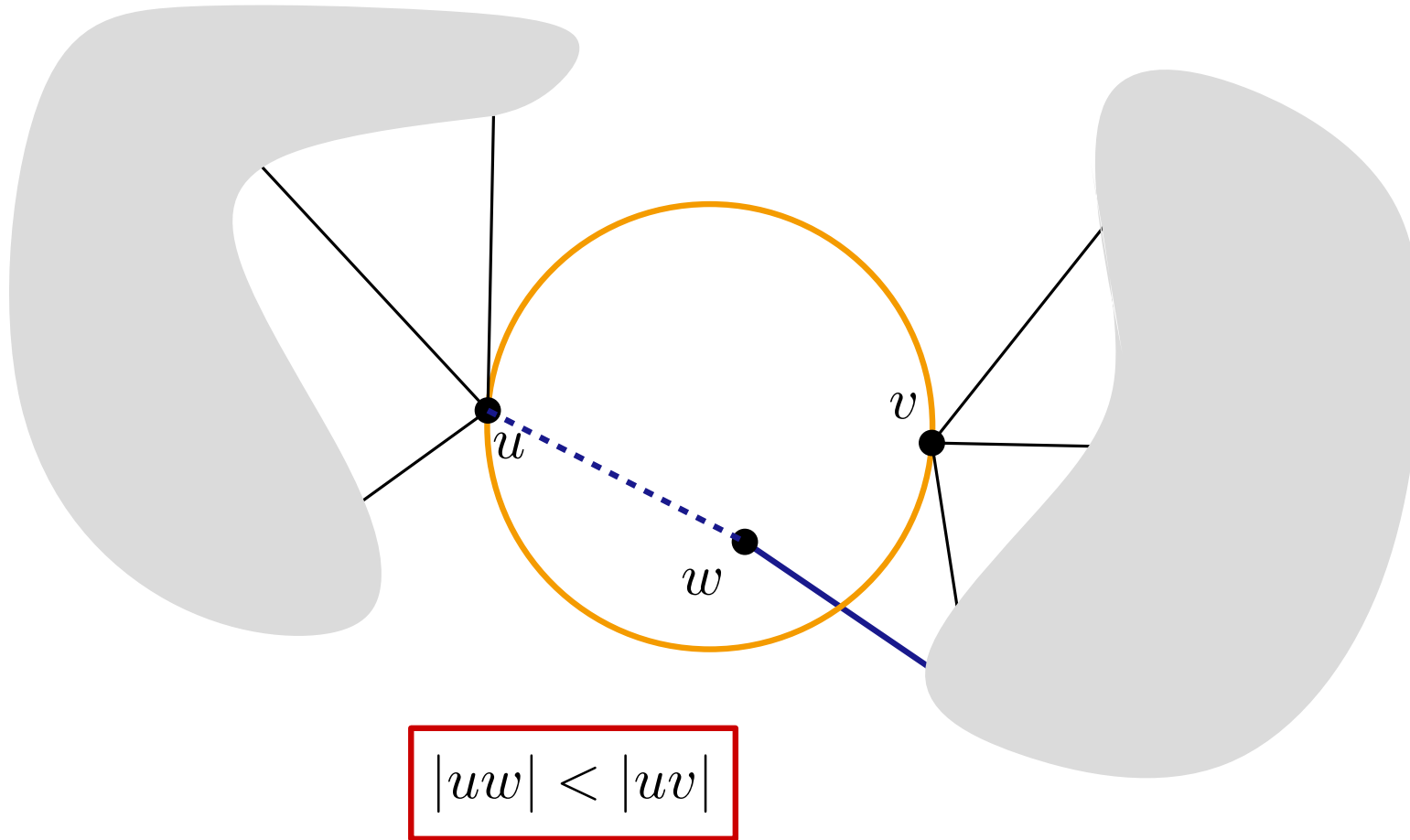
Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Aufgabe 3



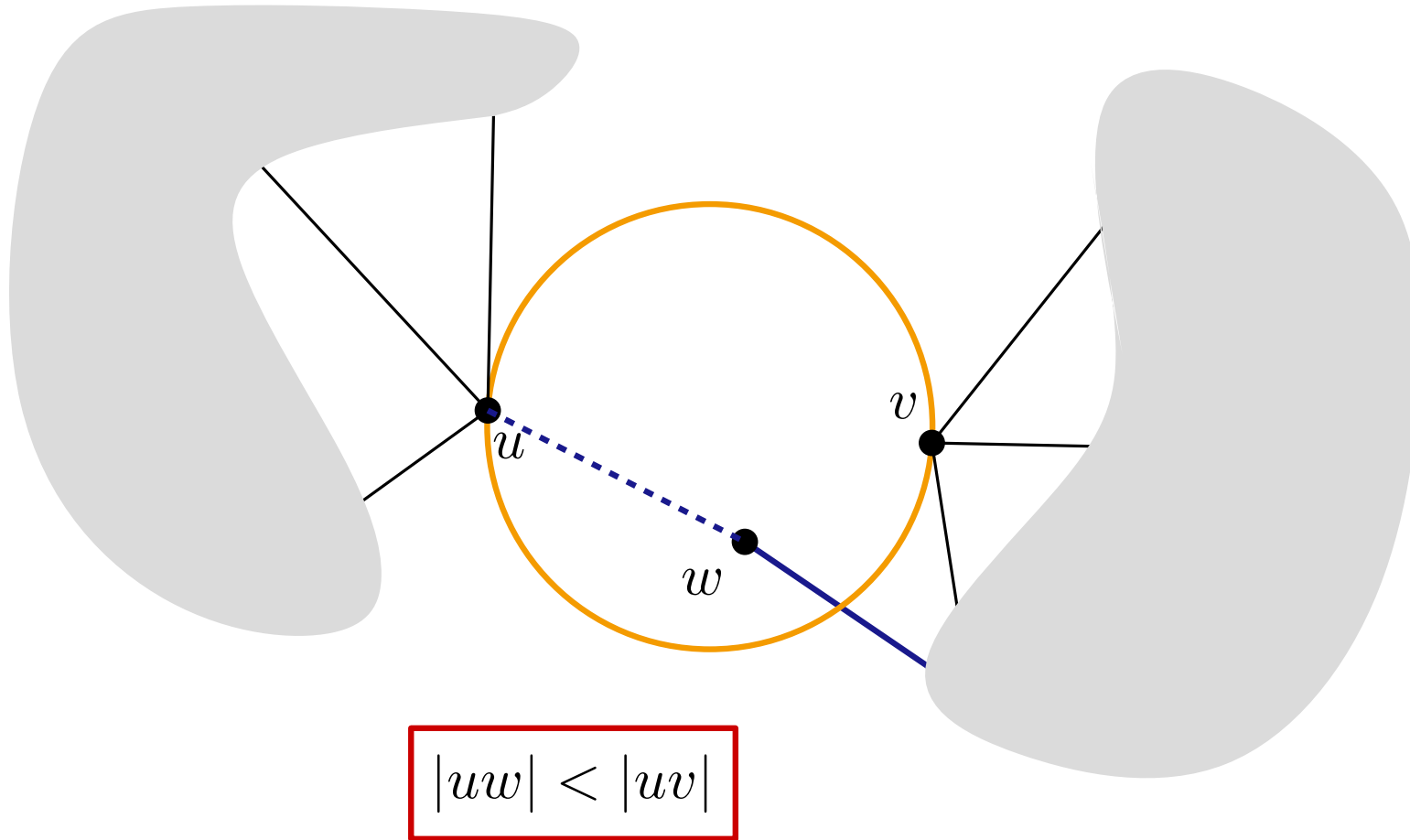
Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Aufgabe 3



