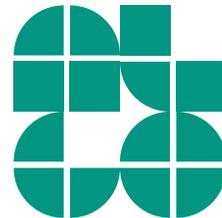


# Übung Algorithmische Geometrie

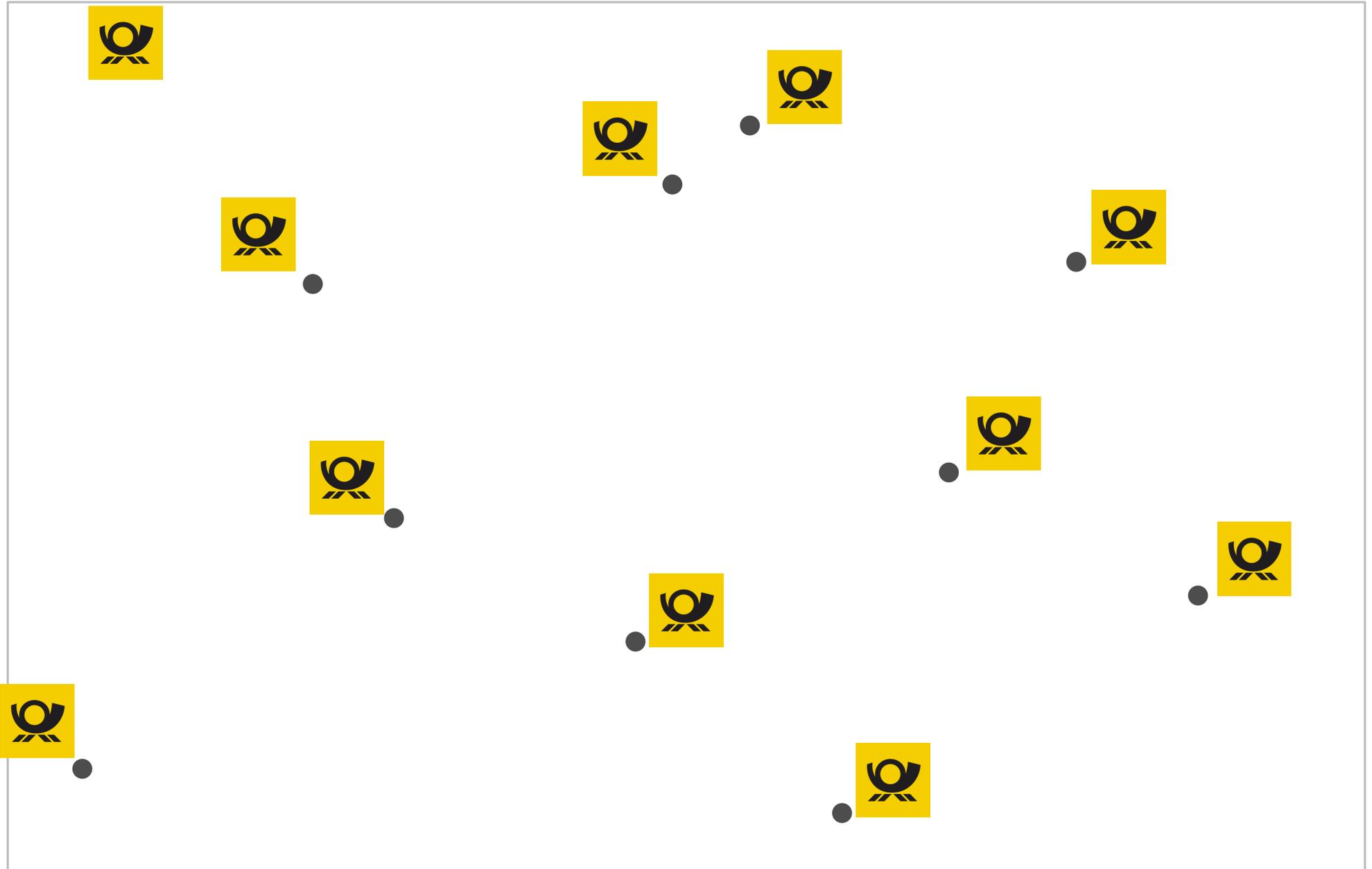
## Voronoi-Diagramme

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

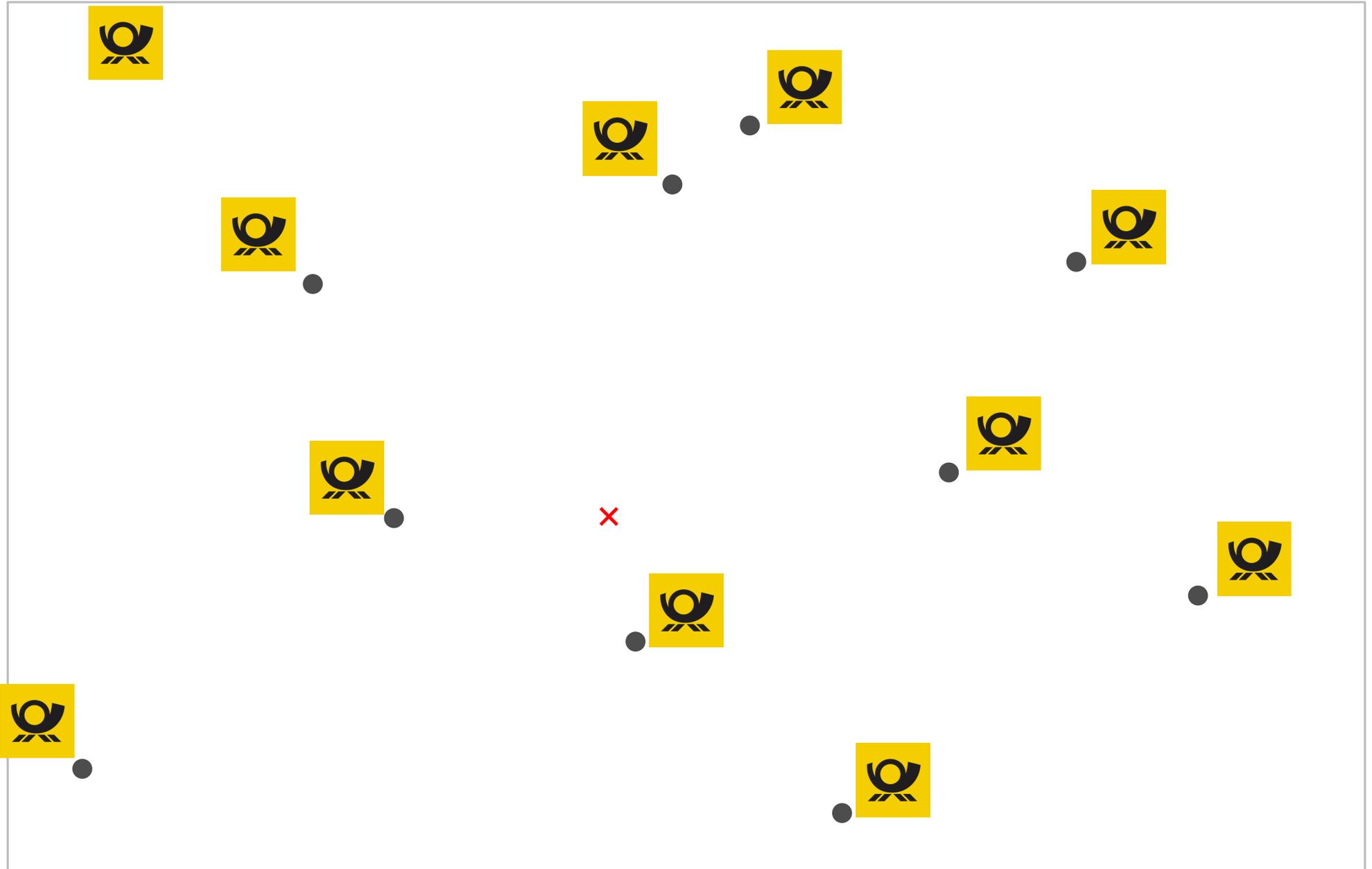
Benjamin Niedermann  
11.06.2014



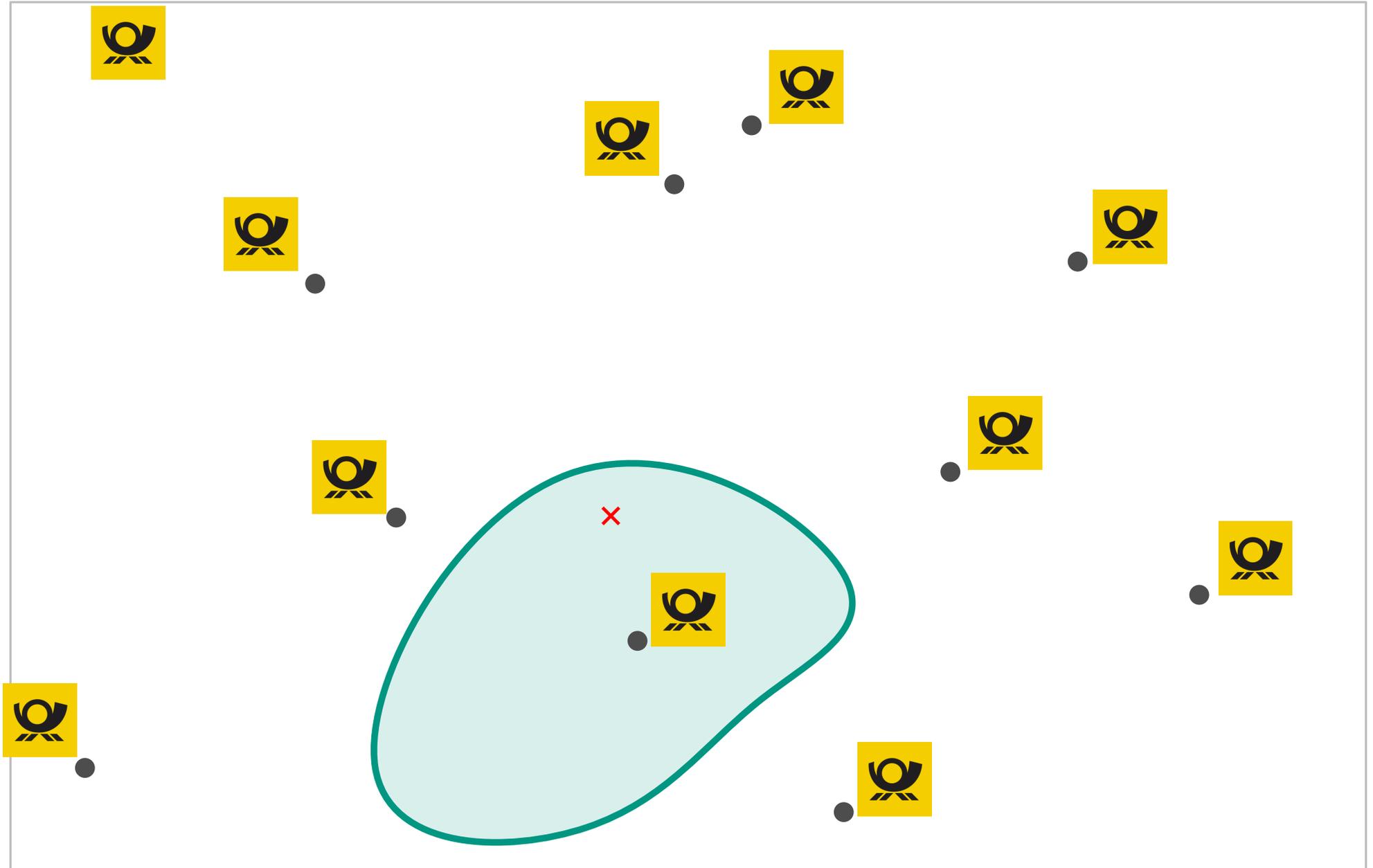
# Das Postamt-Problem



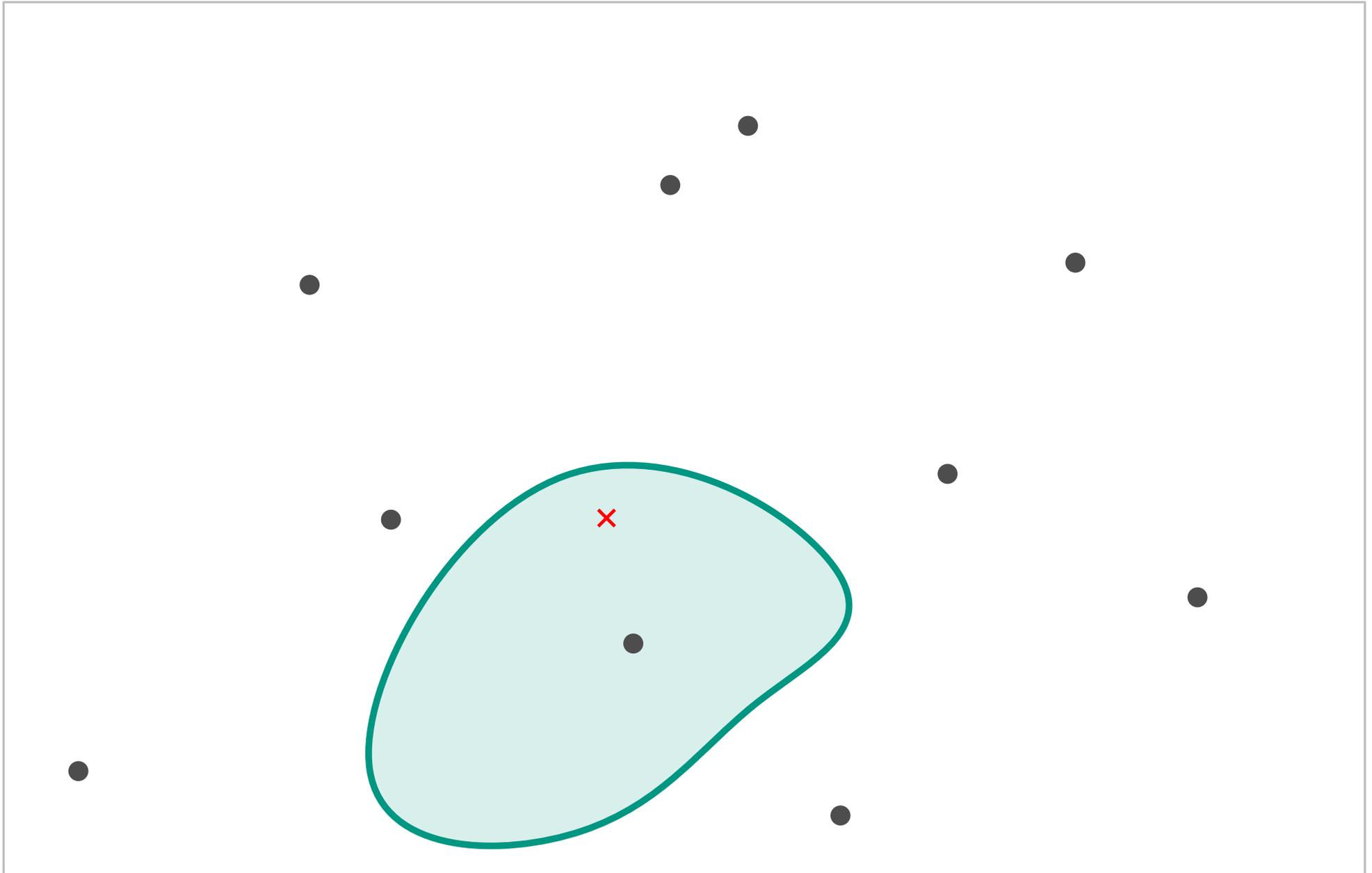