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

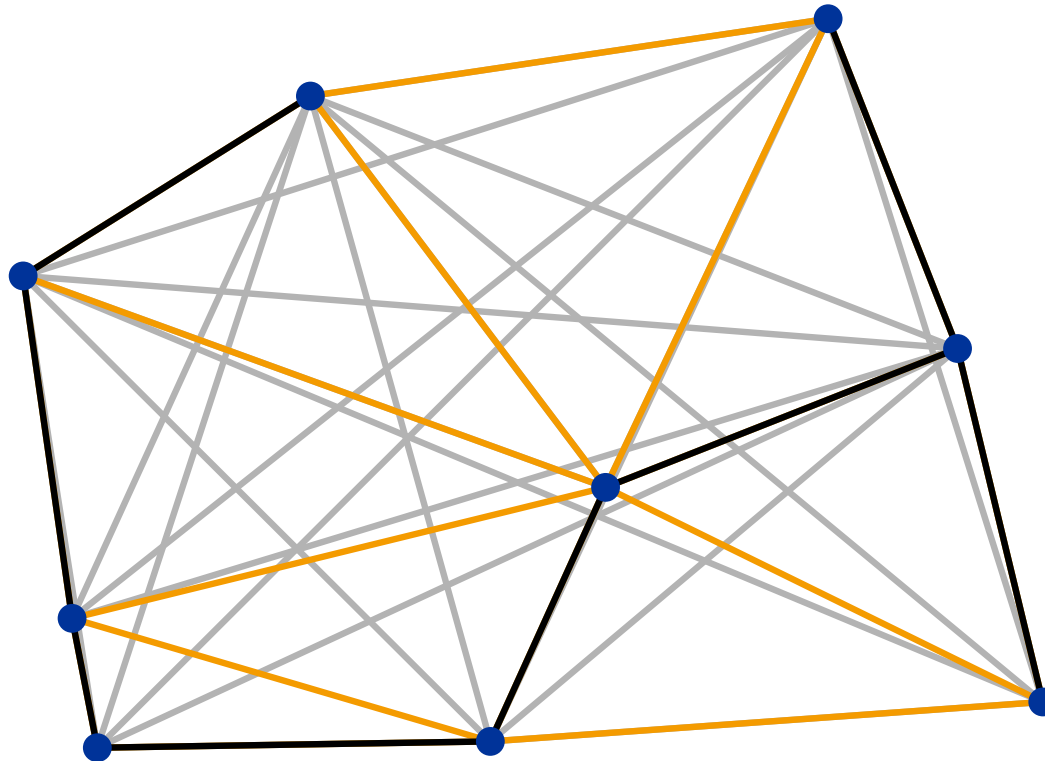
# Aufgabe 3



Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Aufgabe 3

## Euklidischer Minimaler Spannbaum



Berechnung von EMST in  $\mathcal{O}(n \log n)$ ?

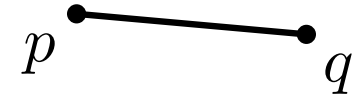
# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.



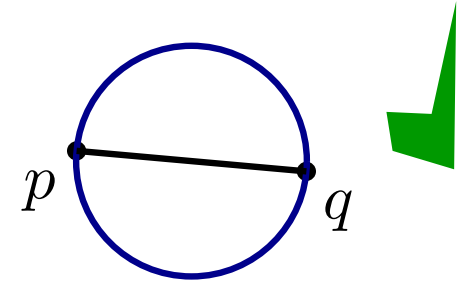
# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.



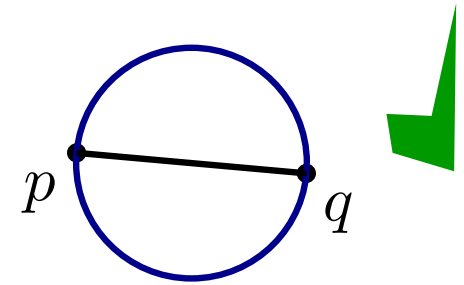
# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.



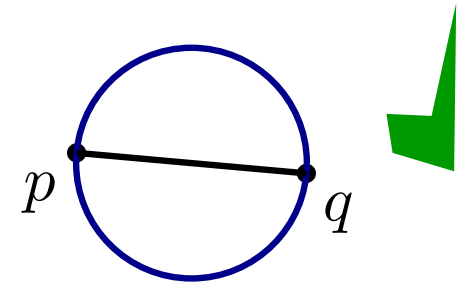
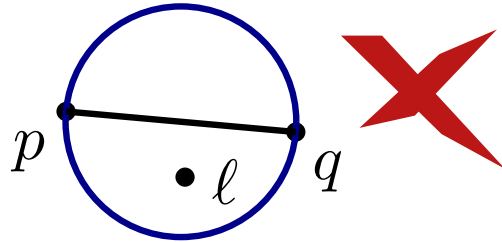
# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.



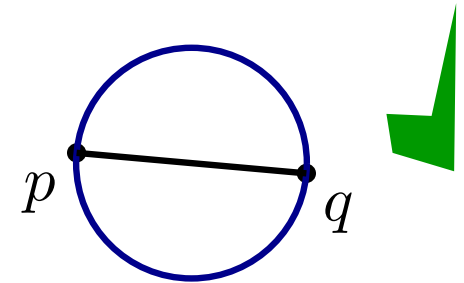
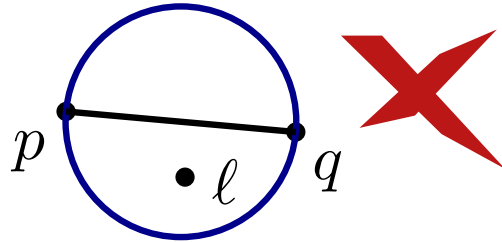
# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.



# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.

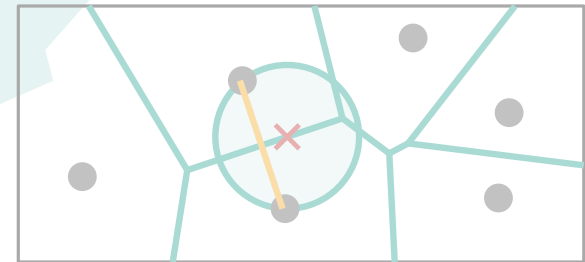
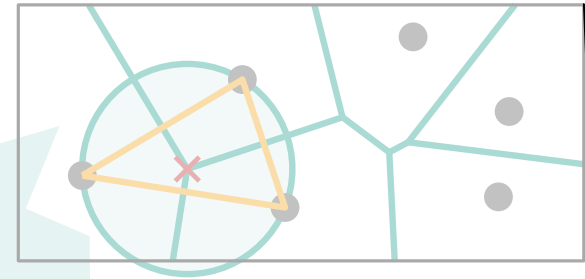


a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von  $P$  den Gabriel Graph von  $P$  enthält.