# Das Postamt-Problem



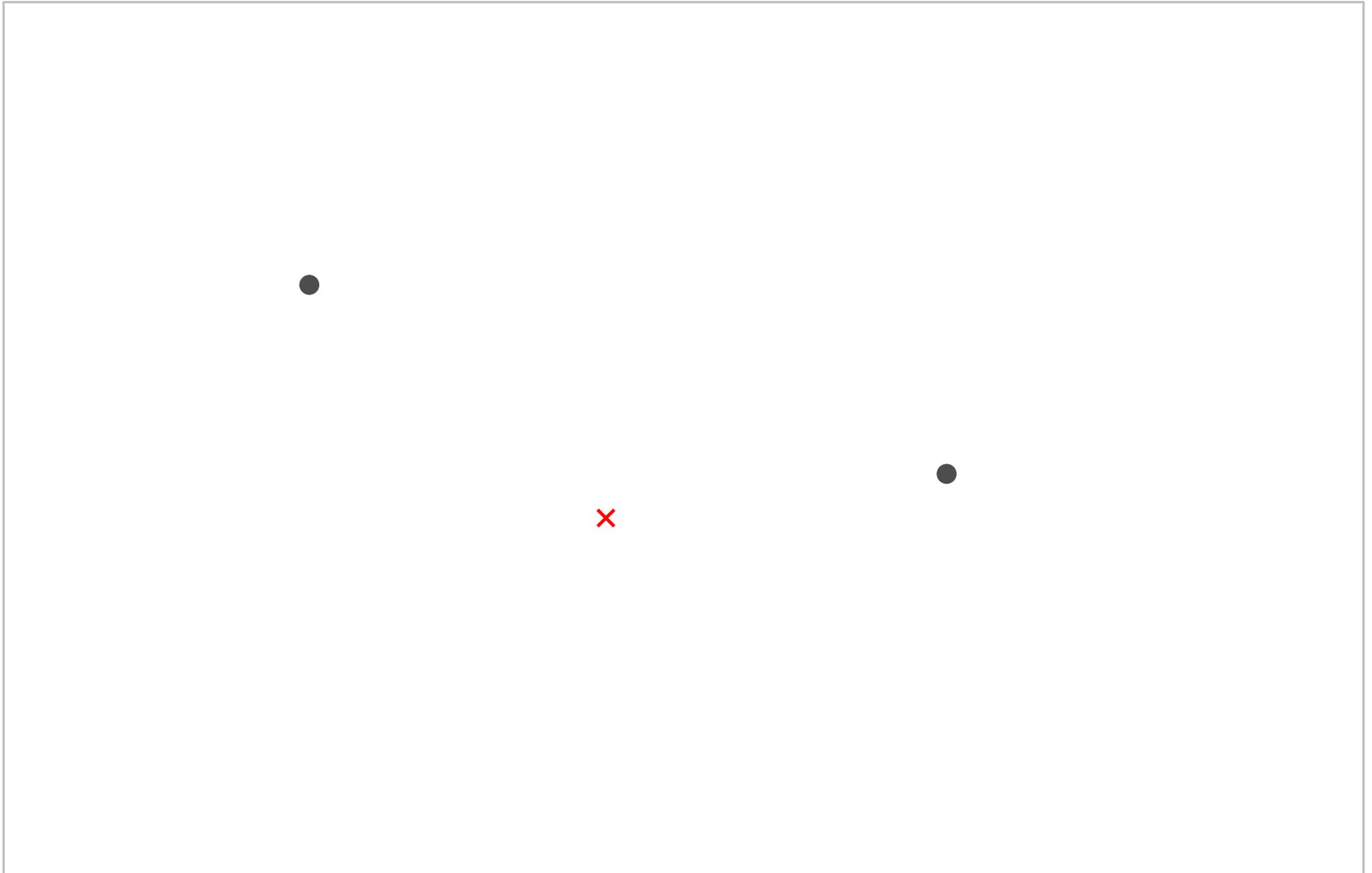
# Das Postamt-Problem



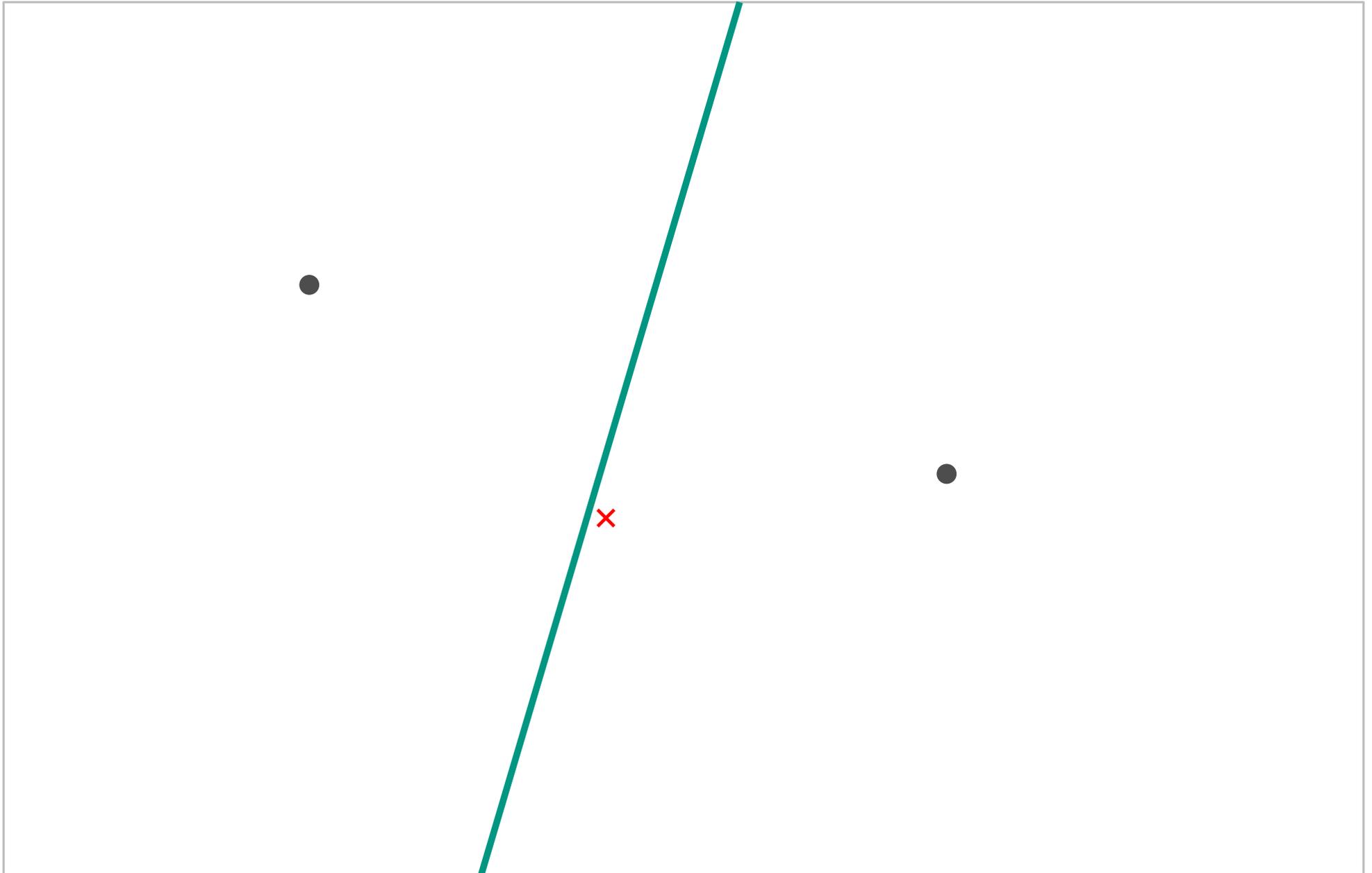
# Das Postamt-Problem



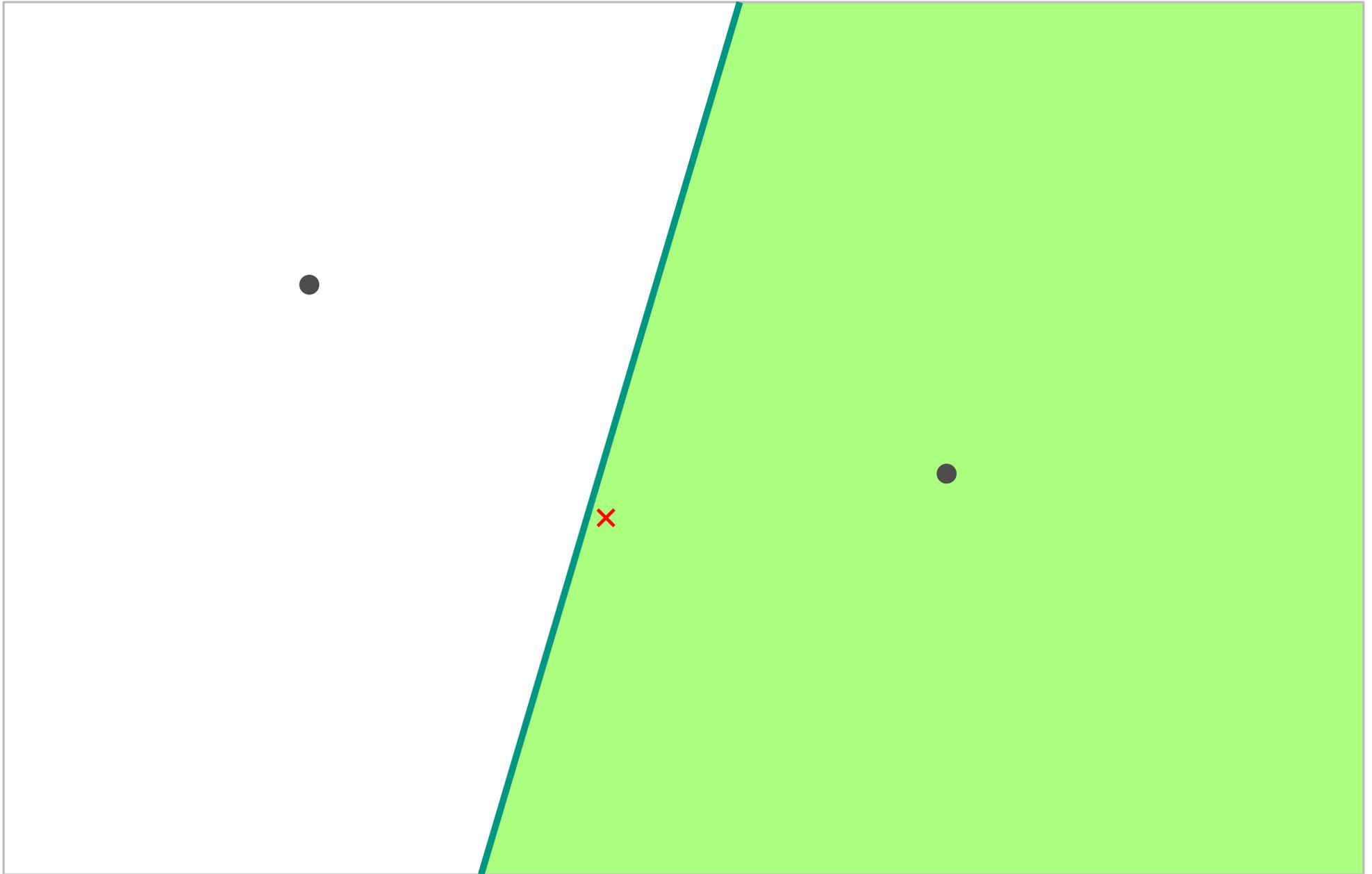
# Das Postamt-Problem



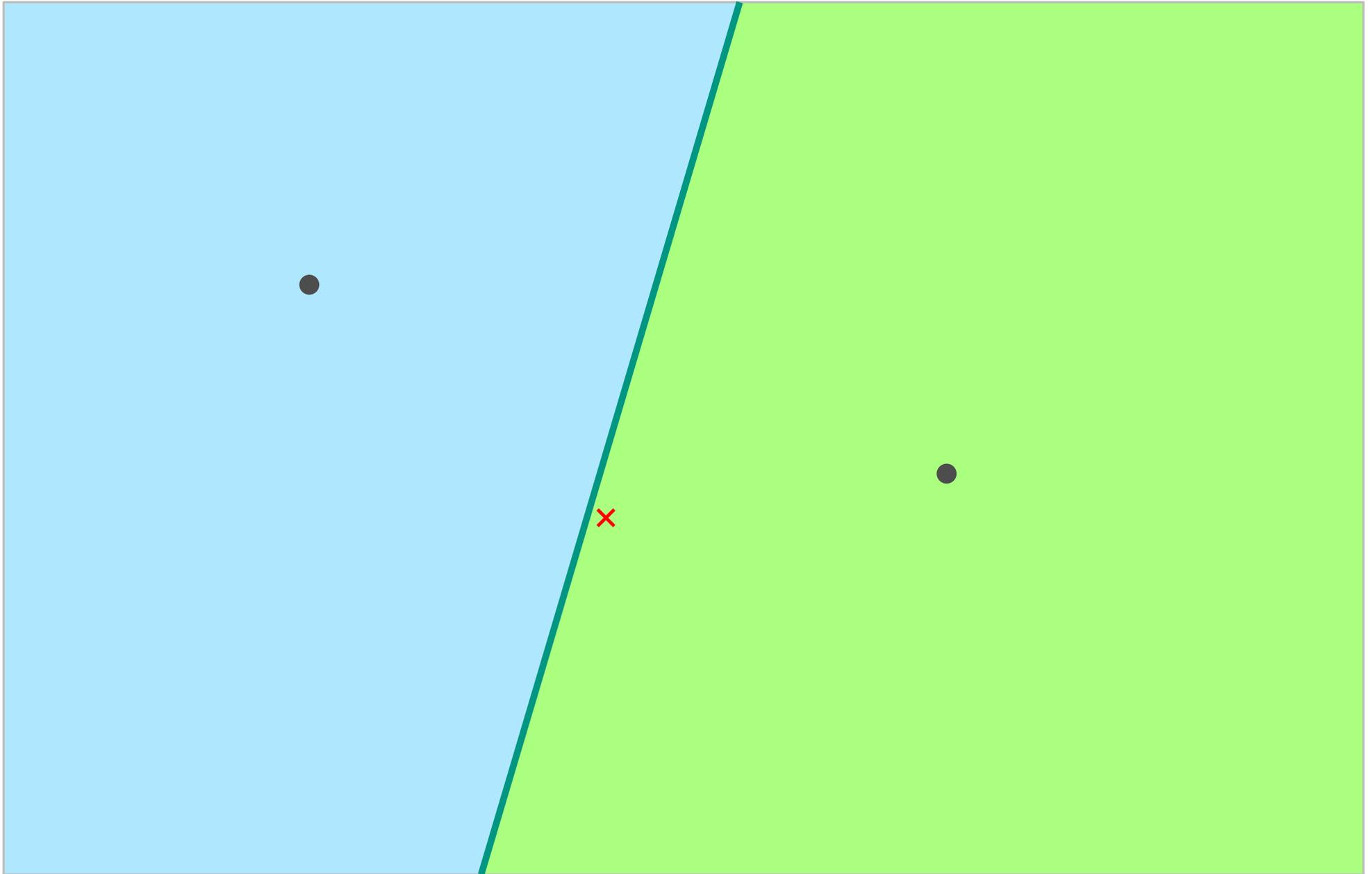
# Das Postamt-Problem



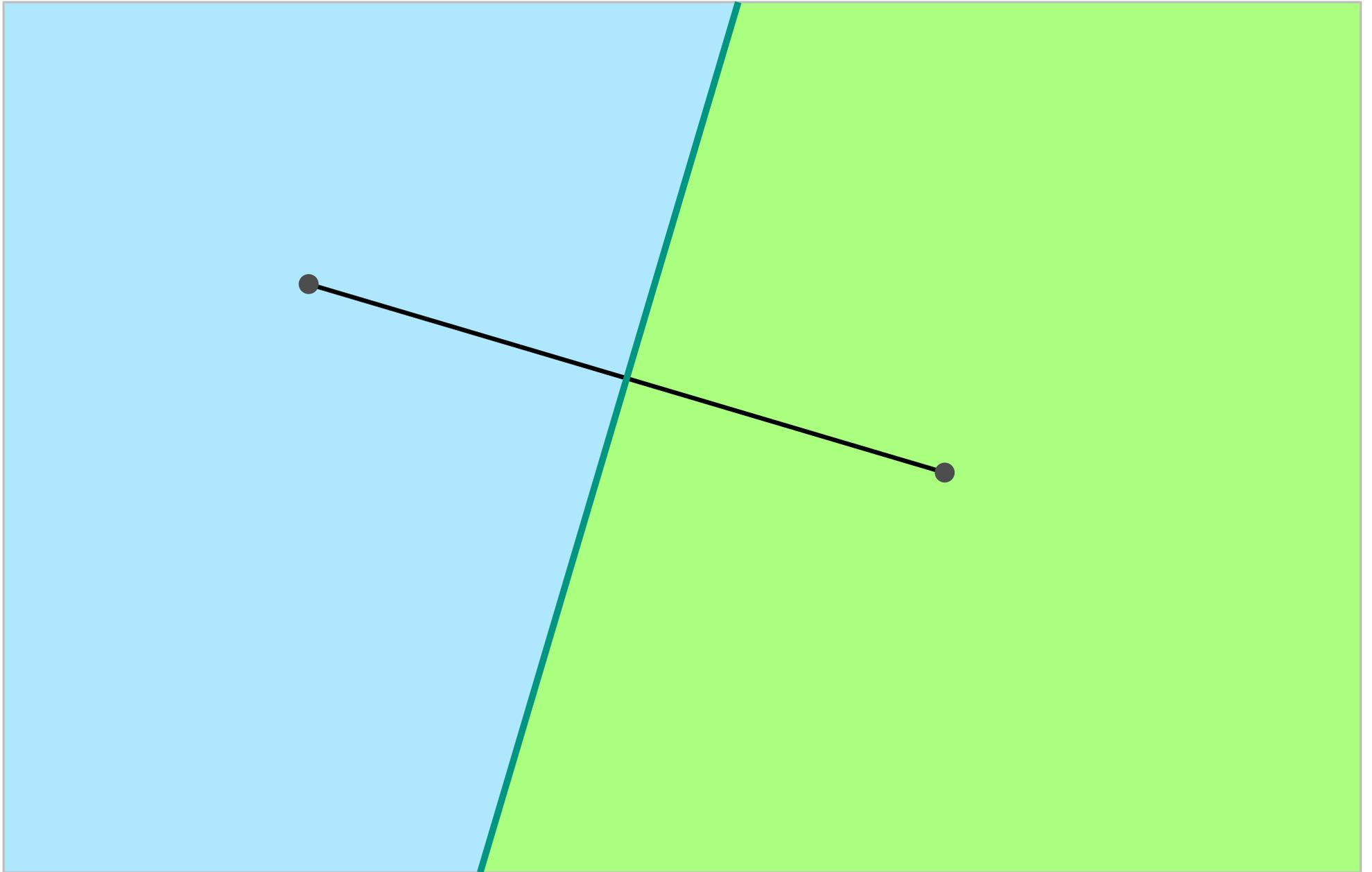
# Das Postamt-Problem



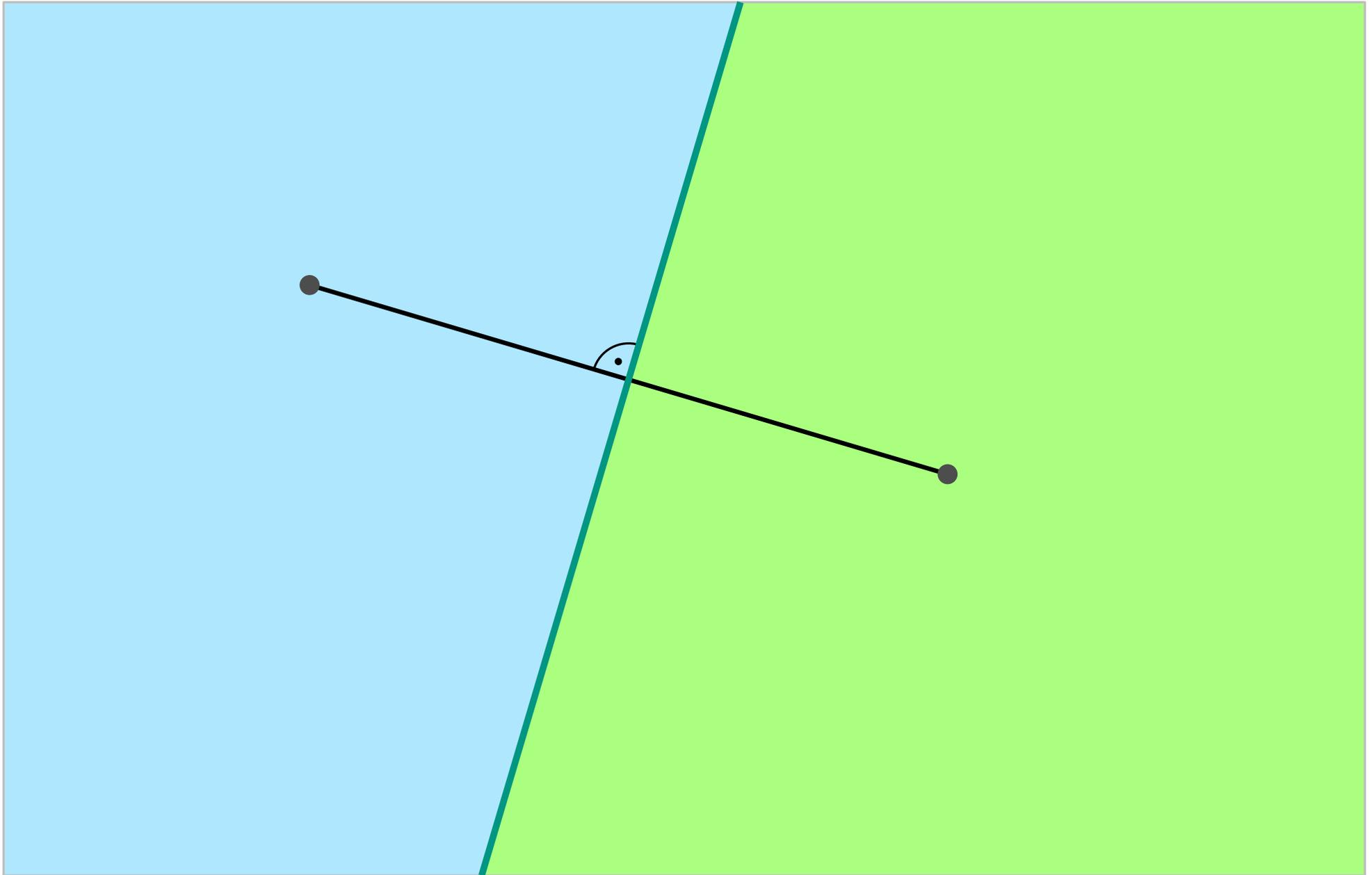
# Das Postamt-Problem



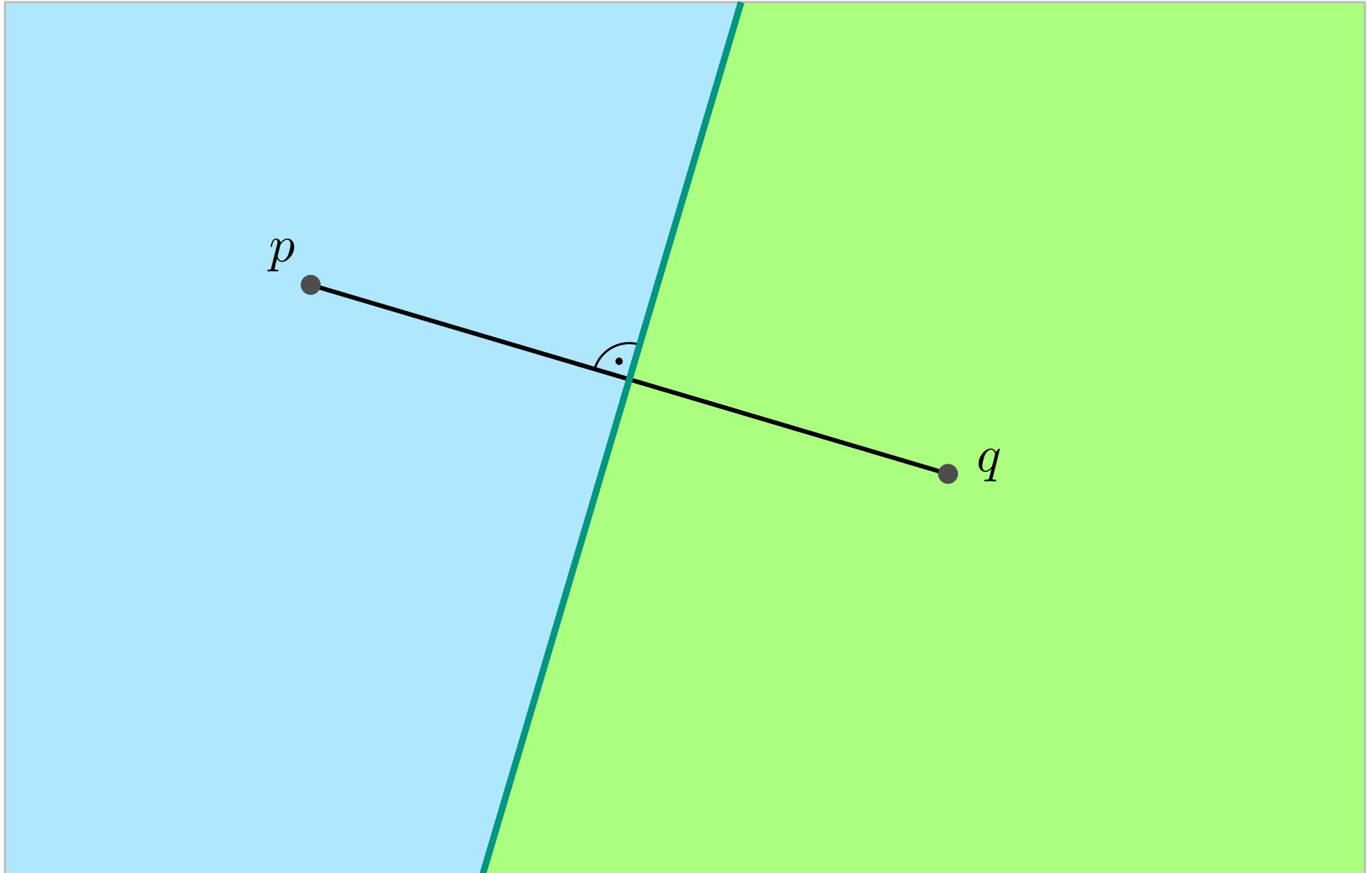
# Das Postamt-Problem



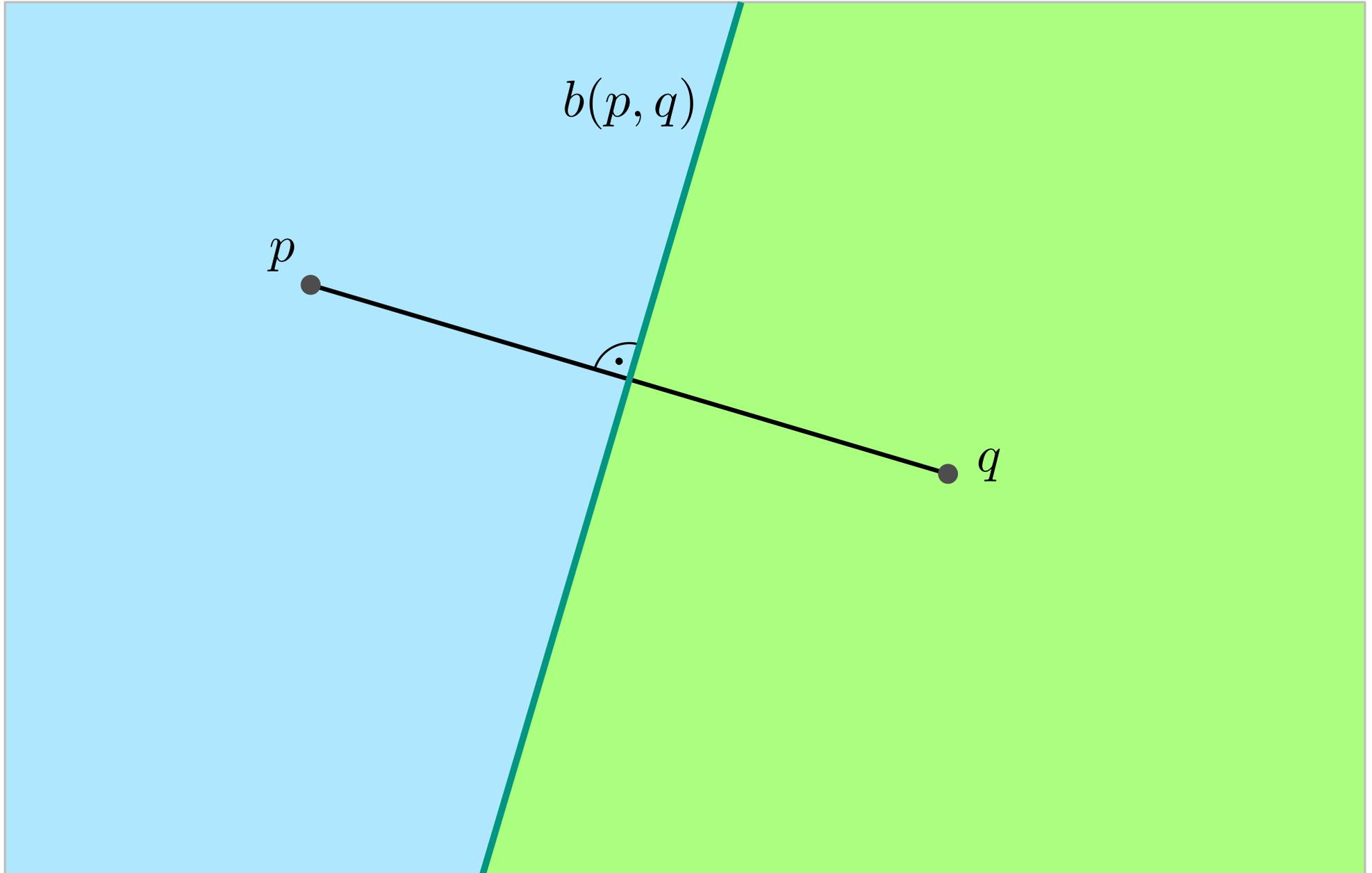
# Das Postamt-Problem



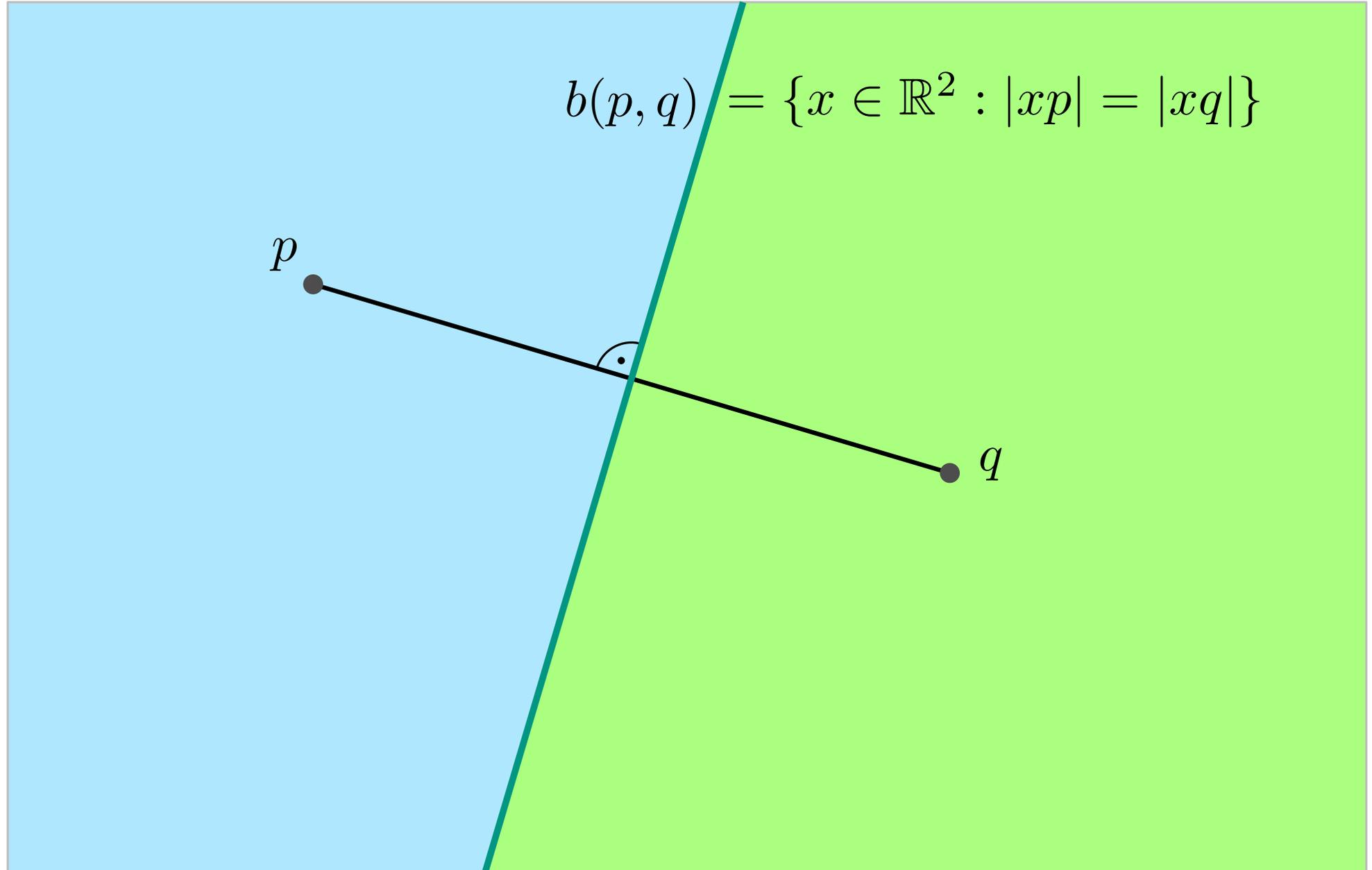
# Das Postamt-Problem



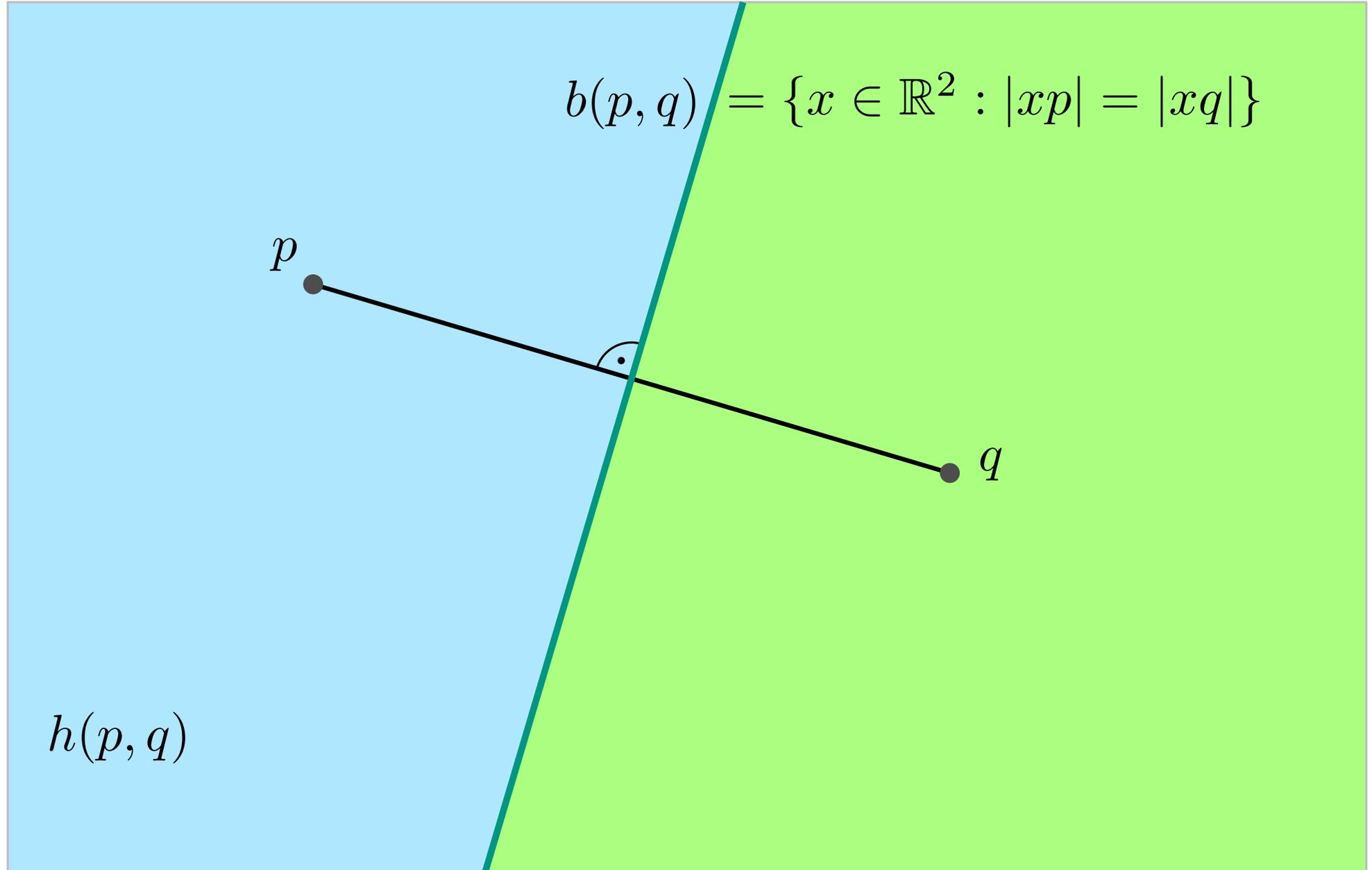
# Das Postamt-Problem



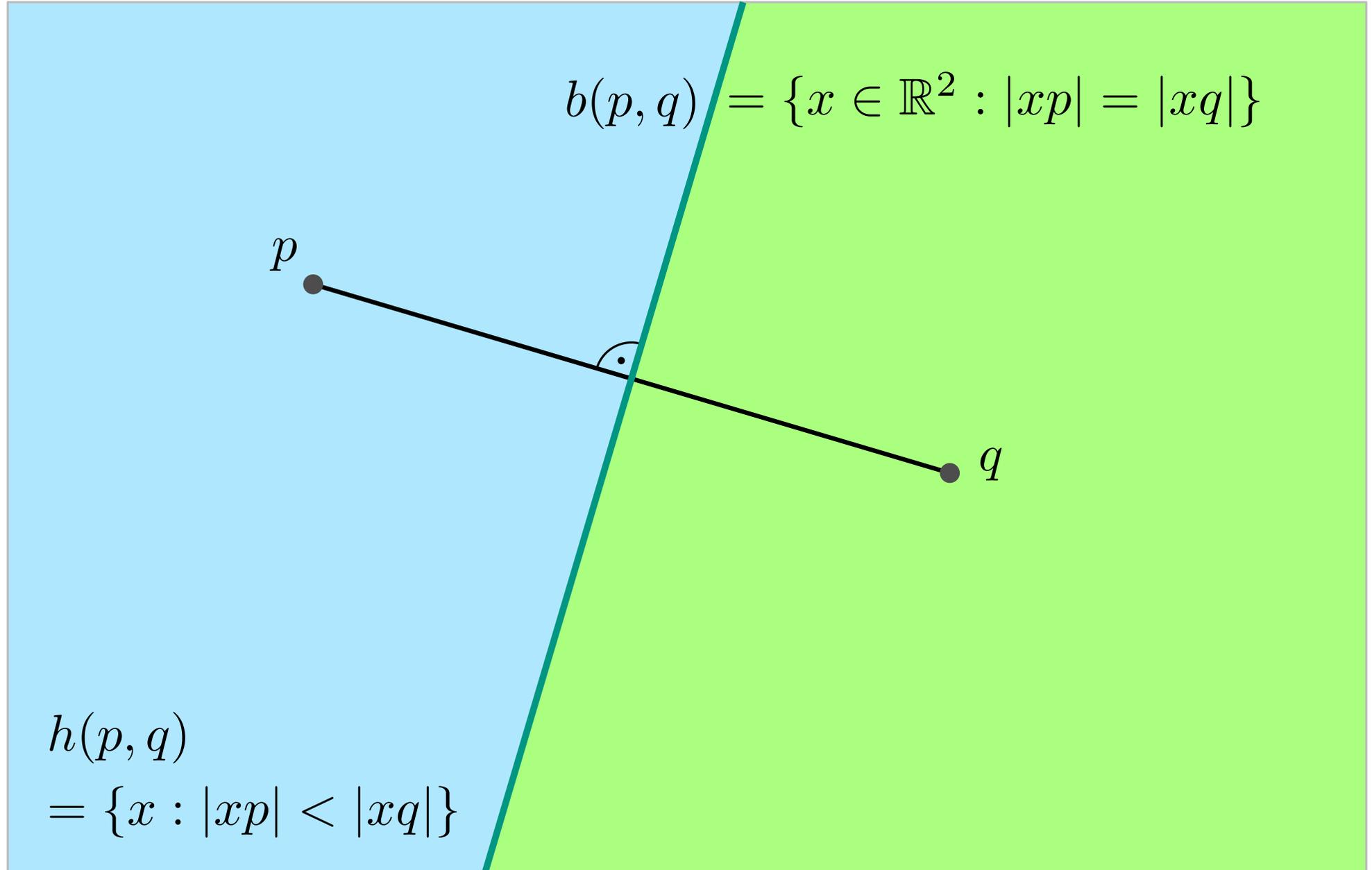
# Das Postamt-Problem



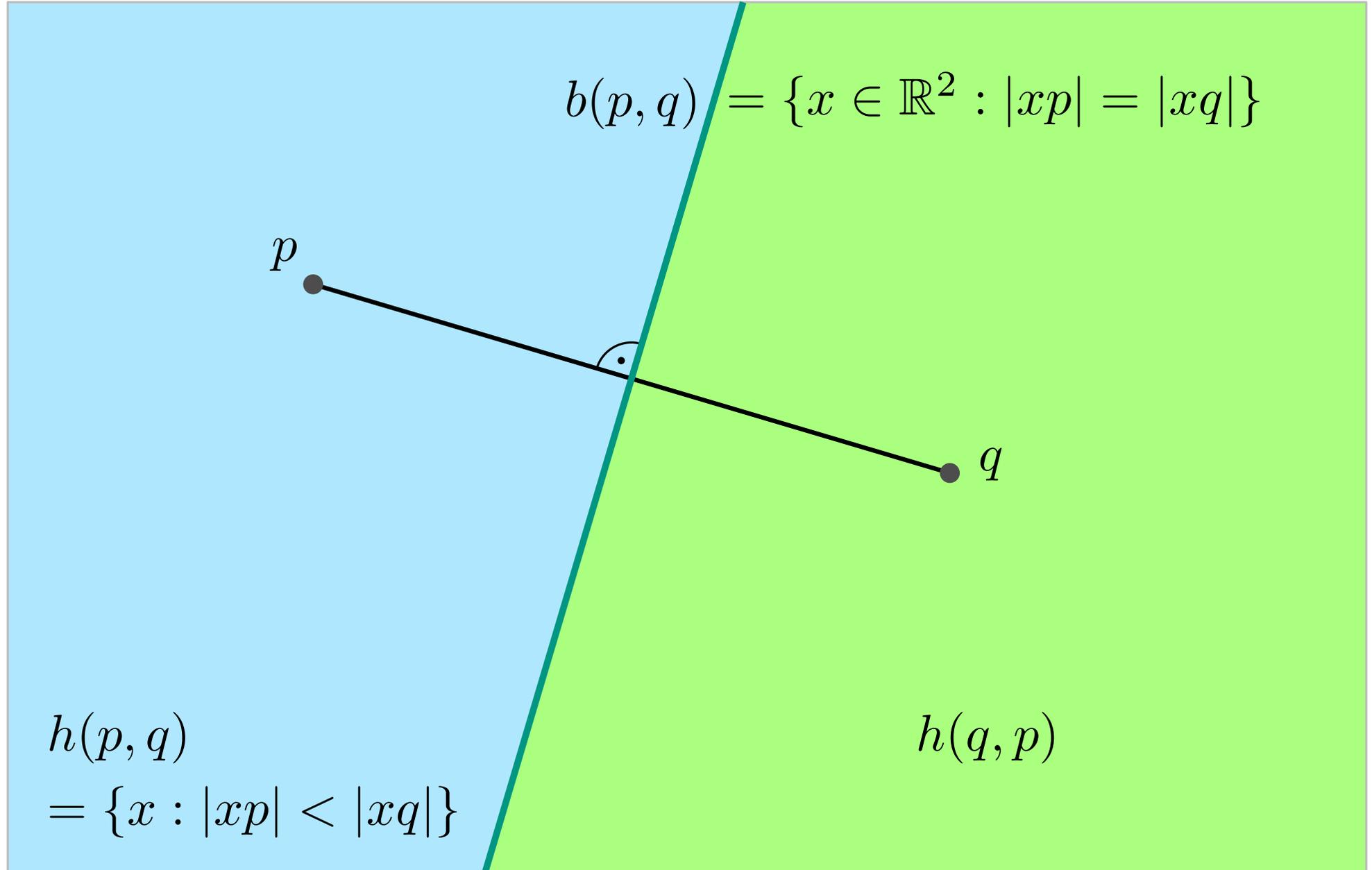