# Charakterisierung

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



**Satz 4:** Sei  $P$  eine Menge von Punkten.

- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

**Satz 5:** Sei  $P$  Punktmenge und  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung von  $P$ .

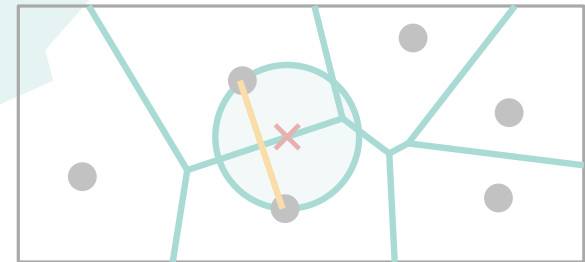
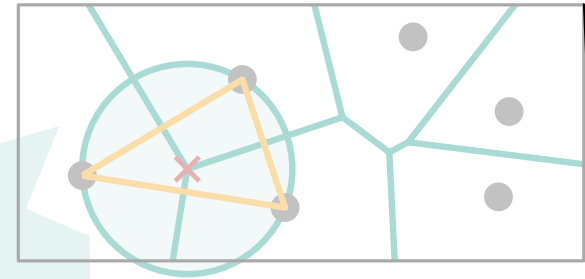
$\mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung

$\Leftrightarrow$  Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

# Charakterisierung

## Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3,$
- der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}.$



## Satz 4: Sei $P$ eine Menge von Punkten.

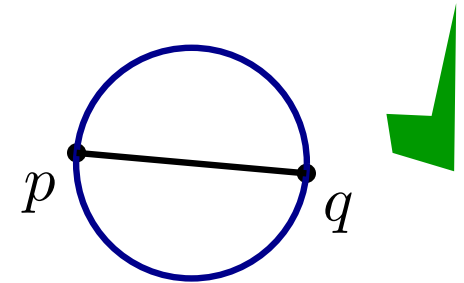
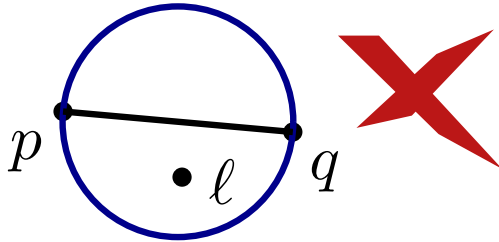
- Punkte  $p, q, r$  sind Knoten der gleichen Facette in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  Kreis durch  $p, q, r$  ist leer
- Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P)$   
 $\Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

## Satz 5: Sei $P$ Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $P$ .

- $\mathcal{T}$  ist Delaunay-Triangulierung  
 $\Leftrightarrow$  Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.



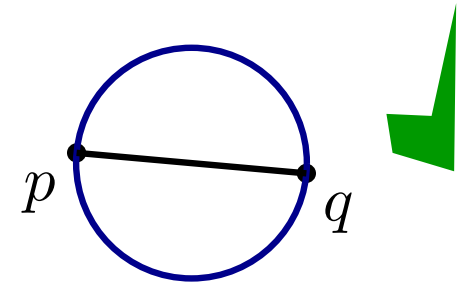
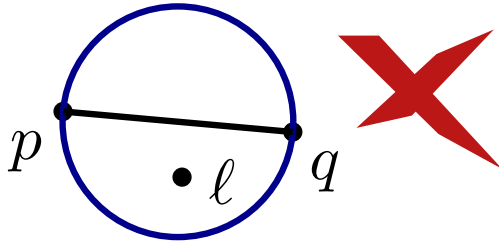
a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von  $P$  den Gabriel Graph von  $P$  enthält.

Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$



# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.



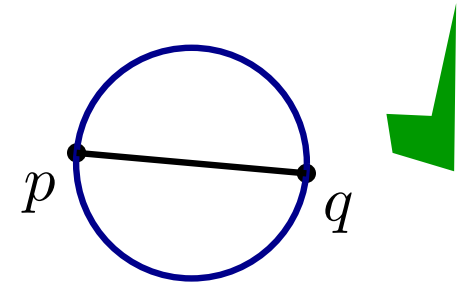
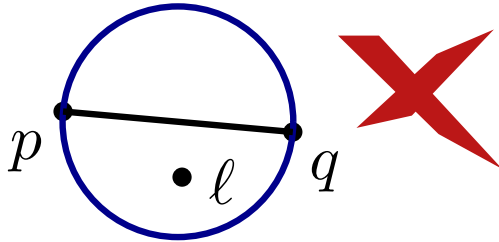
a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von  $P$  den Gabriel Graph von  $P$  enthält.

b) Zeige, dass  $p$  und  $q$  genau dann im Gabriel-Graph von  $P$  adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen  $p$  und  $q$  die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  mit Durchmesser  $|pq|$  leer ist.

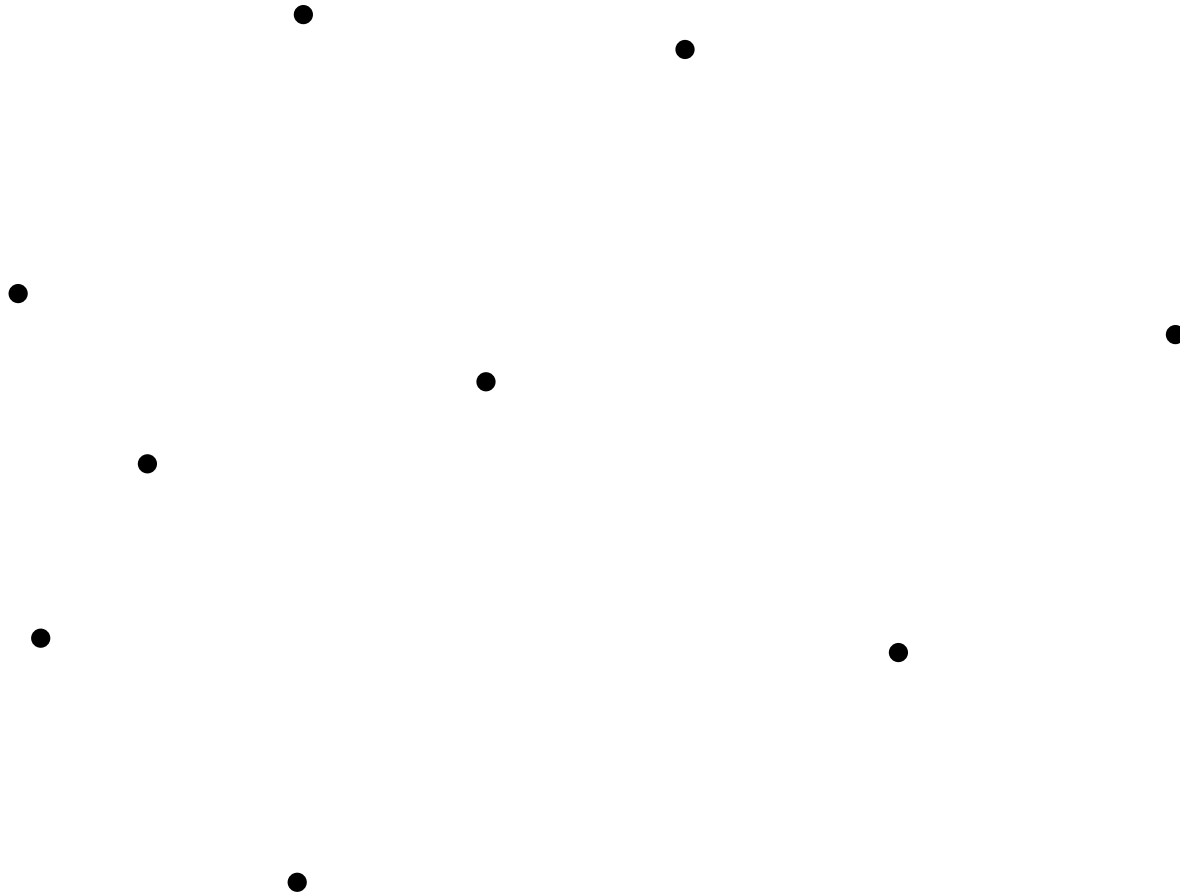


a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von  $P$  den Gabriel Graph von  $P$  enthält.