# Das Postamt-Problem



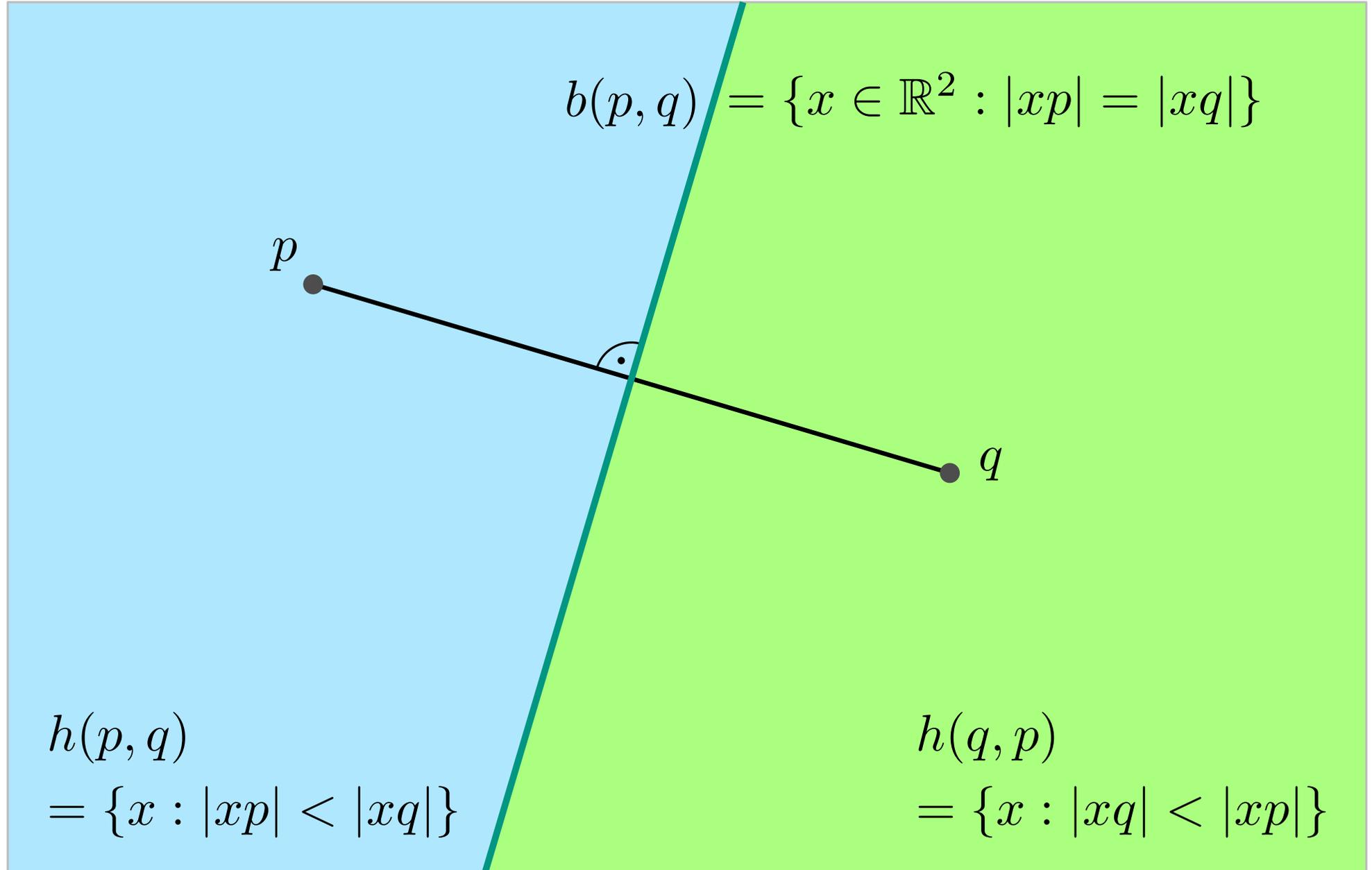
# Das Postamt-Problem



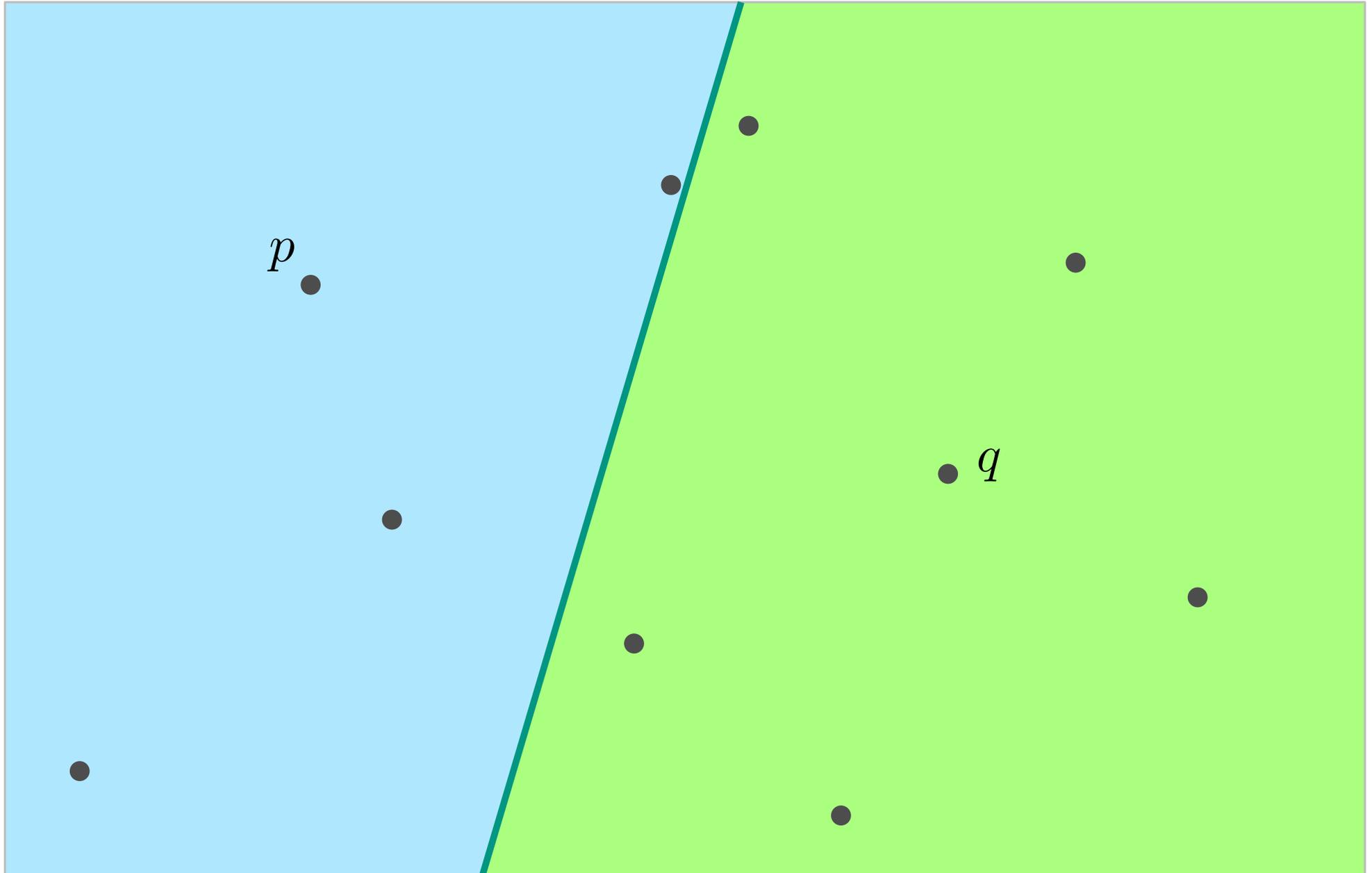
# Das Postamt-Problem



# Das Postamt-Problem

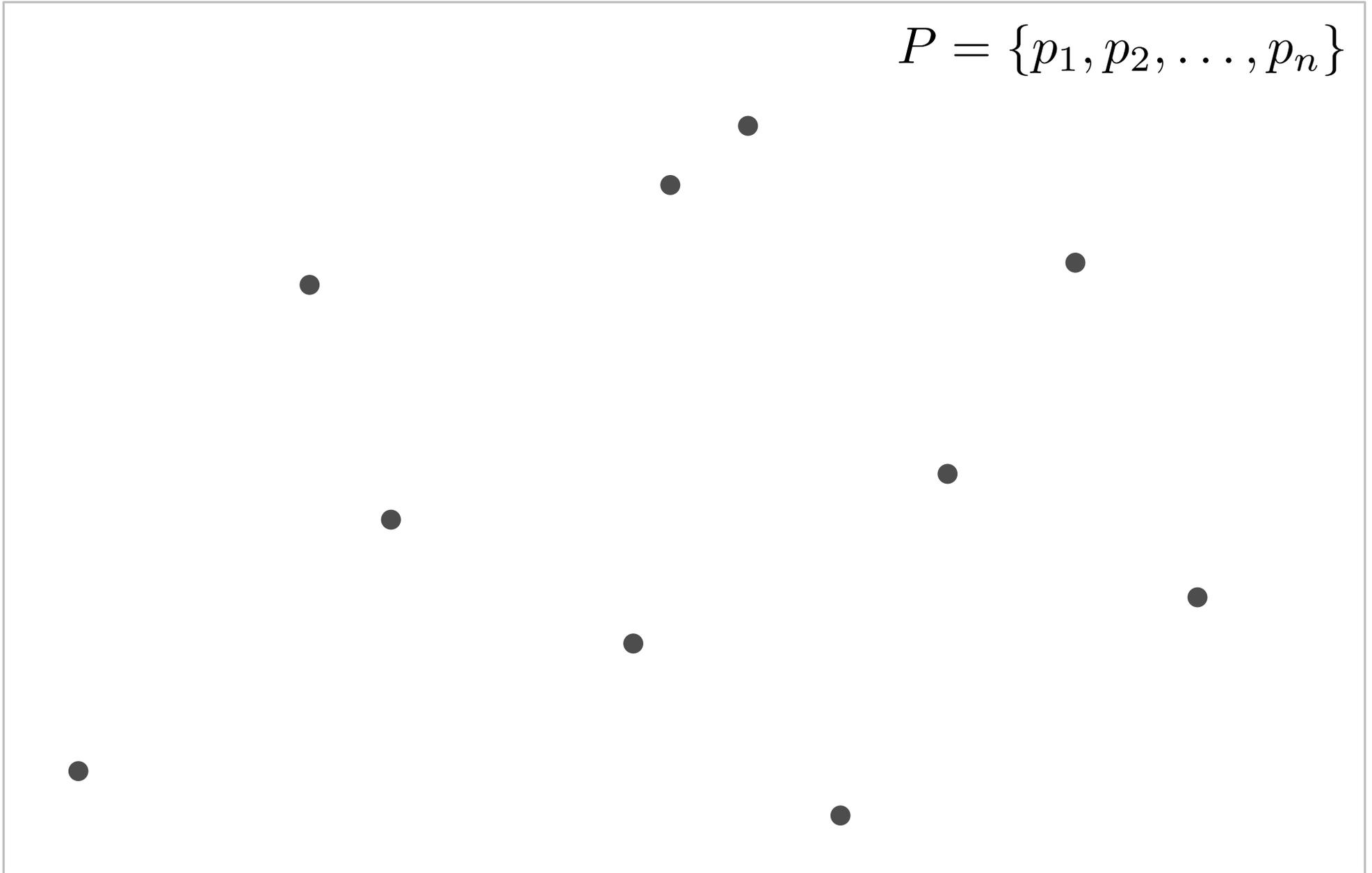


# Das Postamt-Problem

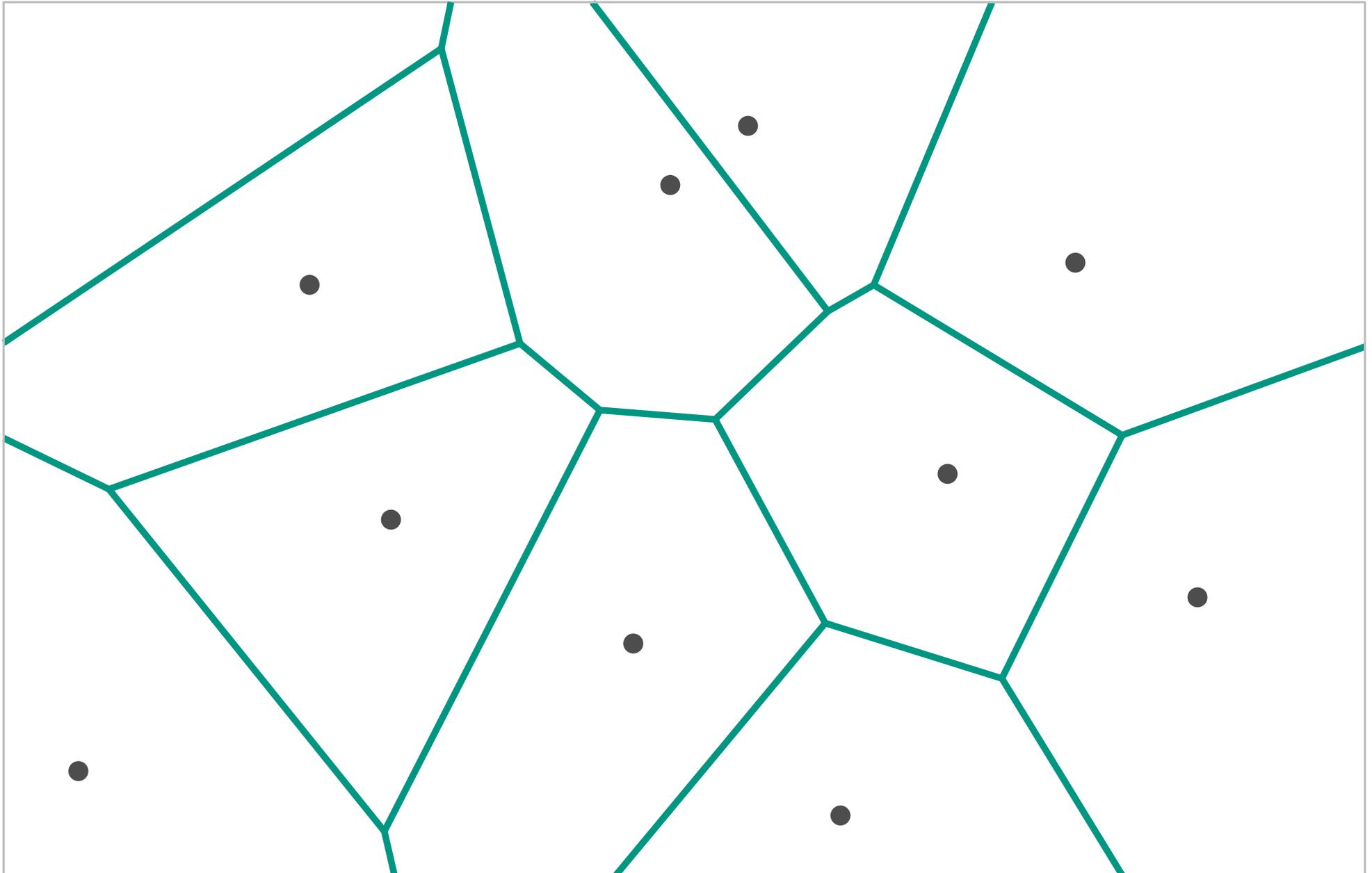


# Das Postamt-Problem

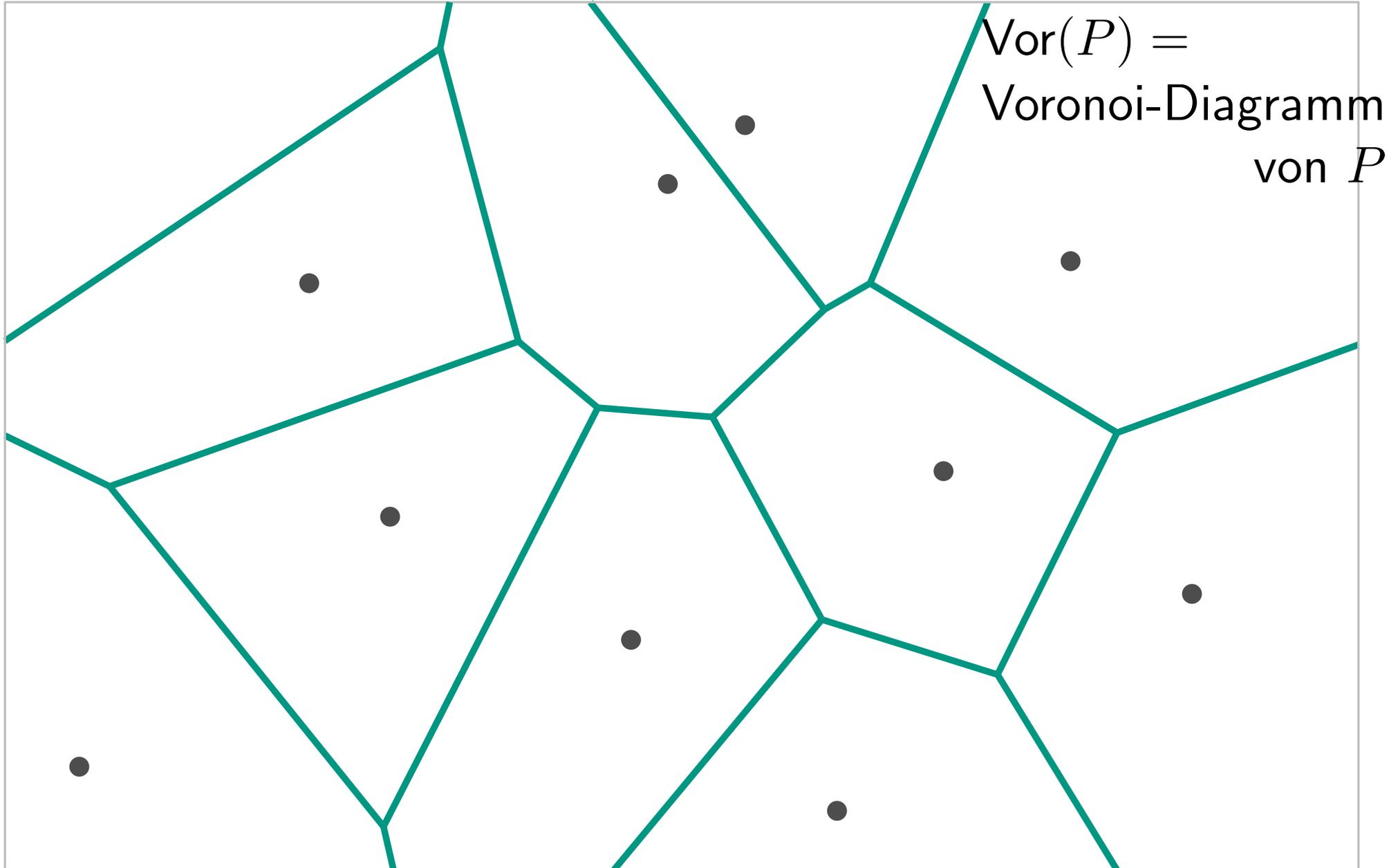
$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$



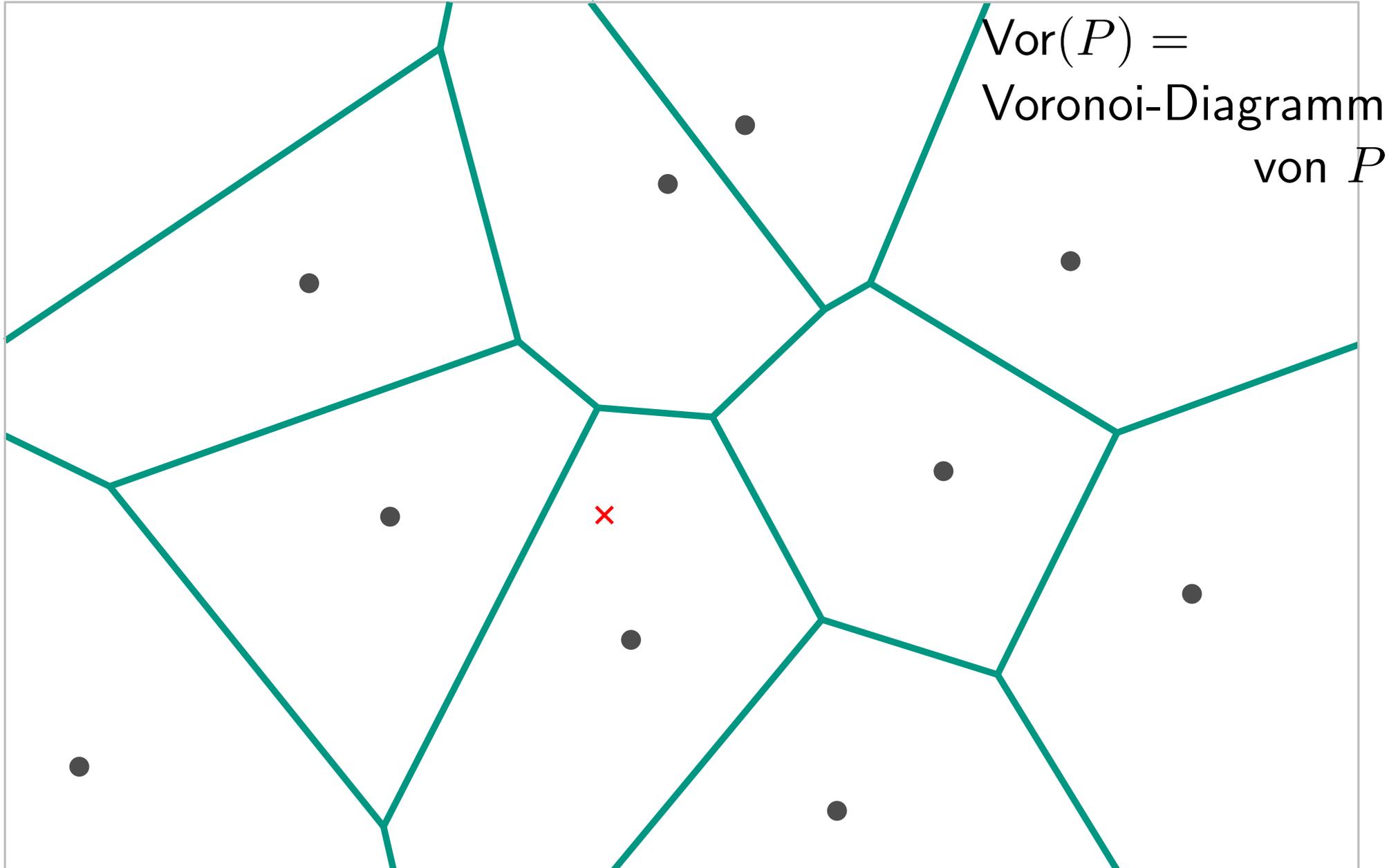
# Das Postamt-Problem



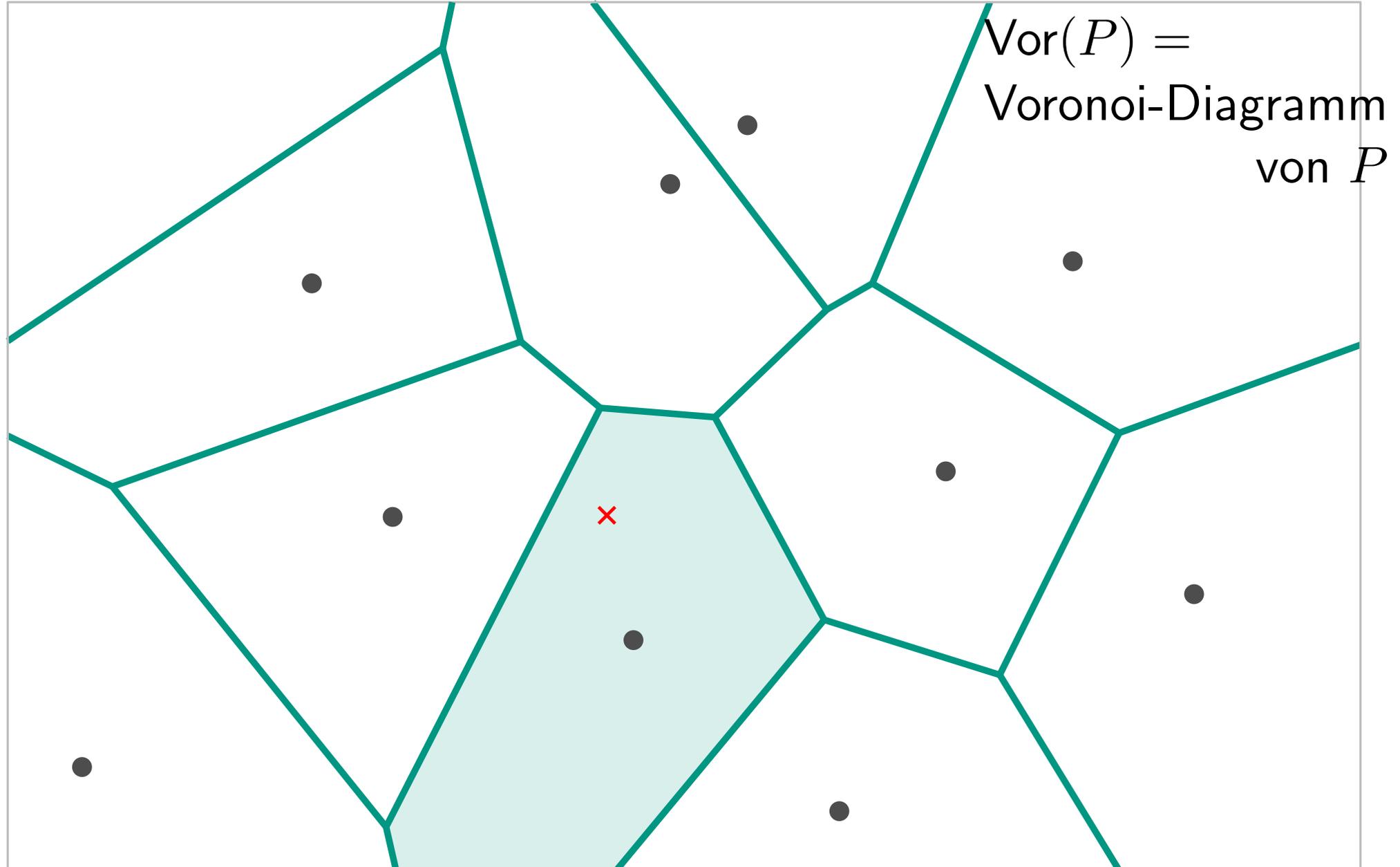
# Das Postamt-Problem



# Das Postamt-Problem

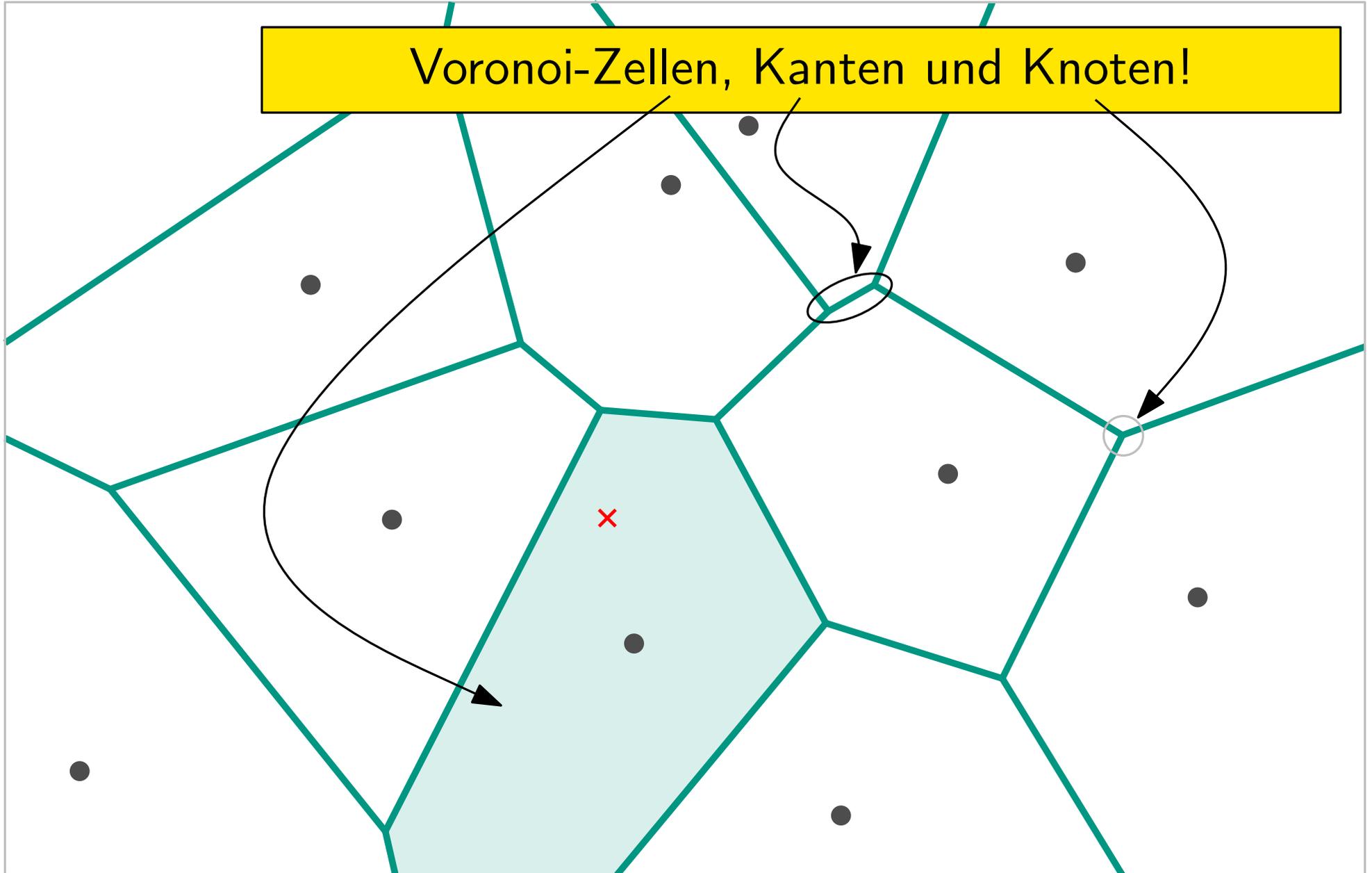


# Das Postamt-Problem



# Das Postamt-Problem

Voronoi-Zellen, Kanten und Knoten!



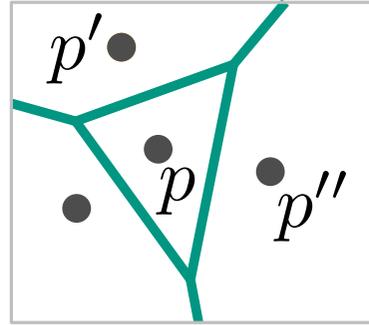
# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm

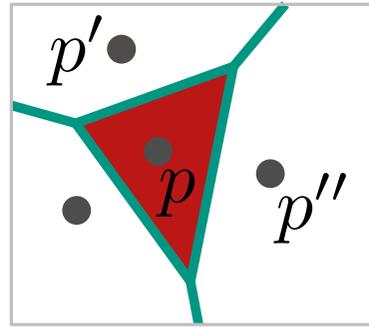


$\text{Vor}(P)$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm

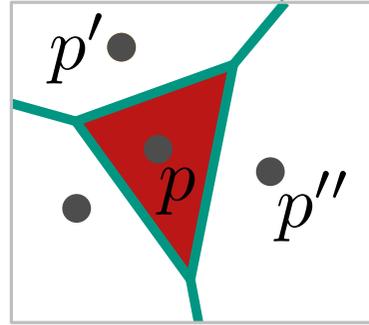


$\text{Vor}(P)$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

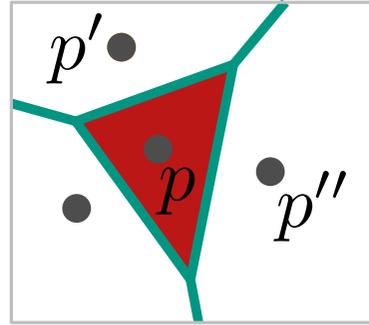
■ Voronoi-Zelle

$$\mathcal{V}(\{p\}) =$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

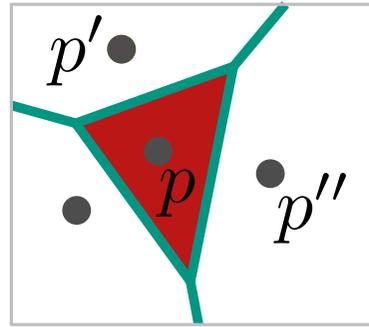
■ Voronoi-Zelle

$$\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) =$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

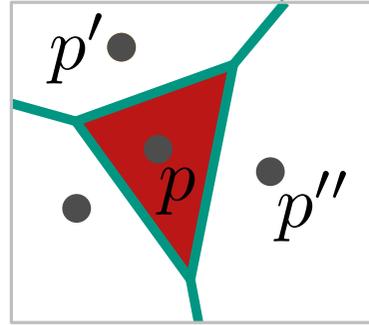
- Voronoi-Zelle

$$\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\}$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

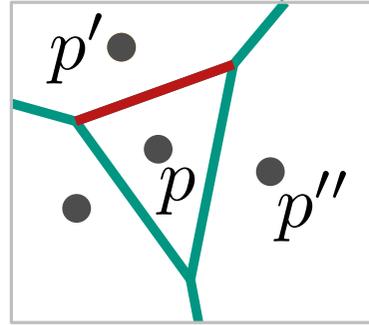
## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

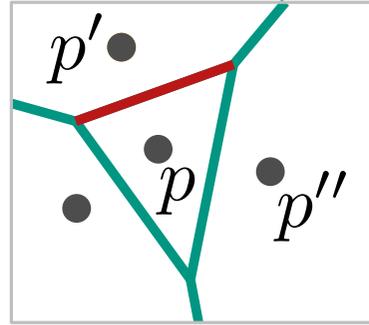
## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

- Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

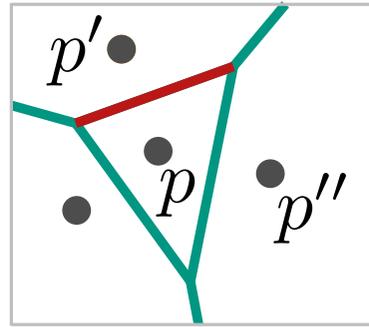
- Voronoi-Kante

$$\mathcal{V}(\{p, p'\}) =$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

- Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

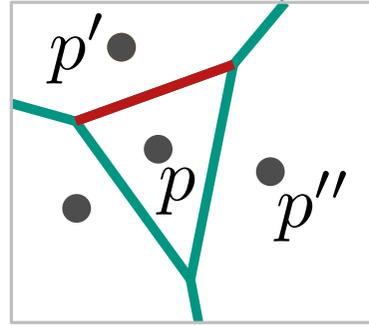
- Voronoi-Kante

$$\mathcal{V}(\{p, p'\}) = \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\}$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

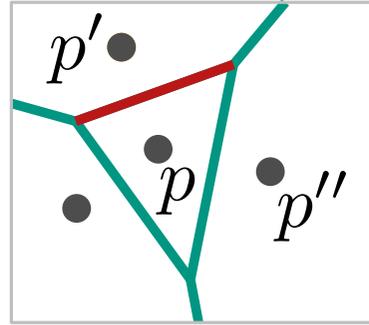
## ■ Voronoi-Kante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')\end{aligned}$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

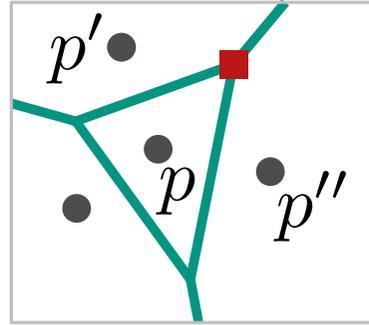
## ■ Voronoi-Kante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \text{rel-int}(\partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')), \text{ d.h. ohne Endpunkte}\end{aligned}$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

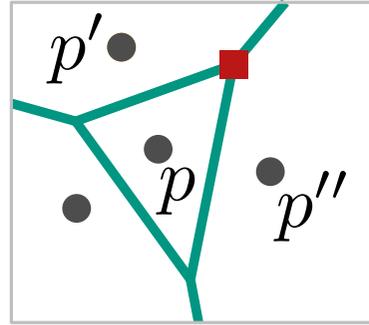
## ■ Voronoi-Kante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \text{rel-int}(\partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')), \text{ d.h. ohne Endpunkte}\end{aligned}$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

- Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

- Voronoi-Kante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \text{rel-int}(\partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')), \text{ d.h. ohne Endpunkte}\end{aligned}$$

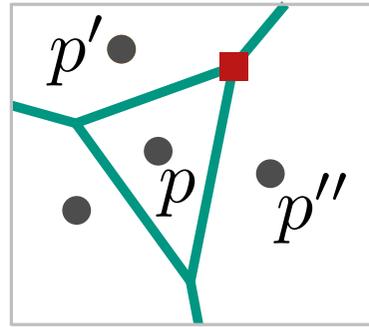
- Voronoi-Knoten

$$\mathcal{V}(\{p, p', p''\})$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$

## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

## ■ Voronoi-Kante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \text{rel-int}(\partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')), \text{ d.h. ohne Endpunkte}\end{aligned}$$

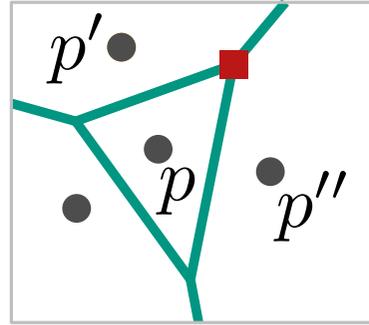
## ■ Voronoi-Knoten

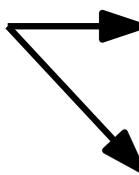
$$\mathcal{V}(\{p, p', p''\}) = \partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p') \cap \partial\mathcal{V}(p'')$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$  

## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

## ■ Voronoi-Kante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \text{rel-int}(\partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')), \text{ d.h. ohne Endpunkte}\end{aligned}$$

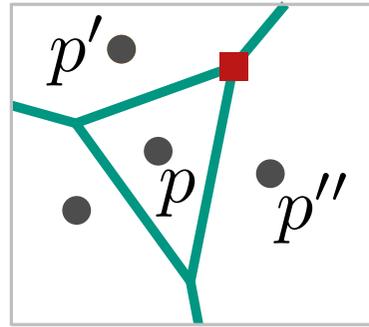
## ■ Voronoi-Knoten

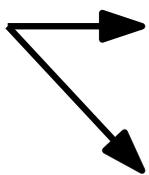
$$\mathcal{V}(\{p, p', p''\}) = \partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p') \cap \partial\mathcal{V}(p'')$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$   Unterteilung

## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q)\end{aligned}$$

## ■ Voronoi-Kante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \text{rel-int}(\partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')), \text{ d.h. ohne Endpunkte}\end{aligned}$$

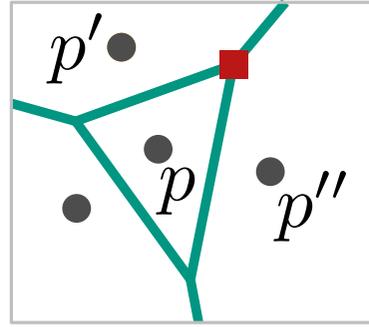
## ■ Voronoi-Knoten

$$\mathcal{V}(\{p, p', p''\}) = \partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p') \cap \partial\mathcal{V}(p'')$$

# Das Voronoi-Diagramm

Sei  $P$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $p, p', p'' \in P$ .

Voronoi-Diagramm



$\text{Vor}(P)$   $\begin{cases} \rightarrow \text{Unterteilung} \\ \rightarrow \text{geometr. Graph} \end{cases}$

## ■ Voronoi-Zelle

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\{p\}) = \mathcal{V}(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |xp| < |xq| \forall q \in P \setminus \{p\}\} \\ &= \bigcap_{q \neq p} h(p, q) \end{aligned}$$

## ■ Voronoi-Kante

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\{p, p'\}) &= \{x : |xp| = |xp'| \text{ and } |xp| < |xq| \forall q \neq p, p'\} \\ &= \text{rel-int}(\partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p')), \text{ d.h. ohne Endpunkte} \end{aligned}$$

## ■ Voronoi-Knoten

$$\mathcal{V}(\{p, p', p''\}) = \partial\mathcal{V}(p) \cap \partial\mathcal{V}(p') \cap \partial\mathcal{V}(p'')$$

# Eigenschaften

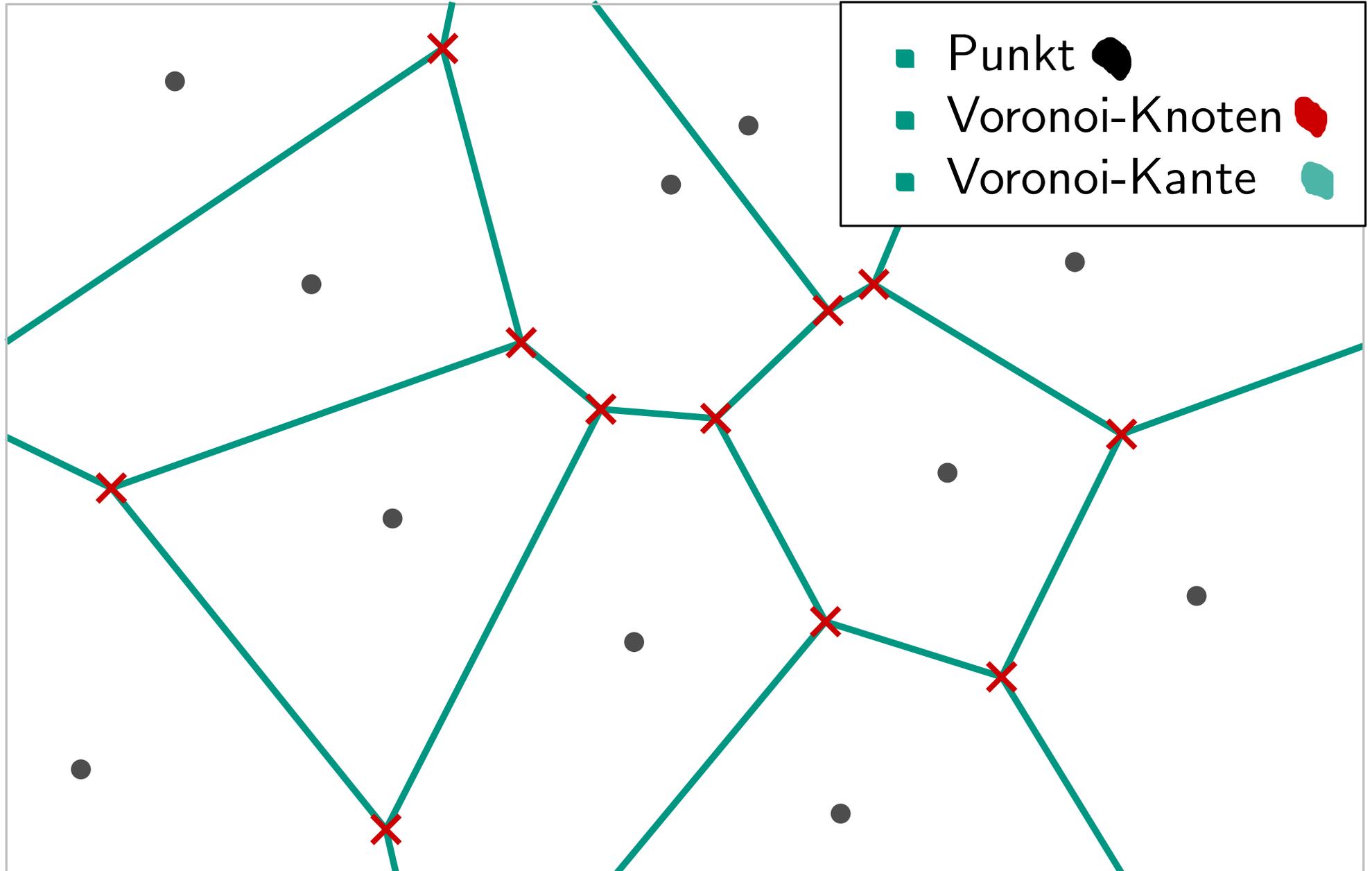
**Satz 1:** Sei  $P \subset \mathbb{R}^2$  eine Menge von  $n$  Punkten. Sind alle Punkte kollinear, besteht  $\text{Vor}(P)$  aus  $n - 1$  parallelen Geraden. Sonst ist  $\text{Vor}(P)$  zusammenhängend und die Kanten sind Strecken oder Halbgeraden.

Finde eine Menge  $P$ , so dass  $\text{Vor}(P)$  eine Zelle linearer Komplexität hat.

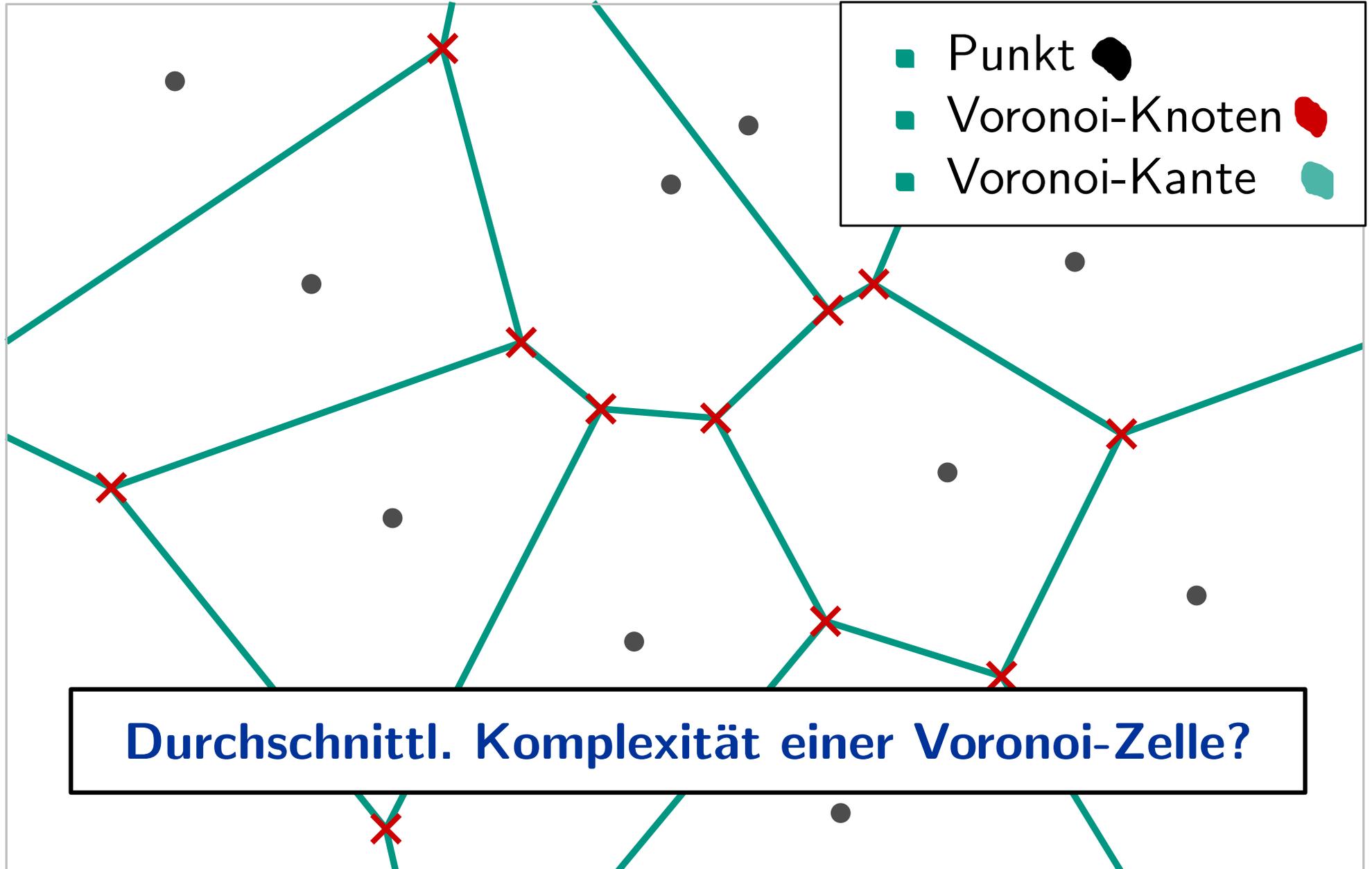
Kann das für (fast) jede Zelle passieren?