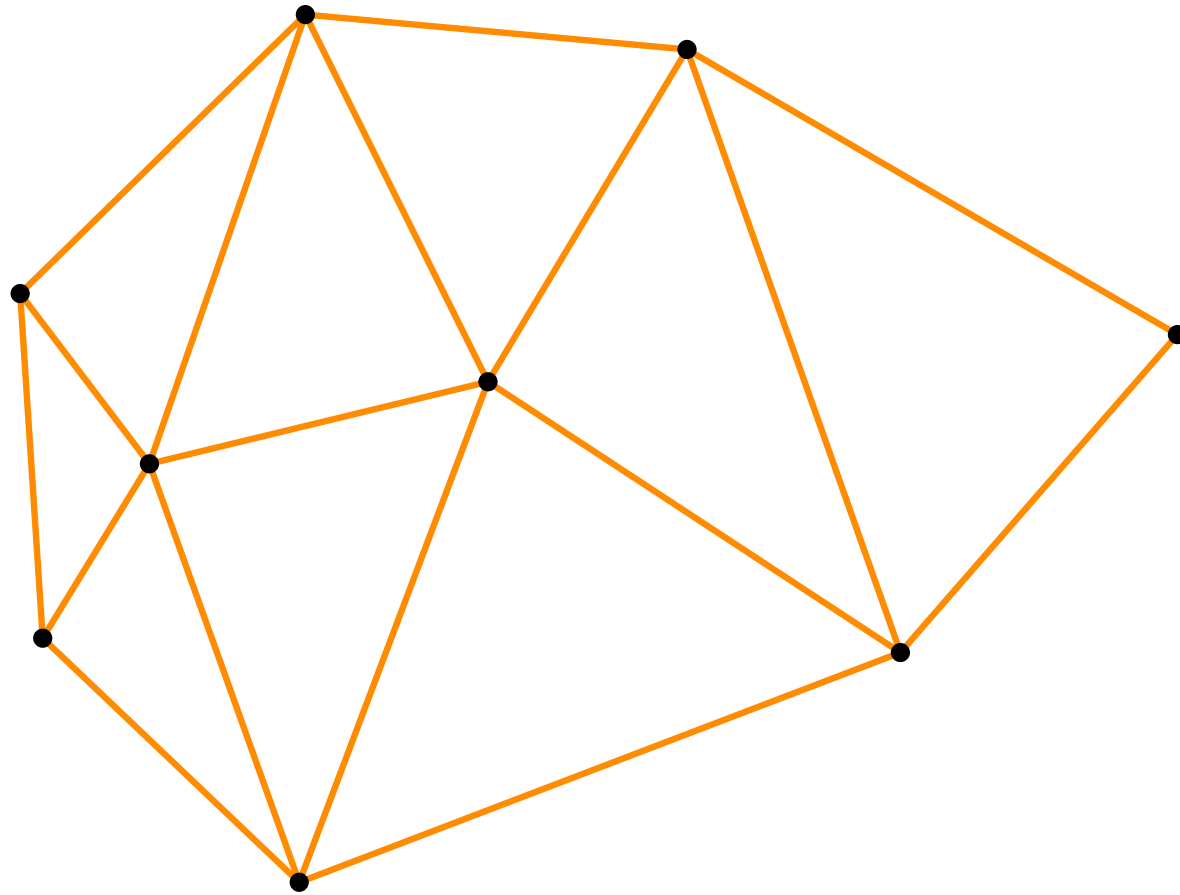
b) Zeige, dass  $p$  und  $q$  genau dann im Gabriel-Graph von  $P$  adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen  $p$  und  $q$  die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

Kante  $pq$  ist in  $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$  es gibt einen leeren Kreis  $C_{p,q}$  durch  $p$  und  $q$