**Satz 2:** Sei  $P \subset \mathbb{R}^2$  Menge von  $n$  Punkten.  $\text{Vor}(P)$  besteht aus höchstens  $2n - 5$  Knoten und  $3n - 6$  Kanten.

# Aufgabe 1



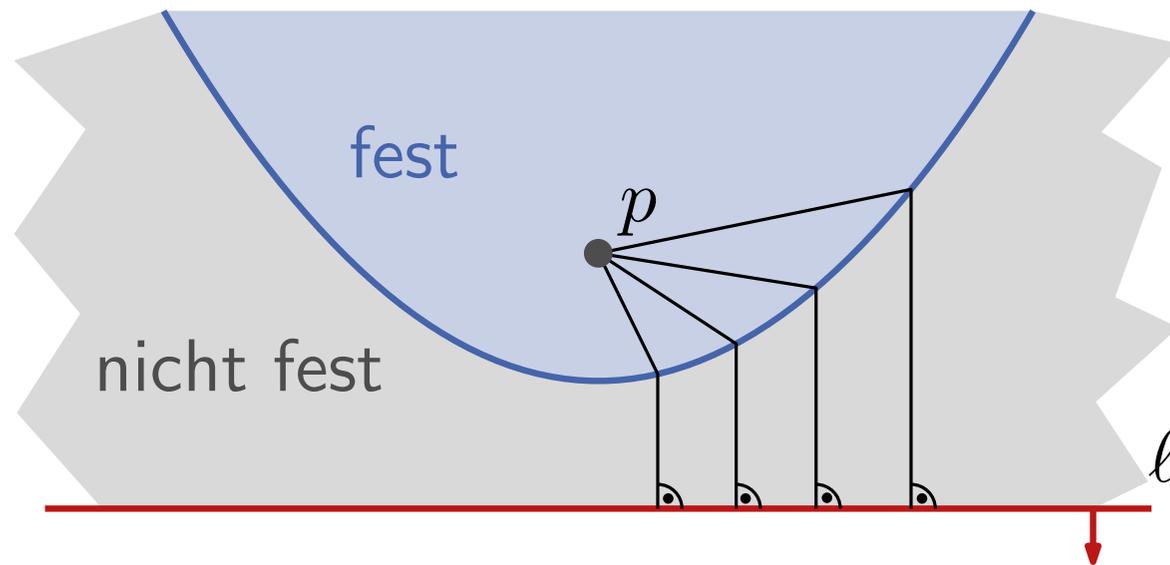
# Aufgabe 1



# In Richtung Sweep-Verfahren

Offensichtlich ist der Schnitt von  $\text{Vor}(P)$  und Sweep Line  $\ell$  zum aktuellen Zeitpunkt noch nicht bekannt.

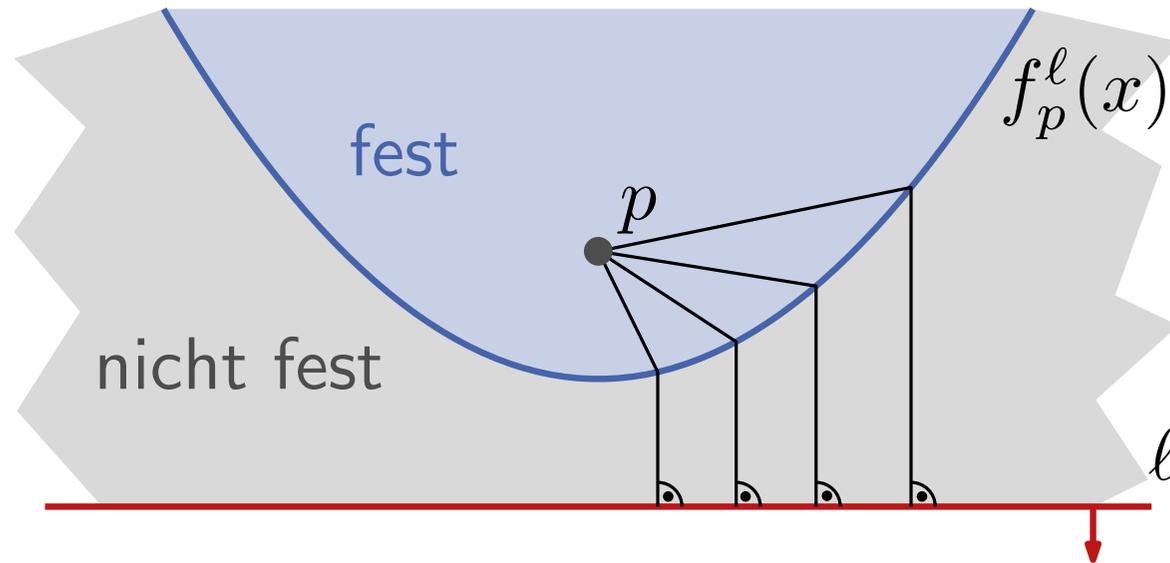
Betrachte stattdessen den Teil oberhalb  $\ell$ , der schon fest ist!



# In Richtung Sweep-Verfahren

Offensichtlich ist der Schnitt von  $\text{Vor}(P)$  und Sweep Line  $\ell$  zum aktuellen Zeitpunkt noch nicht bekannt.

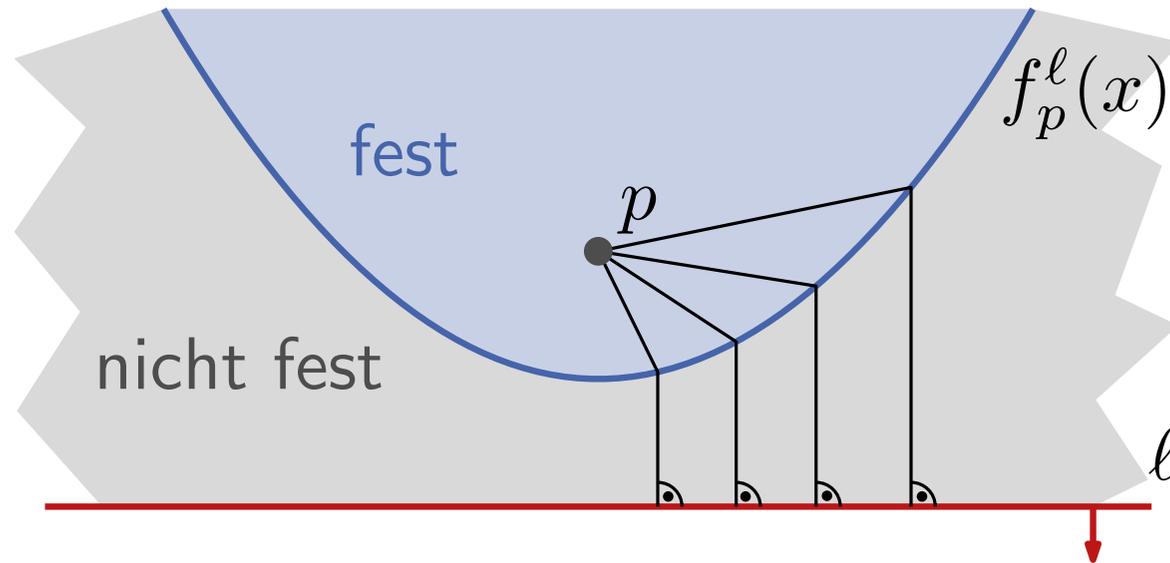
Betrachte stattdessen den Teil oberhalb  $\ell$ , der schon fest ist!



# In Richtung Sweep-Verfahren

Offensichtlich ist der Schnitt von  $\text{Vor}(P)$  und Sweep Line  $\ell$  zum aktuellen Zeitpunkt noch nicht bekannt.

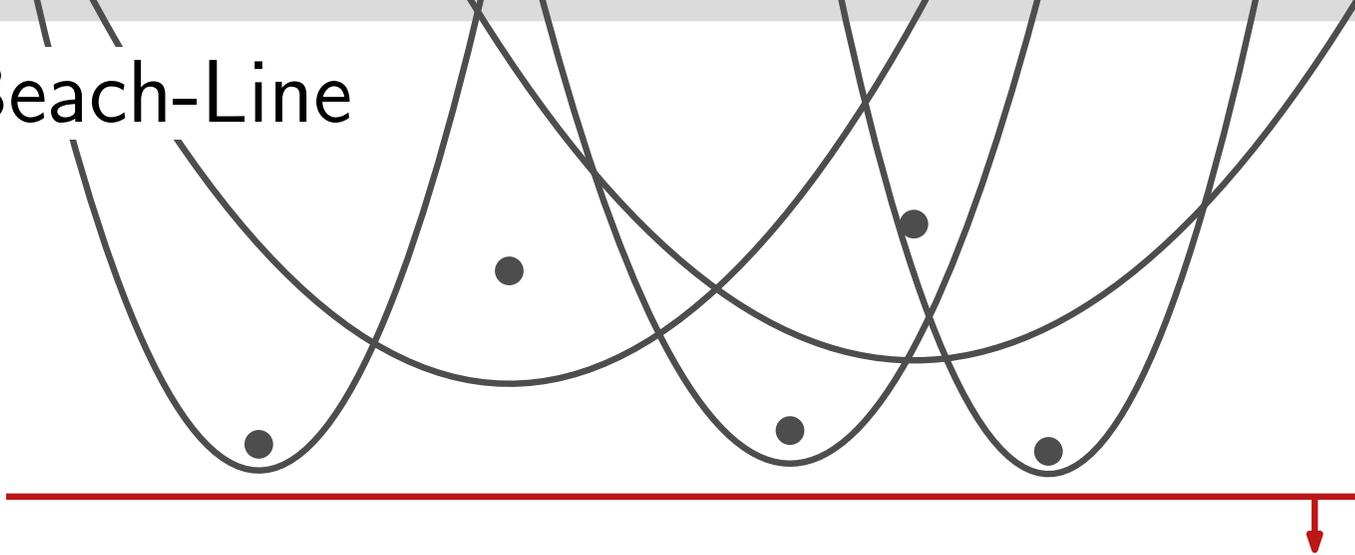
Betrachte stattdessen den Teil oberhalb  $\ell$ , der schon fest ist!



Lösen der Gleichung  $|pq| = |q\ell|$  liefert

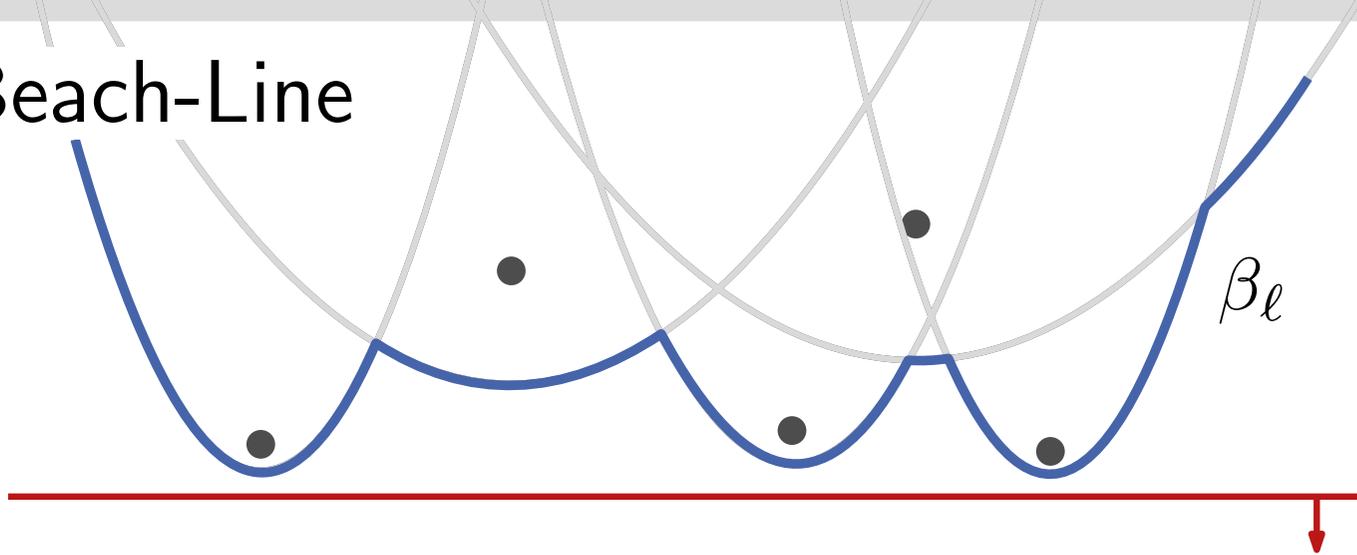
$$f_p^\ell(x) = \frac{1}{2(p_y - \ell_y)} (x - p_x)^2 + \frac{p_y + \ell_y}{2}$$

## Die Beach-Line



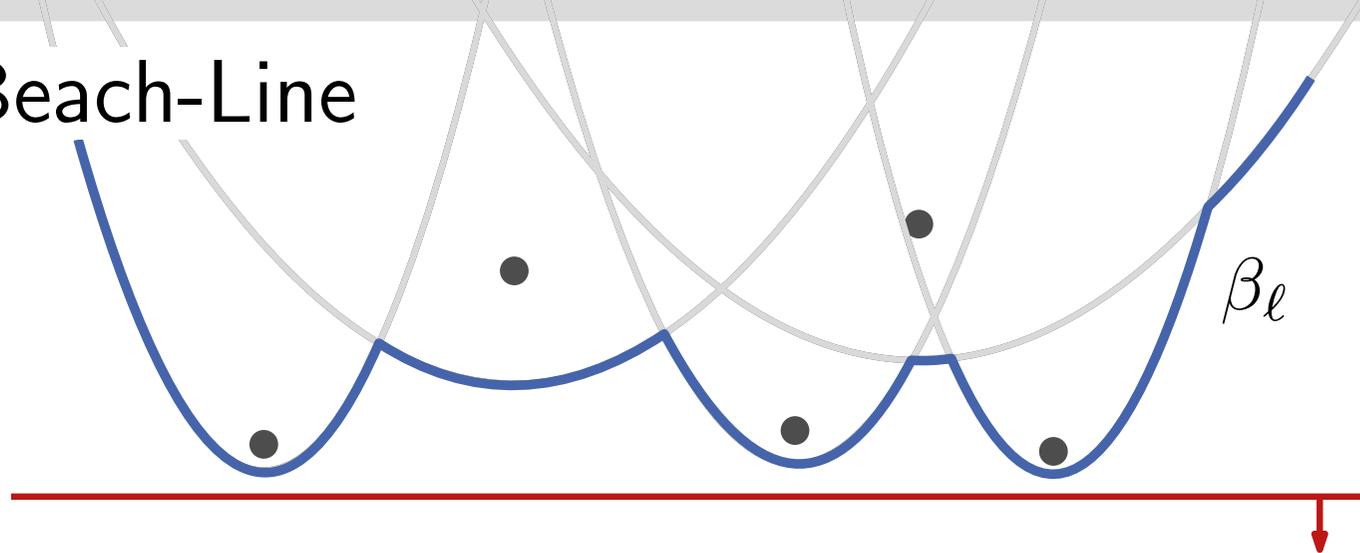
**Definition:** Die **Beach-Line**  $\beta_\ell$  ist die untere Kontur der Parabeln  $f_p^\ell$  für die bereits besuchten Punkte.

# Die Beach-Line



**Definition:** Die **Beach-Line**  $\beta_\ell$  ist die untere Kontur der Parabeln  $f_p^\ell$  für die bereits besuchten Punkte.

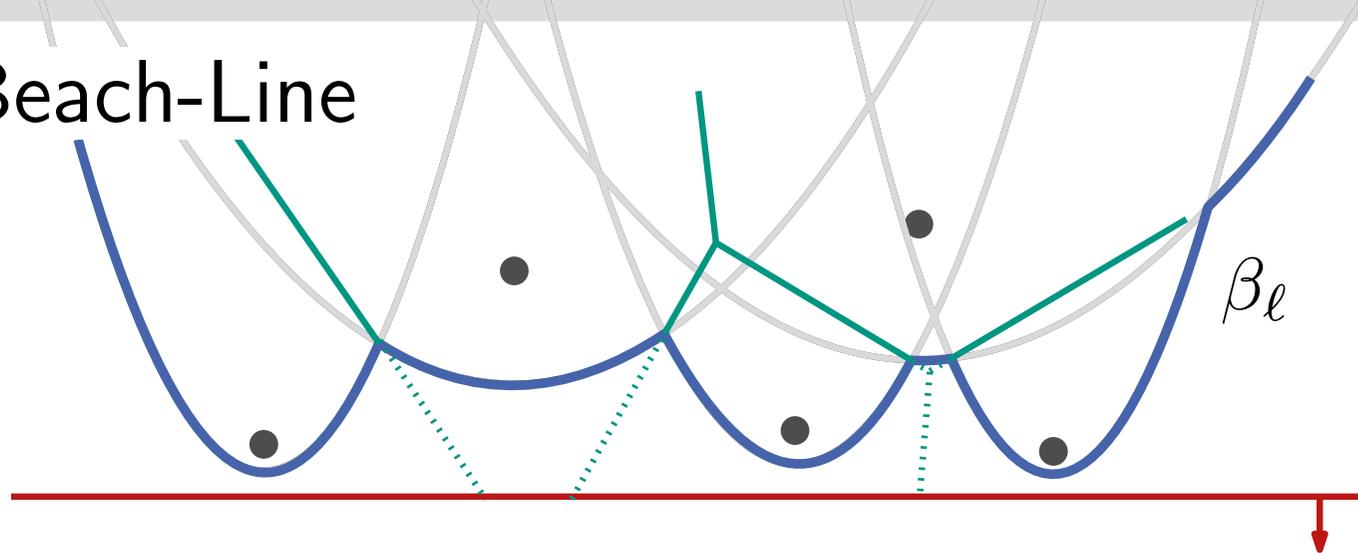
# Die Beach-Line



**Definition:** Die **Beach-Line**  $\beta_\ell$  ist die untere Kontur der Parabeln  $f_p^\ell$  für die bereits besuchten Punkte.

Was hat das mit  $\text{Vor}(P)$  zu tun?

## Die Beach-Line

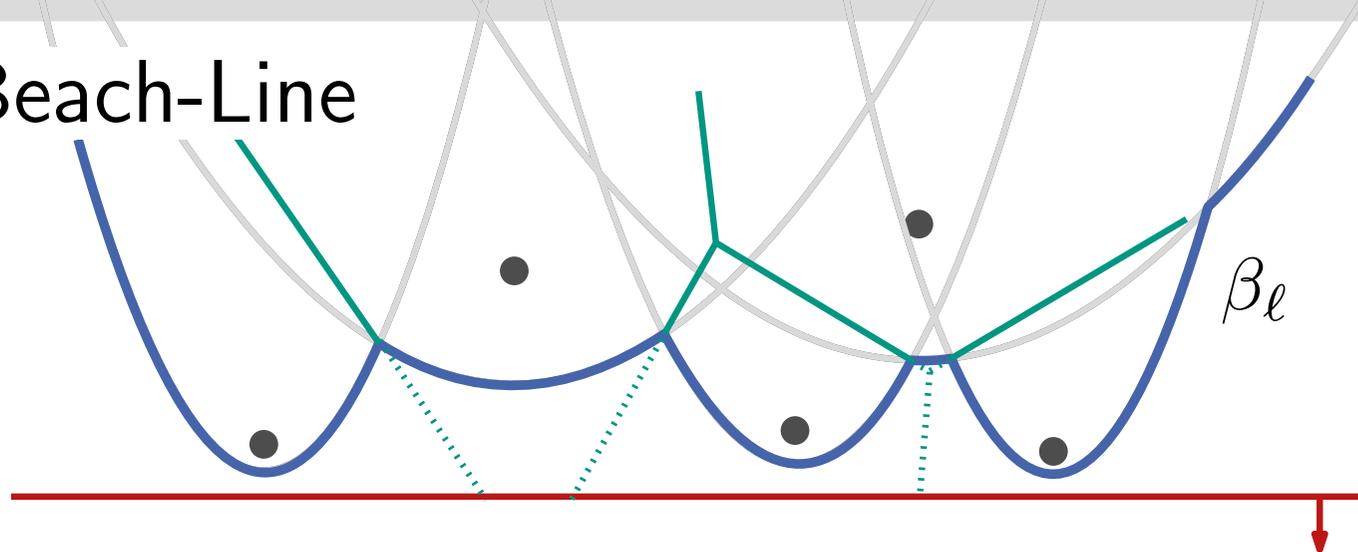


**Definition:** Die **Beach-Line**  $\beta_\ell$  ist die untere Kontur der Parabeln  $f_p^\ell$  für die bereits besuchten Punkte.