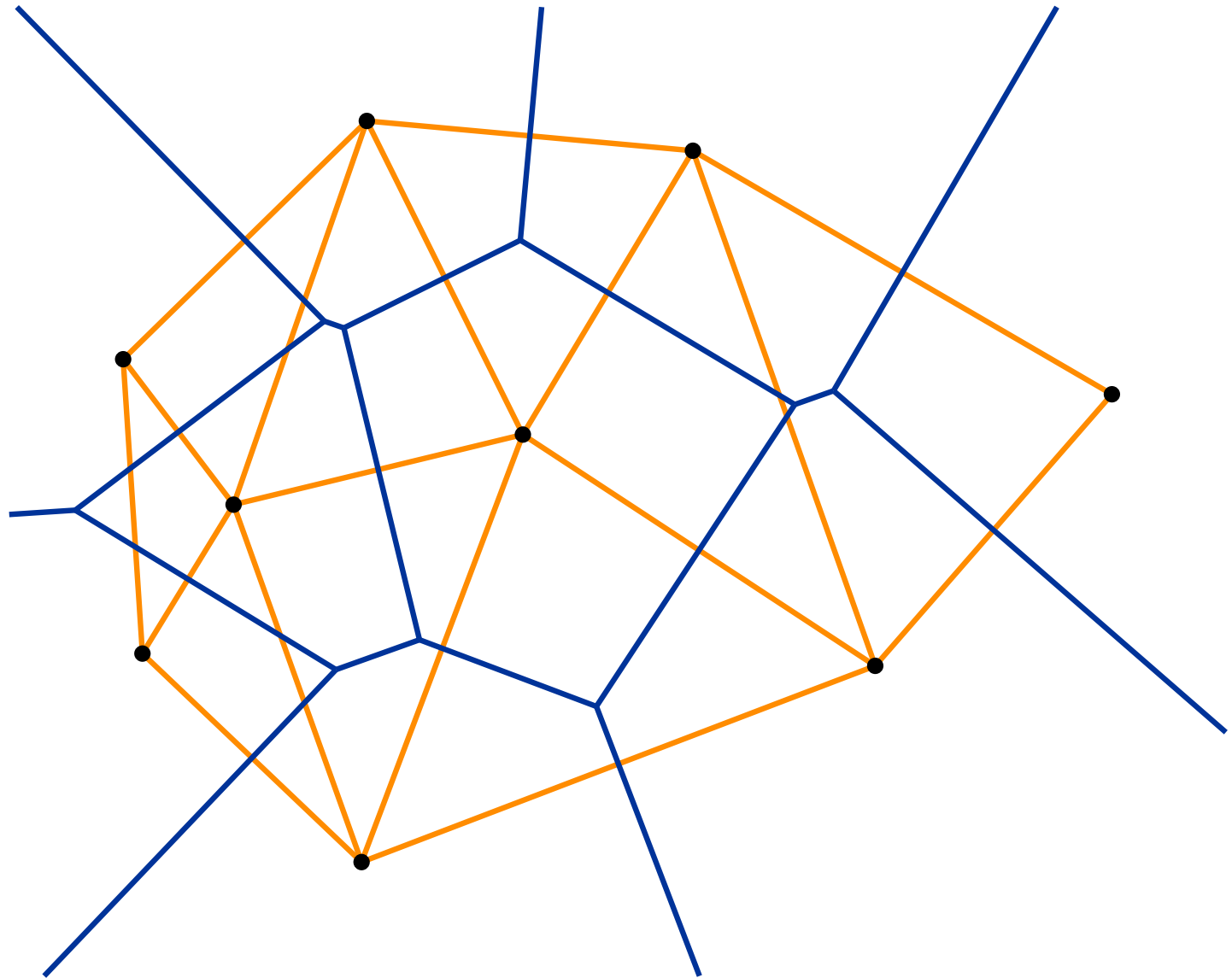
# Aufgabe 4



# Aufgabe 4



# Aufgabe 4



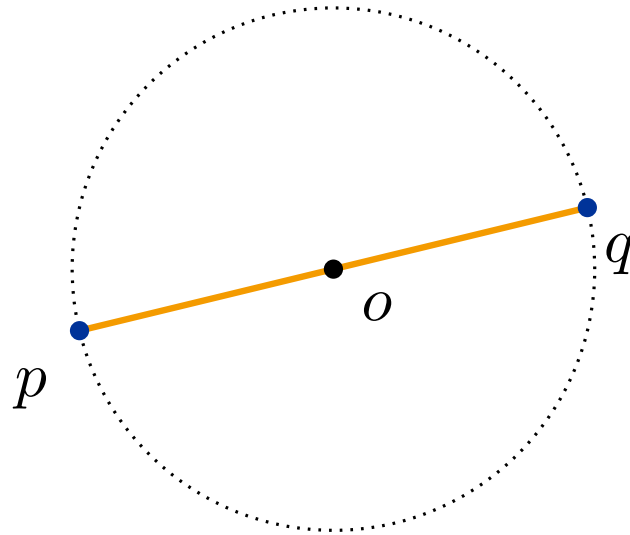
# Aufgabe 4

- $pq$  im Gabriel Graph



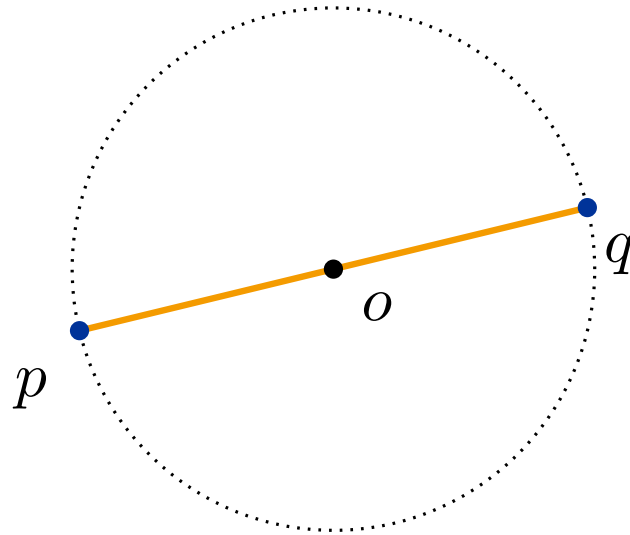
# Aufgabe 4

- $pq$  im Gabriel Graph



# Aufgabe 4

- $pq$  im Gabriel Graph

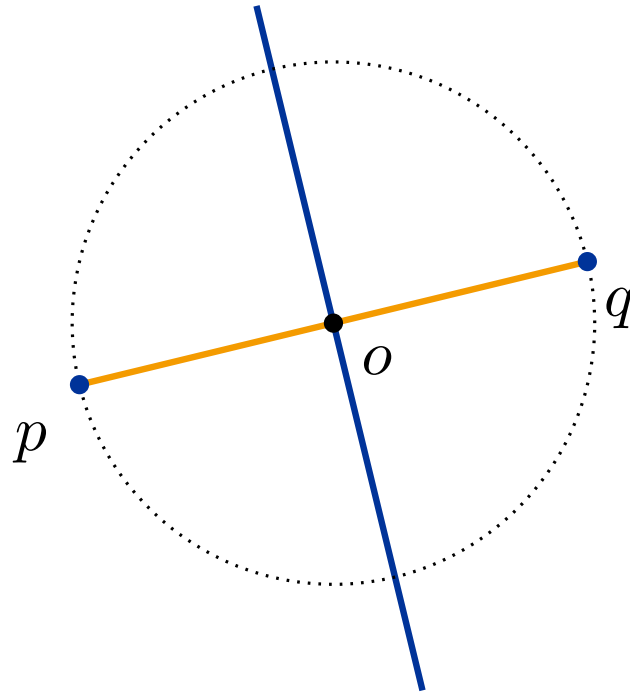


- $o$  näher zu  $p, q$  als zu den anderen Punkten aus  $P$



# Aufgabe 4

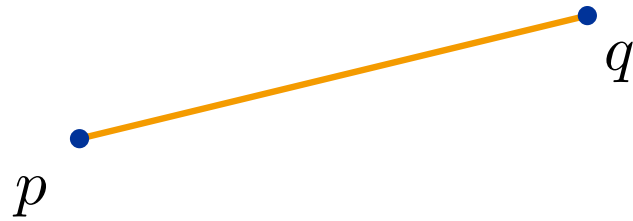
- $pq$  im Gabriel Graph



- $o$  näher zu  $p, q$  als zu den anderen Punkten aus  $P$   
 $\Rightarrow o$  liegt auf Voronoi-Kante welche Voronoi-Zellen von  $q$  und  $p$  begrenzt

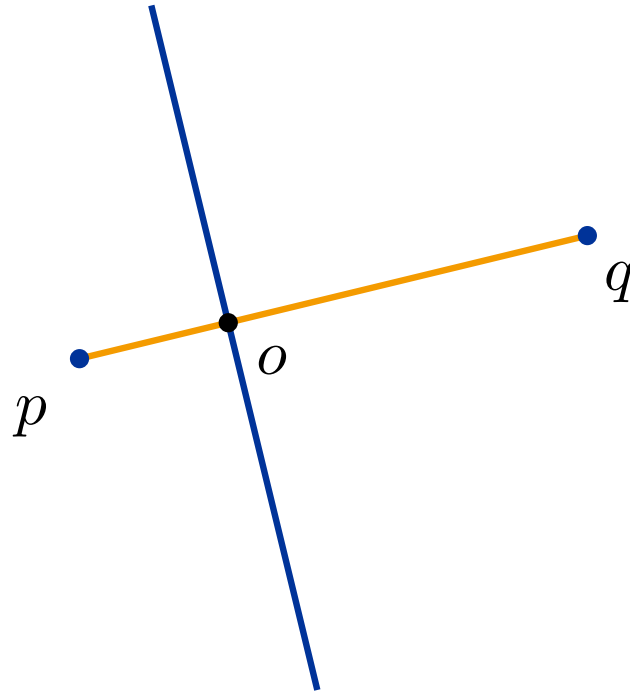
# Aufgabe 4

- $pq$  schneidet duale Voronoi-Kante



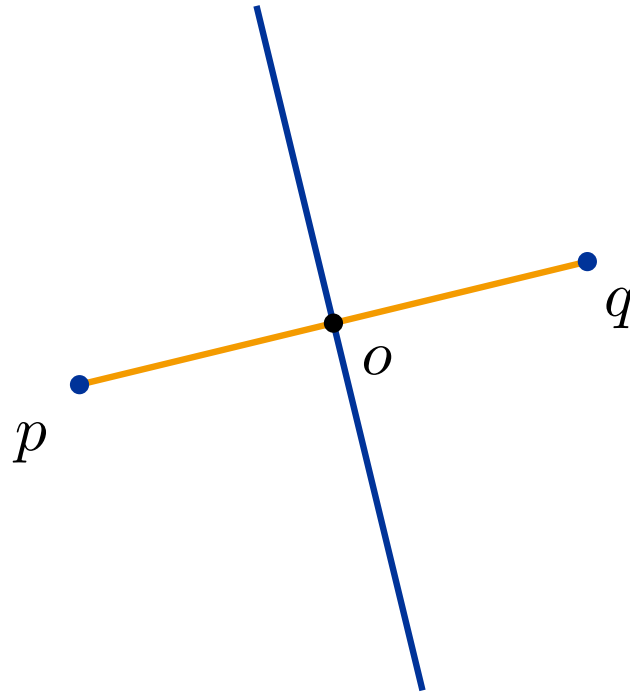
# Aufgabe 4

- $pq$  schneidet duale Voronoi-Kante



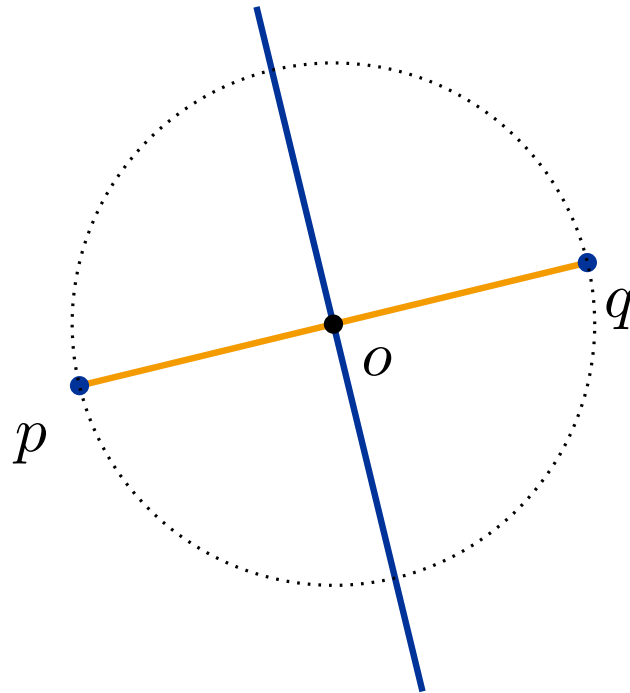
# Aufgabe 4

- $pq$  schneidet duale Voronoi-Kante



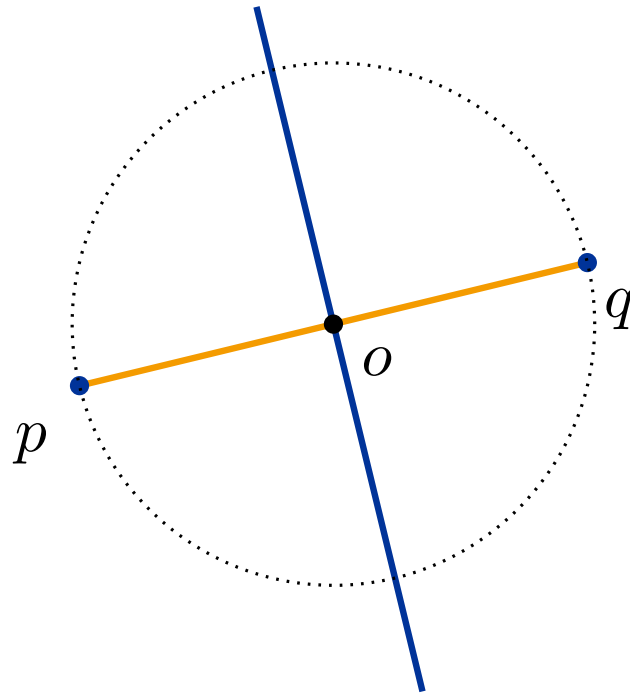
# Aufgabe 4

- $pq$  schneidet duale Voronoi-Kante



# Aufgabe 4

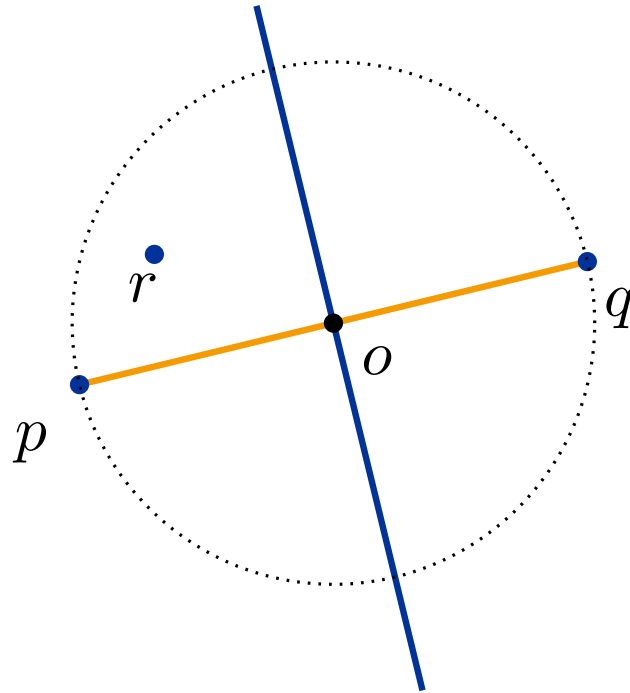
- $pq$  schneidet duale Voronoi-Kante



- Angenommen Punkt  $r$  in  $C$ .

# Aufgabe 4

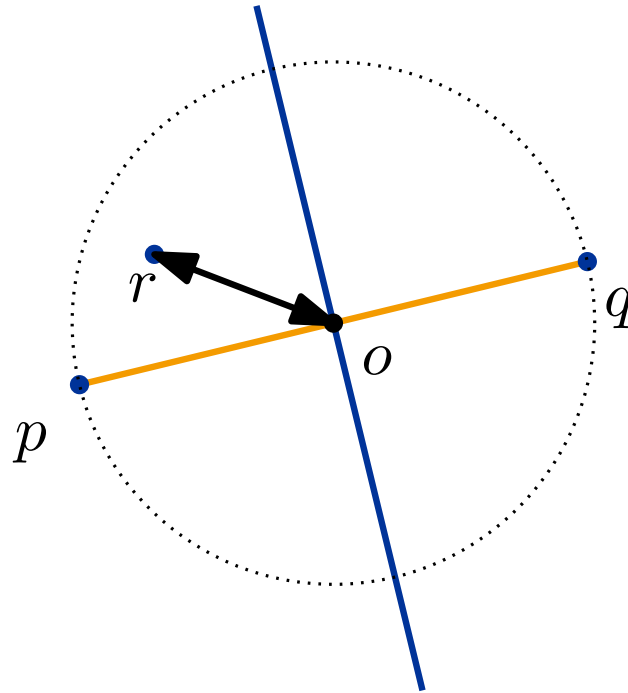
- $pq$  schneidet duale Voronoi-Kante



- Angenommen Punkt  $r$  in  $C$ .