Was hat das mit  $\text{Vor}(P)$  zu tun?

- Beob.:**
- Beach-Line ist  $x$ -monoton
  - Schnittpunkte der Beach-Line liegen auf Voronoi-Kanten

## Die Beach-Line

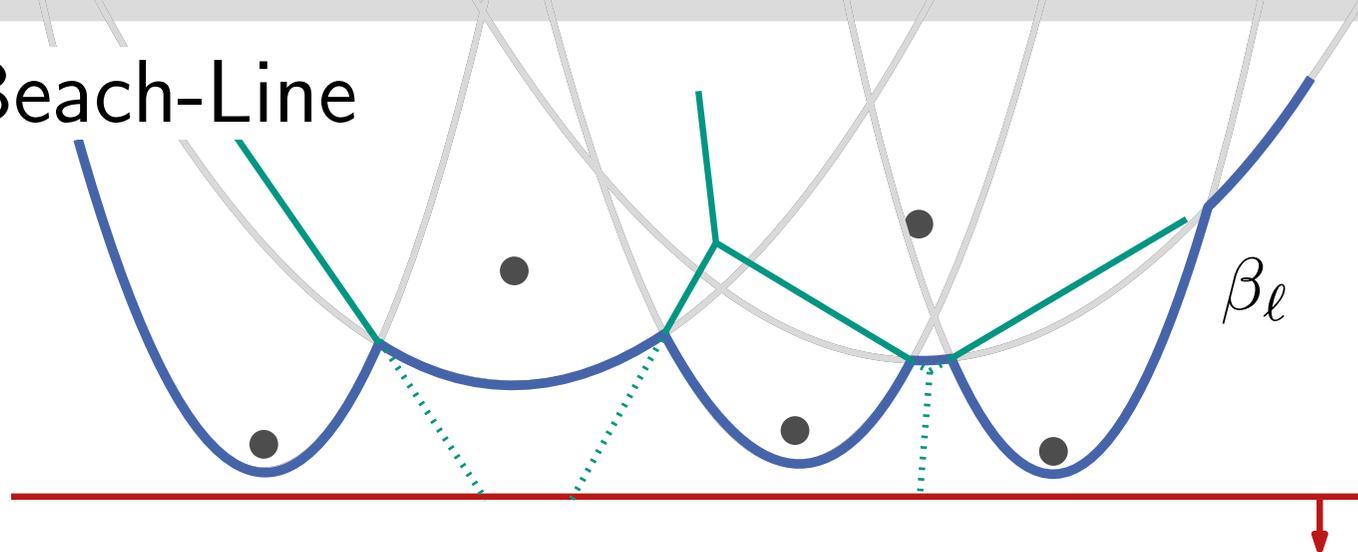


**Definition:** Die **Beach-Line**  $\beta_\ell$  ist die untere Kontur der Parabeln  $f_p^\ell$  für die bereits besuchten Punkte.

Was hat das mit  $\text{Vor}(P)$  zu tun?

- Beob.:**
- Beach-Line ist  $x$ -monoton
  - Schnittpunkte der Beach-Line liegen auf Voronoi-Kanten
- sogar:** Schnittpunkte laufen entlang  $\text{Vor}(P)$

# Die Beach-Line



**Definition:** Die **Beach-Line**  $\beta_\ell$  ist die untere Kontur der Parabeln  $f_p^\ell$  für die bereits besuchten Punkte.

Was hat das mit  $\text{Vor}(P)$  zu tun?

**Beob.:**

- Beach-Line ist  $x$ -monoton
- Schnittpunkte der Beach-Line liegen auf Voronoi-Kanten

**sogar:** Schnittpunkte laufen entlang  $\text{Vor}(P)$

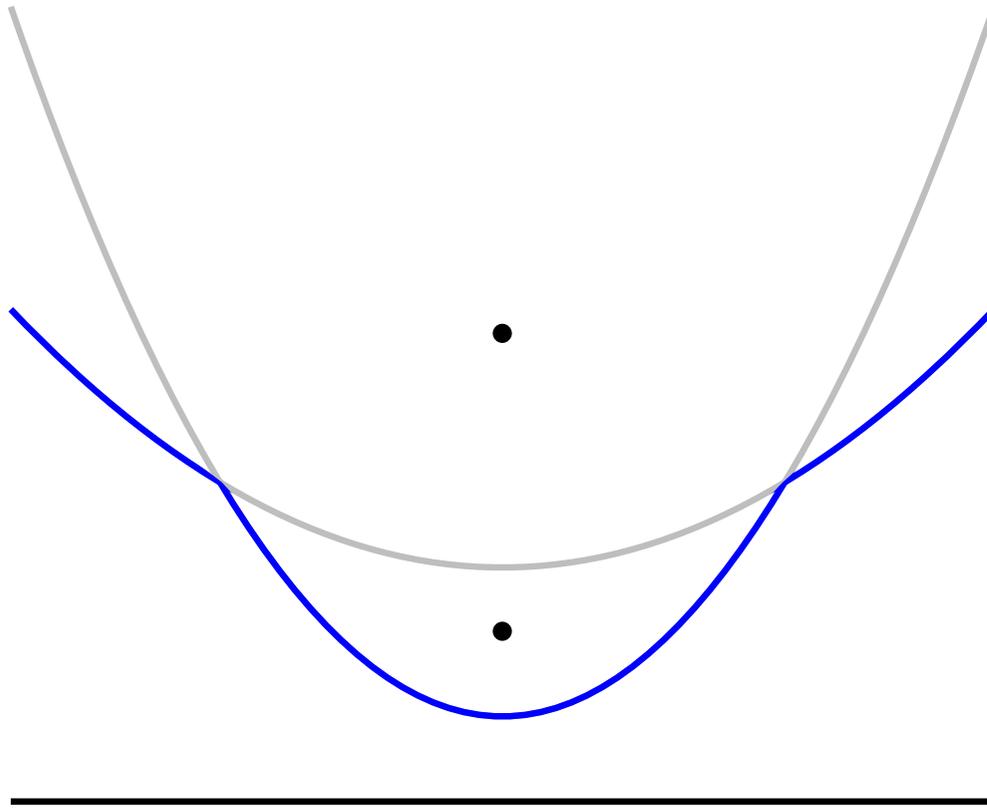
**Ziel:** speichere (implizit) aktuelle Kontur  $\beta_\ell$  statt  $\text{Vor}(P) \cap \ell$

## Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel, die mehr als einen Parabelbogen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.

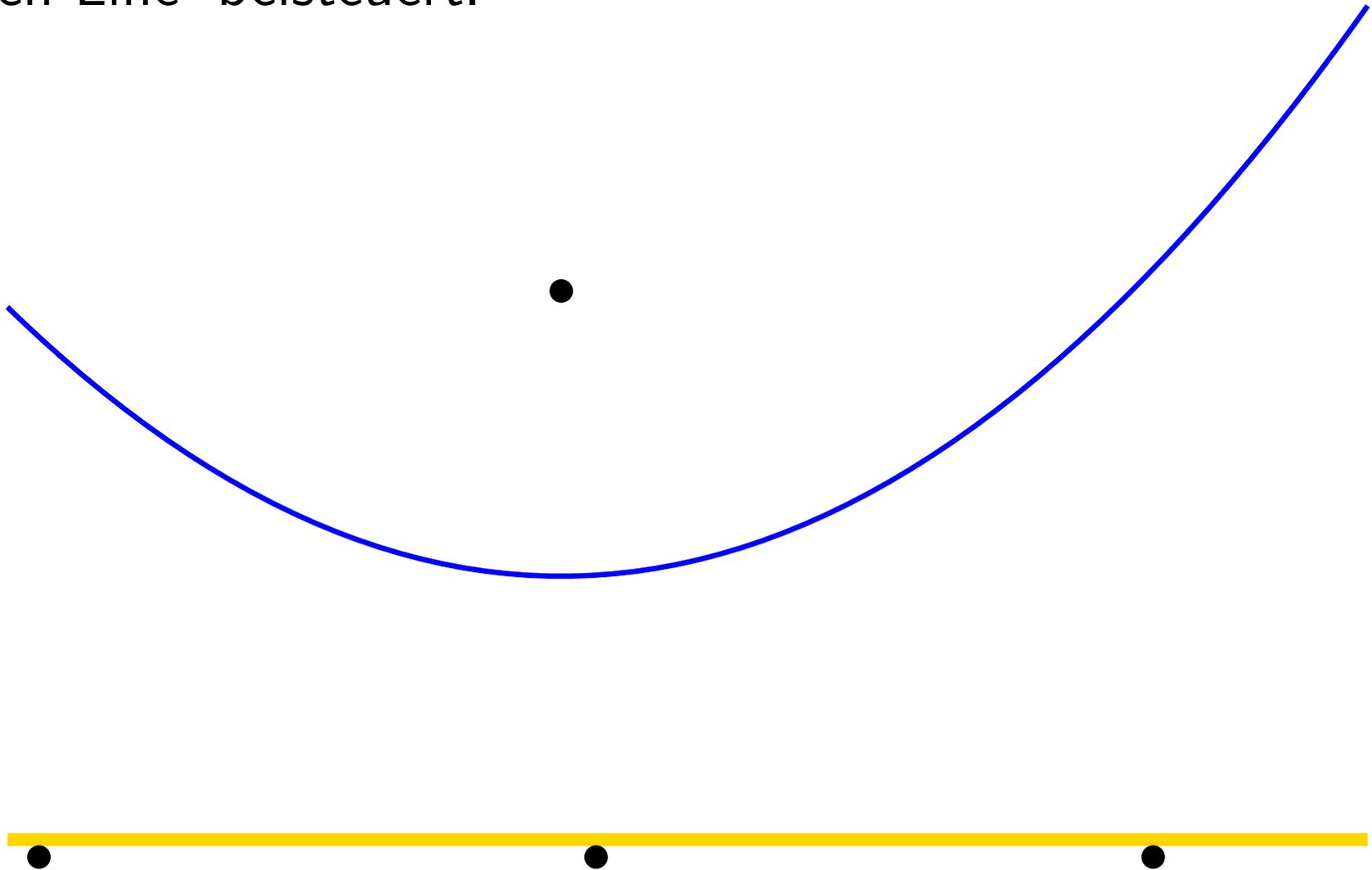
## Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel, die mehr als einen Parabelbogen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.



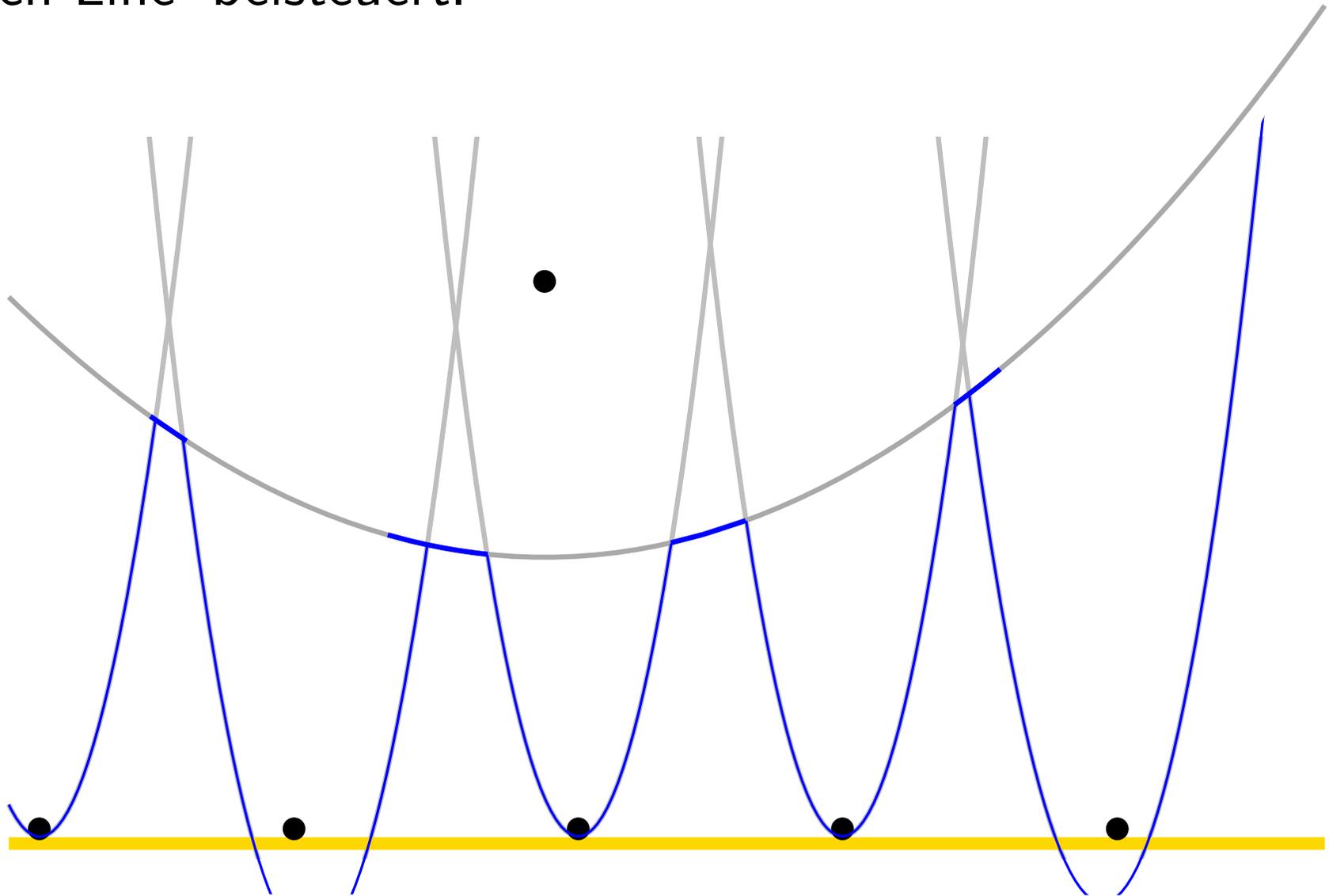
## Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel, die linear viele Parabelbögen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.



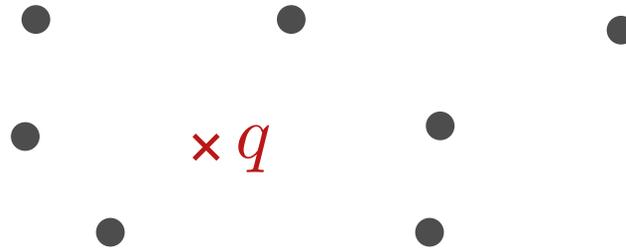
## Aufgabe 2

Beispiel: Eine Parabel, die linear viele Parabelbögen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.



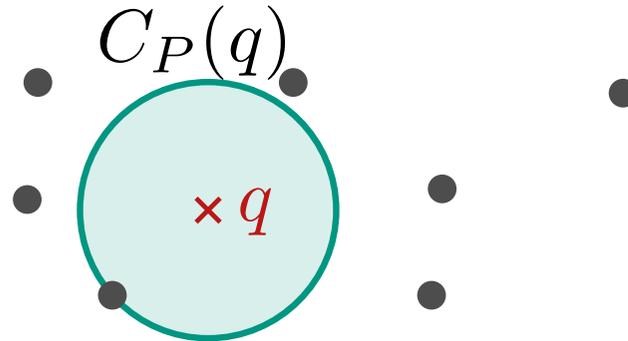
# Charakterisierung

**Definition:** Sei  $q$  ein Punkt. Definiere  $C_P(q)$  als den bzgl.  $P$  größten im Inneren leeren Kreis mit Mittelpunkt  $q$ .



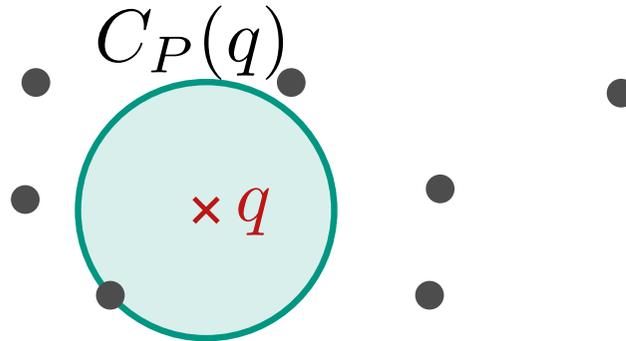
# Charakterisierung

**Definition:** Sei  $q$  ein Punkt. Definiere  $C_P(q)$  als den bzgl.  $P$  größten im Inneren leeren Kreis mit Mittelpunkt  $q$ .

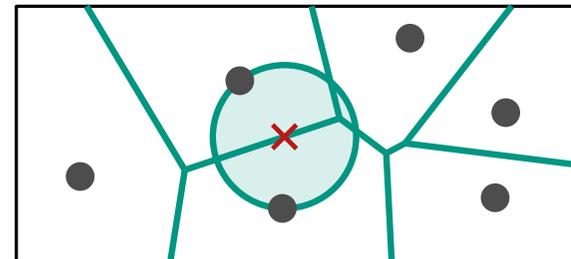
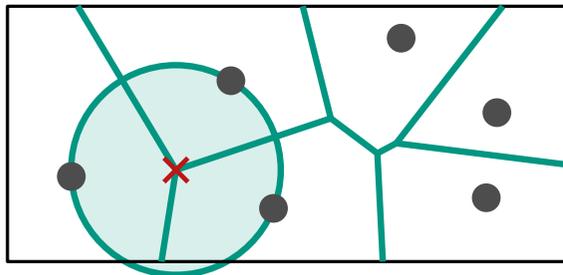


# Charakterisierung

**Definition:** Sei  $q$  ein Punkt. Definiere  $C_P(q)$  als den bzgl.  $P$  größten im Inneren leeren Kreis mit Mittelpunkt  $q$ .



- Satz 3:**
- Ein Punkt  $q$  ist ein Voronoi-Knoten  
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$ ,
  - der Bisektor  $b(p_i, p_j)$  definiert eine Voronoi-Kante  
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$  mit  $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$ .



# Aufgabe 3 – Nächster Nachbar

**Gegeben:** Punktmenge  $P$ ,  $|P| = n$

Finde Verfahren, das in  $O(n \log n)$  Zeit, für alle Punkte ihren nächsten Nachbarn aus  $P$  berechnet.

# Aufgabe 3 – Nächster Nachbar

**Gegeben:** Punktmenge  $P$ ,  $|P| = n$

Finde Verfahren, das in  $O(n \log n)$  Zeit, für alle Punkte ihren nächsten Nachbarn aus  $P$  berechnet.

**Idee:**

1. Baue in  $O(n \log n)$  Zeit Voronoi-Diagramm  $\text{Vor}(P)$  von  $P$  auf.
2. Finde mithilfe von  $\text{Vor}(P)$  in  $\mathcal{O}(n)$  zu jedem Punkt  $p \in P$  seinen nächsten Nachbarn  $a(p) \in P$ .

**Beweis:**

Zeige, dass  $a(p)$  in einer benachbarten Voronoi-Zelle liegt.

# Aufgabe 3 – Nächster Nachbar

**Gegeben:** Punktmenge  $P$ ,  $|P| = n$

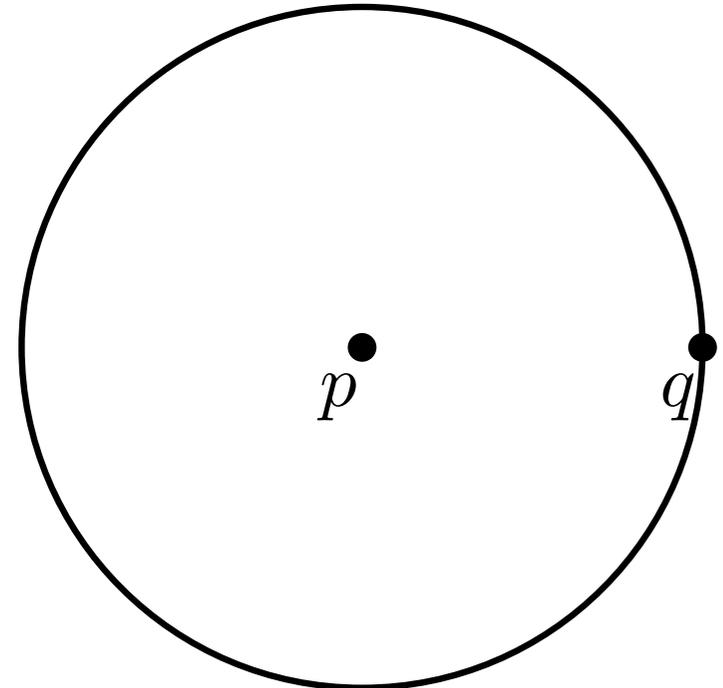
Finde Verfahren, das in  $O(n \log n)$  Zeit, für alle Punkte ihren nächsten Nachbarn aus  $P$  berechnet.

**Idee:**

1. Baue in  $O(n \log n)$  Zeit Voronoi-Diagramm  $\text{Vor}(P)$  von  $P$  auf.
2. Finde mithilfe von  $\text{Vor}(P)$  in  $O(n)$  zu jedem Punkt  $p \in P$  seinen nächsten Nachbarn  $a(p) \in P$ .