# Aufgabe 4

- $pq$  schneidet duale Voronoi-Kante

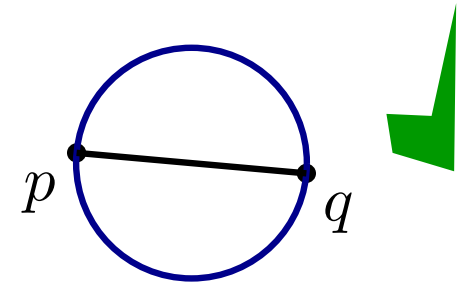
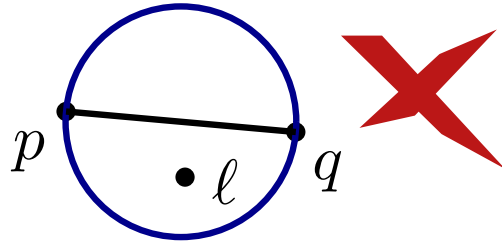


- Angenommen Punkt  $r$  in  $C$ .
  - ⇒ Distanz zw.  $o$  und  $r$  kleiner als  $|op|$  ( $|oq|$ )
  - ⇒ Widerspruch zur Annahme, dass  $o$  auf Voronoi-Kante



# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  leer ist.

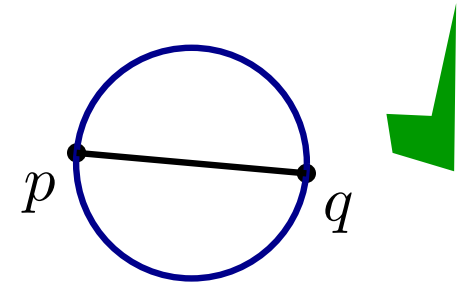
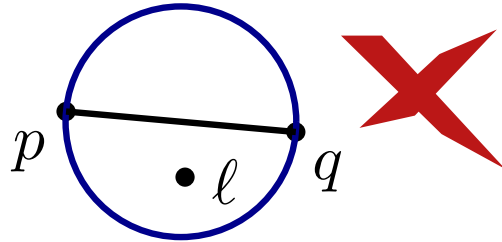


a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von  $P$  den Gabriel Graph von  $P$  enthält.

b) Zeige, dass  $p$  und  $q$  genau dann im Gabriel-Graph von  $P$  adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen  $p$  und  $q$  die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

# Aufgabe 4

- Gabriel Graph:  $p, q$  mit Kante verbunden, wenn Kreis  $C_{p,q}$  leer ist.



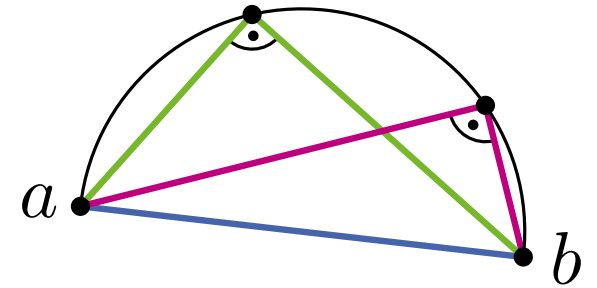
a) Zeige, dass Delaunay Triangulierung von  $P$  den Gabriel Graph von  $P$  enthält.

b) Zeige, dass  $p$  und  $q$  genau dann im Gabriel-Graph von  $P$  adjazent sind, wenn die Delaunay Kante zwischen  $p$  und  $q$  die zu ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

c)  $\mathcal{O}(n \log n)$  Algorithmus der Gabriel-Graph berechnet?

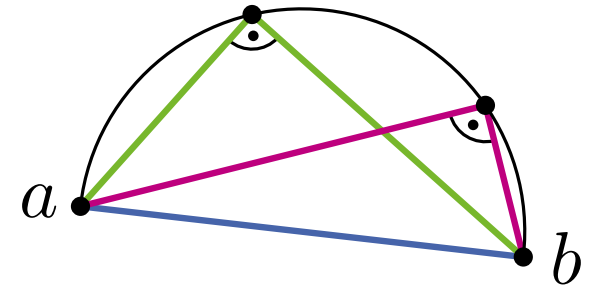
# Der Satz von Thales

**Satz 2:** Alle Dreiecke aus den Endpunkten des Kreisdurchmessers und eines Halbkreispunktes sind rechtwinklig.

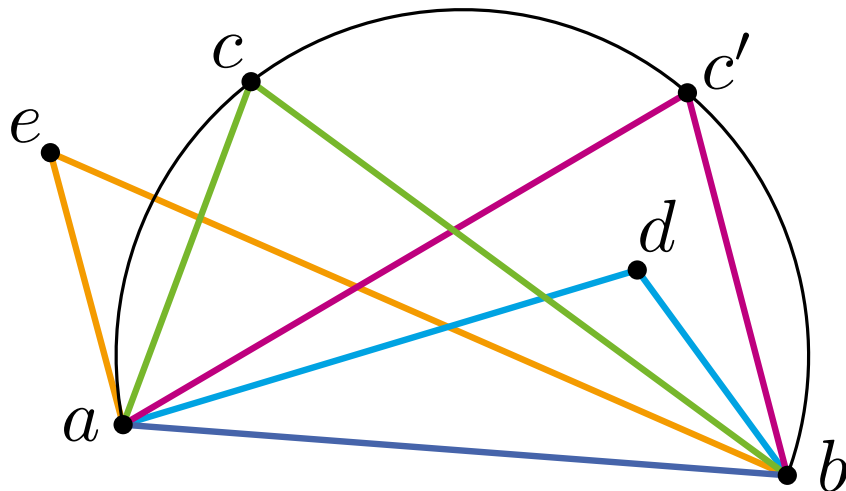


# Der Satz von Thales

**Satz 2:** Alle Dreiecke aus den Endpunkten des Kreisdurchmessers und eines Halbkreispunktes sind rechtwinklig.



**Satz 2':** Alle Dreiecke aus den Endpunkten einer Sekante  $\ell = \overline{ab}$  und eines Kreispunktes  $c$  auf der gleichen Seite von  $\ell$  haben den gleichen Winkel an  $c$ . Für Dreiecke  $\triangle abd$  mit  $d$  innerhalb des Kreises gilt  $\angle adb > \angle acd$ , für  $e$  außerhalb des Kreises gilt  $\angle aeb < \angle acd$ .



$$\angle aeb < \angle acb = \angle ac'b < \angle adb$$

# Aufgabe 5

## Problem:

- $P$  konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- $\mathcal{T}$  eine beliebige Triangulierung von  $P$

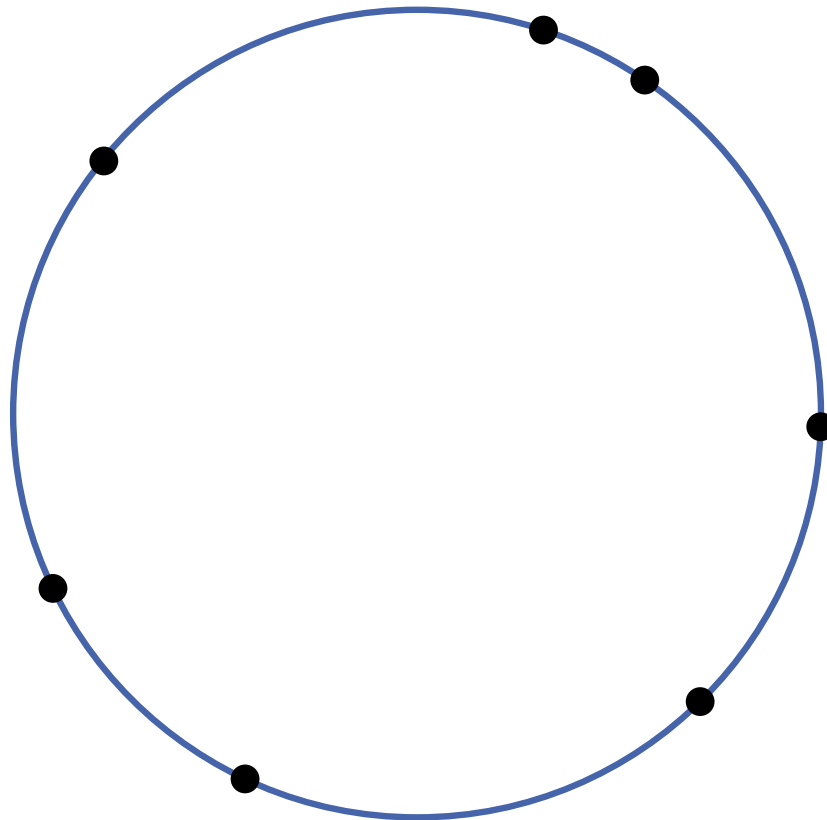
Zeige, kleinster Winkel in  $\mathcal{T}$  ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von  $P$

# Aufgabe 5

## Problem:

- $P$  konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- $\mathcal{T}$  eine beliebige Triangulierung von  $P$

Zeige, kleinster Winkel in  $\mathcal{T}$  ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von  $P$

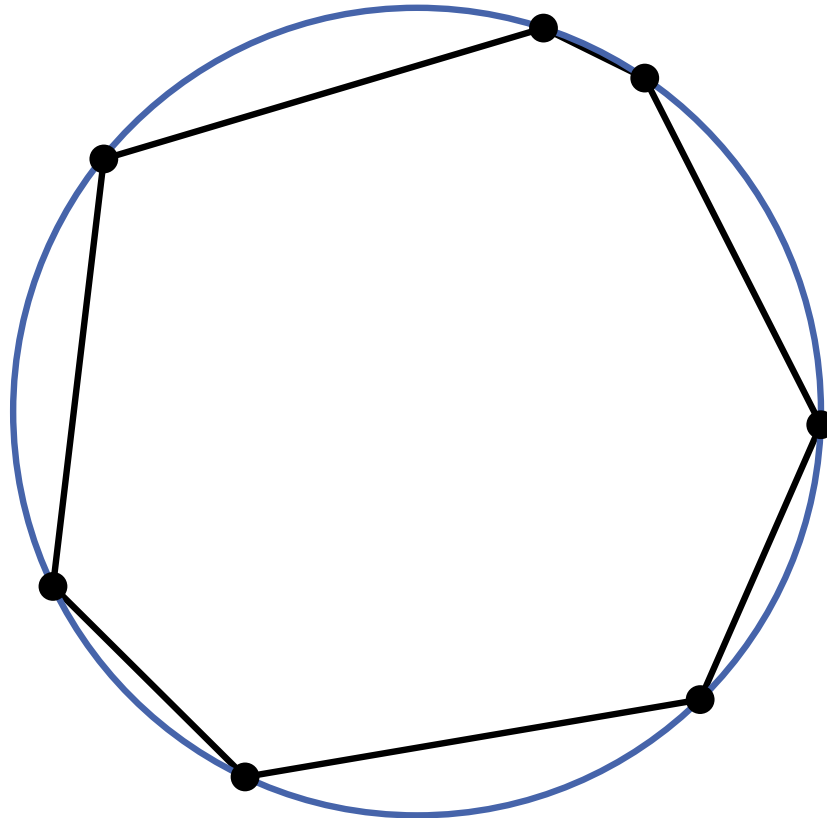


# Aufgabe 5

## Problem:

- $P$  konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- $\mathcal{T}$  eine beliebige Triangulierung von  $P$

Zeige, kleinster Winkel in  $\mathcal{T}$  ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von  $P$

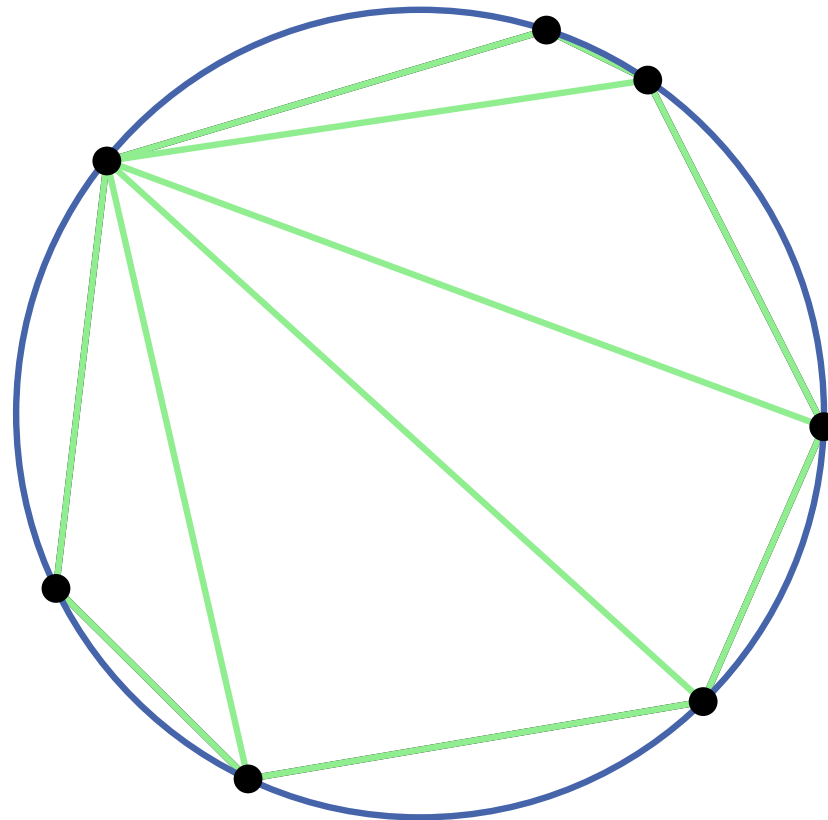


# Aufgabe 5

## Problem:

- $P$  konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- $\mathcal{T}$  eine beliebige Triangulierung von  $P$

Zeige, kleinster Winkel in  $\mathcal{T}$  ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von  $P$





# Aufgabe 5

## Problem:

- $P$  konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- $\mathcal{T}$  eine beliebige Triangulierung von  $P$

Zeige, kleinster Winkel in  $\mathcal{T}$  ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von  $P$