**Beweise:**

Zeige, dass  $a(p)$  in einer benachbarten Voronoi-Zelle liegt.



# Aufgabe 3 – Nächster Nachbar

**Gegeben:** Punktmenge  $P$ ,  $|P| = n$

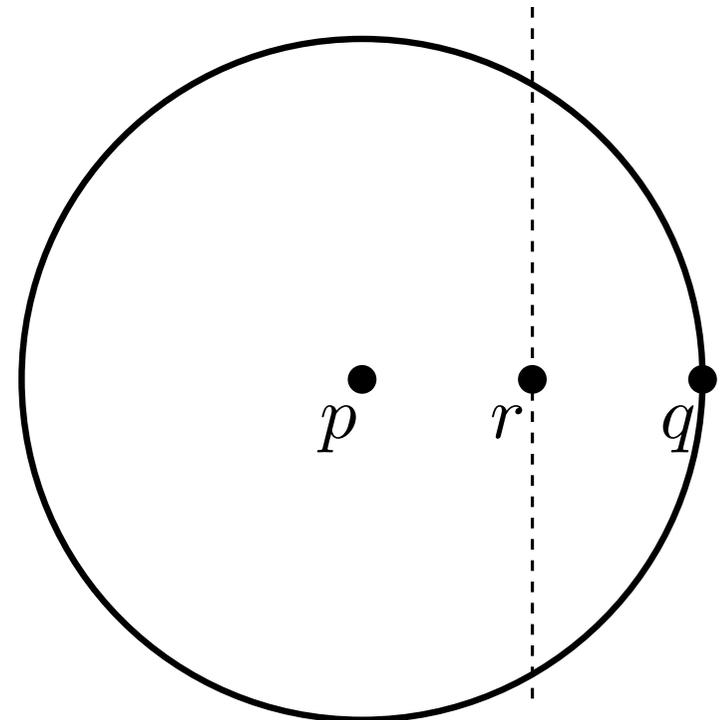
Finde Verfahren, das in  $O(n \log n)$  Zeit, für alle Punkte ihren nächsten Nachbarn aus  $P$  berechnet.

**Idee:**

1. Baue in  $O(n \log n)$  Zeit Voronoi-Diagramm  $\text{Vor}(P)$  von  $P$  auf.
2. Finde mithilfe von  $\text{Vor}(P)$  in  $O(n)$  zu jedem Punkt  $p \in P$  seinen nächsten Nachbarn  $a(p) \in P$ .

**Beweise:**

Zeige, dass  $a(p)$  in einer benachbarten Voronoi-Zelle liegt.



# Aufgabe 3 – Nächster Nachbar

**Gegeben:** Punktmenge  $P$ ,  $|P| = n$

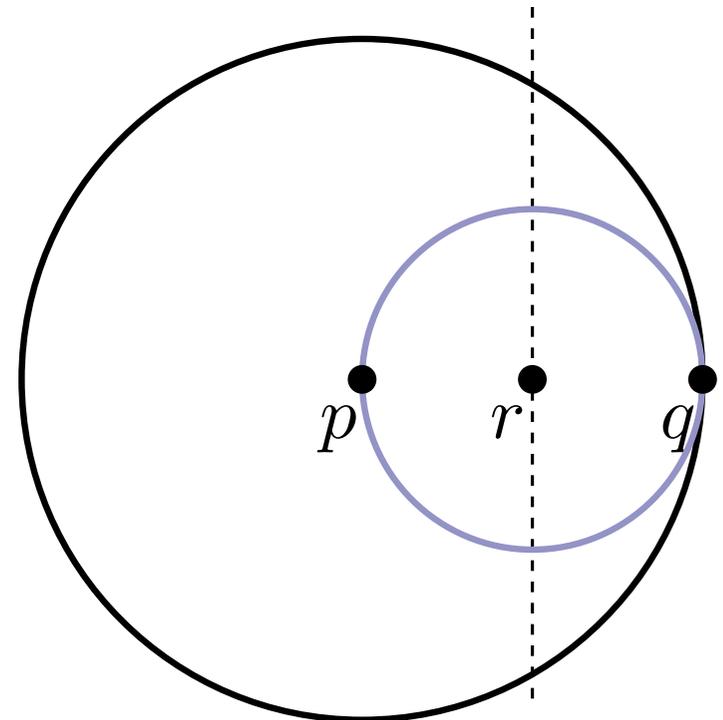
Finde Verfahren, das in  $O(n \log n)$  Zeit, für alle Punkte ihren nächsten Nachbarn aus  $P$  berechnet.

**Idee:**

1. Baue in  $O(n \log n)$  Zeit Voronoi-Diagramm  $\text{Vor}(P)$  von  $P$  auf.
2. Finde mithilfe von  $\text{Vor}(P)$  in  $O(n)$  zu jedem Punkt  $p \in P$  seinen nächsten Nachbarn  $a(p) \in P$ .

**Beweis:**

Zeige, dass  $a(p)$  in einer benachbarten Voronoi-Zelle liegt.

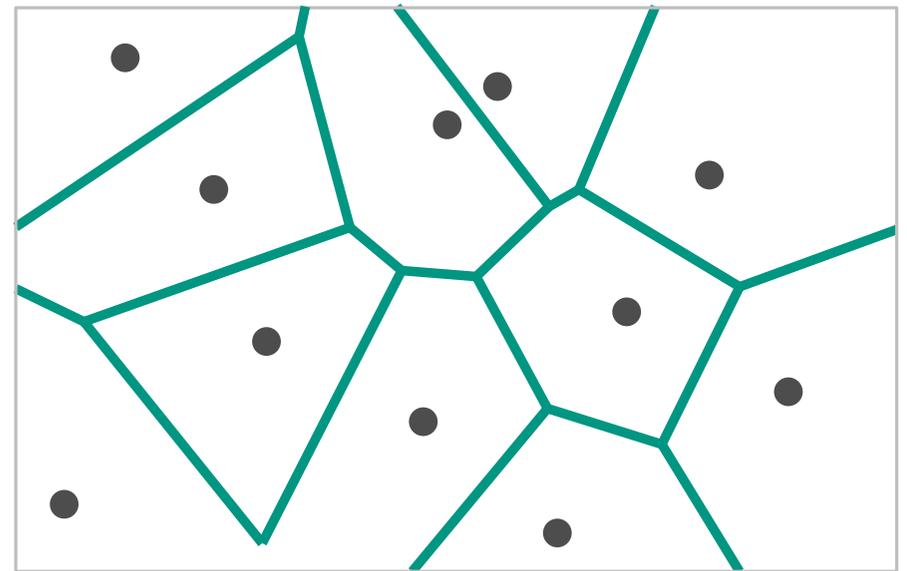


# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am weitesten von allen AKWs entfernt ist.

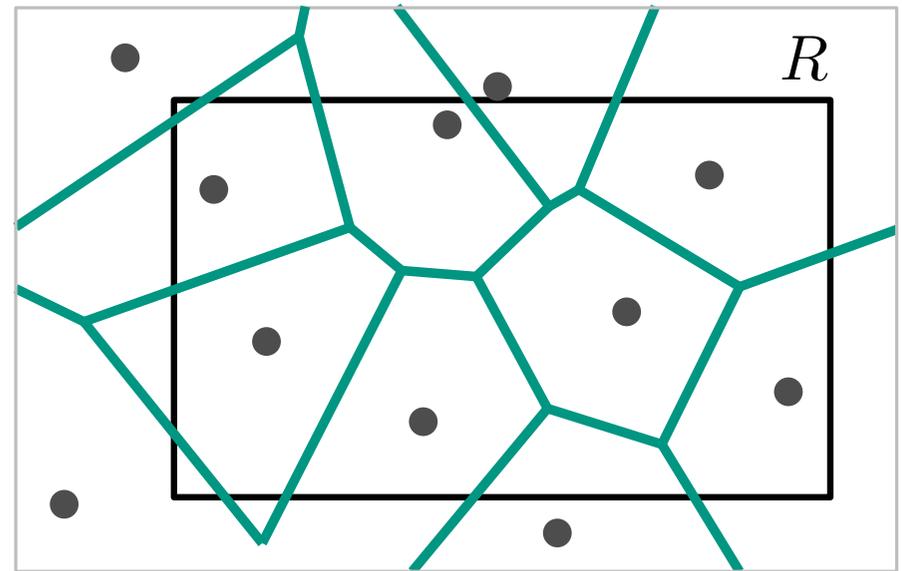
# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am weitesten von allen AKWs entfernt ist.



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

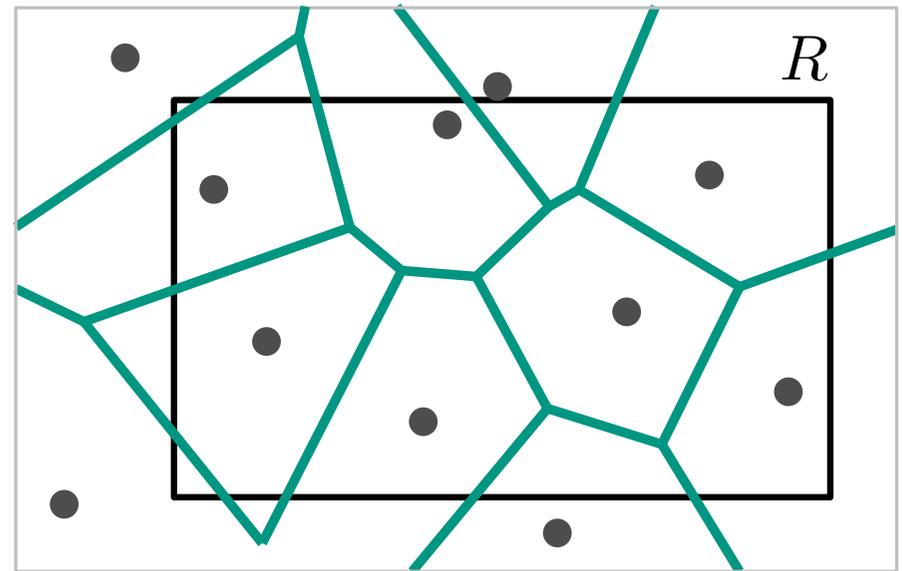


# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

- Kandidaten reichen aus
- Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n)$



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

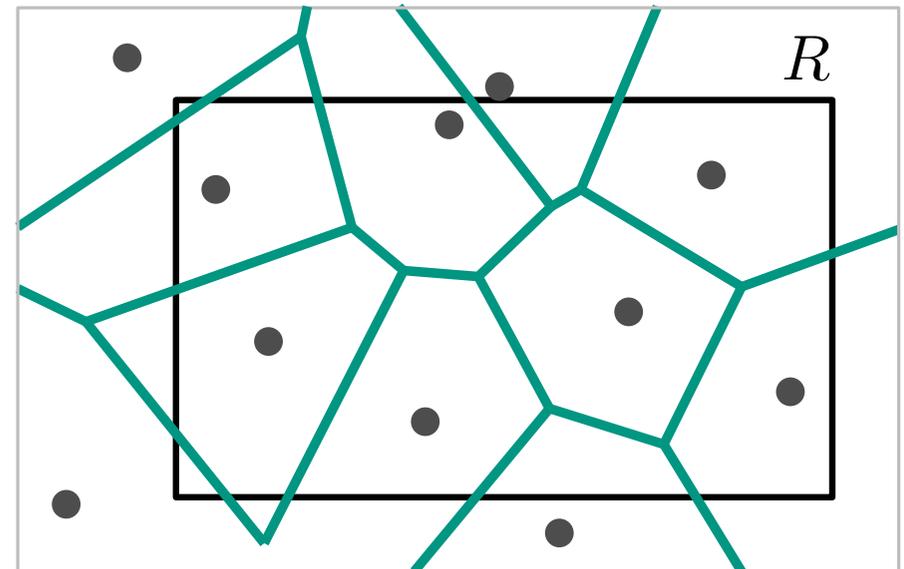
Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

- Kandidaten reichen aus
- Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n)$

**Annahme:** optimaler Punkt  $r$  der nicht Kriterien genügt.

**Bessere Lösung durch:**



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

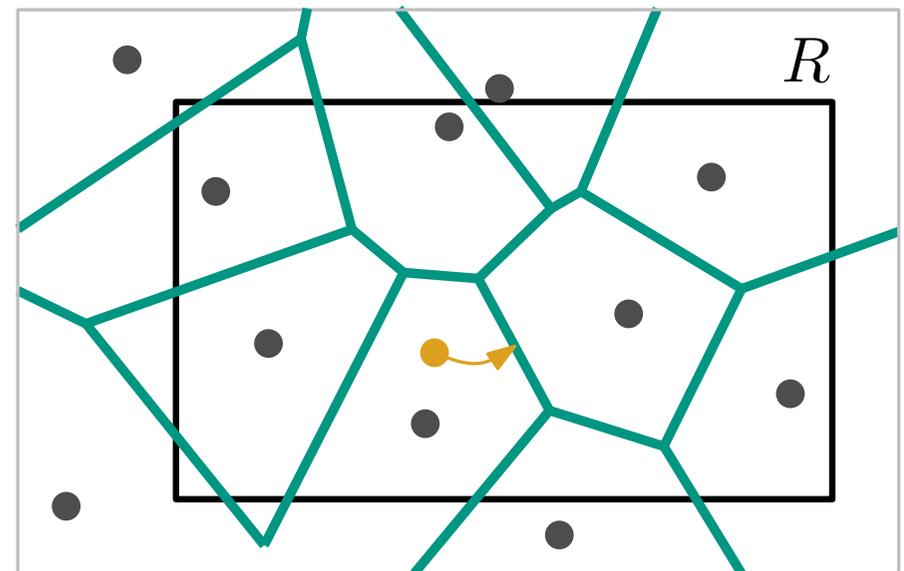
- Kandidaten reichen aus
- Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n)$

**Annahme:** optimaler Punkt  $r$  der nicht Kriterien genügt.

**Bessere Lösung durch:**

$r$  liegt im Inneren einer Zelle.

→ Bewege  $r$  Richtung Rand.



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

- Kandidaten reichen aus
- Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n)$

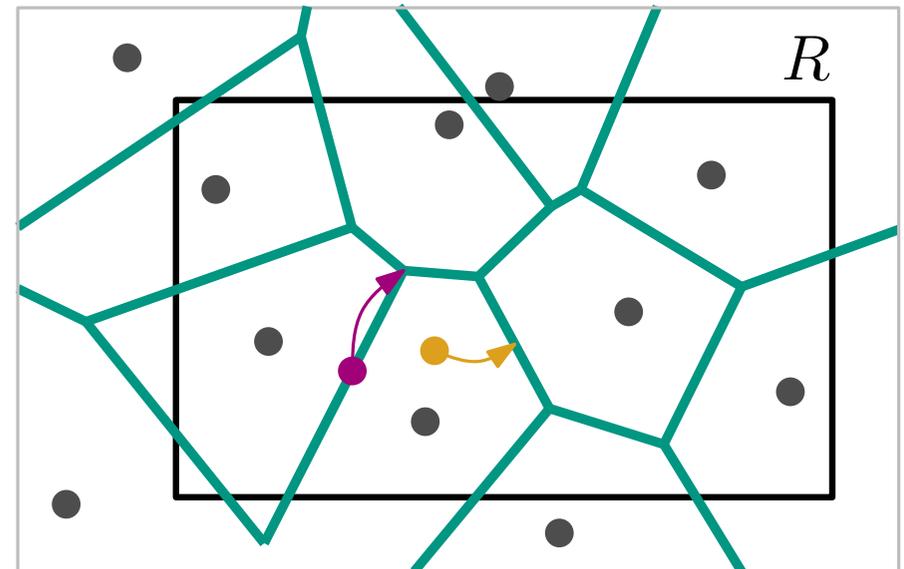
**Annahme:** optimaler Punkt  $r$  der nicht Kriterien genügt.

**Bessere Lösung durch:**

$r$  liegt im Inneren einer Zelle.

→ Bewege  $r$  Richtung Rand.

$r$  liegt auf Voronoi-Kante. → In eine der beiden Richtungen schieben.



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

- Kandidaten reichen aus
- Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n)$

**Annahme:** optimaler Punkt  $r$  der nicht Kriterien genügt.

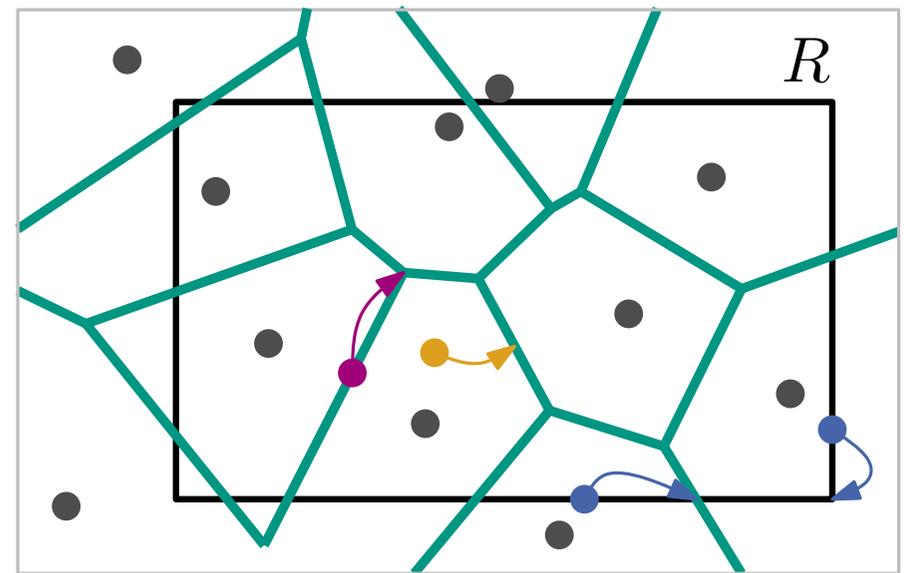
**Bessere Lösung durch:**

$r$  liegt im Inneren einer Zelle.

→ Bewege  $r$  Richtung Rand.

$r$  liegt auf Voronoi-Kante. → In eine der beiden Richtungen schieben.

$r$  liegt auf Kante von  $R$  → Schiebe in Richtung von Schnittpunkt von  $R$  & Vor.-Kanten, oder  
→ Schiebe in Richtung von Ecke von  $R$

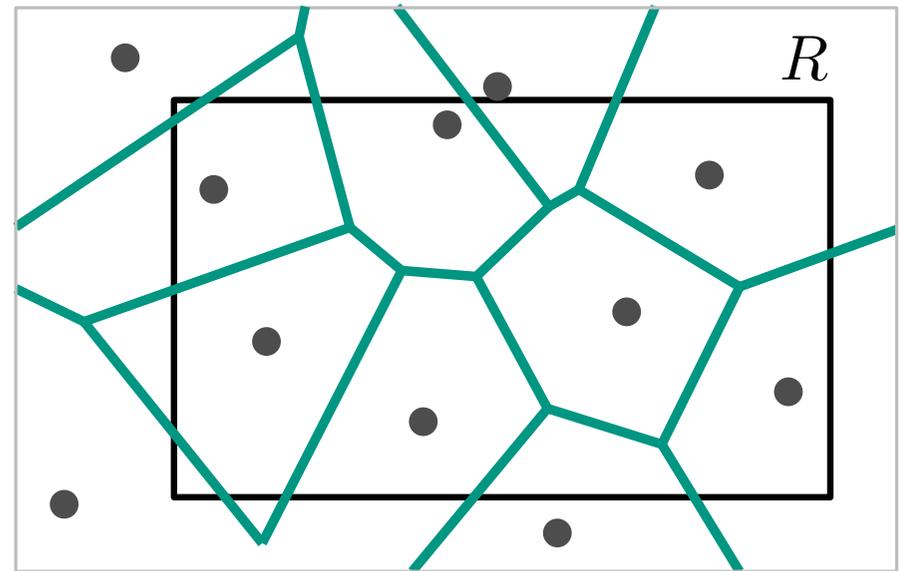


# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

- Kandidaten reichen aus
- Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n)$



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

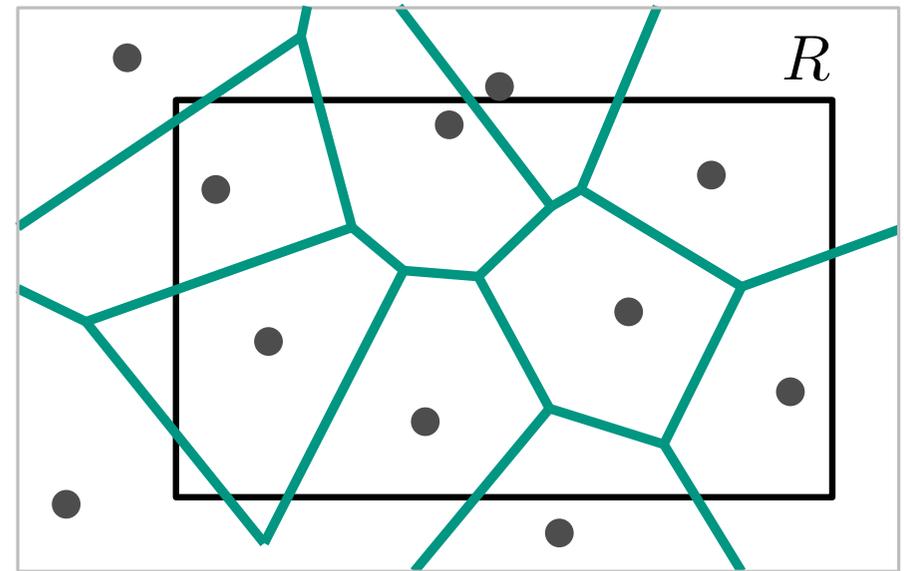
- Kandidaten reichen aus
- Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n)$

**Idee:** Teste alle möglichen Kandidaten

Es kann nur  $\mathcal{O}(n)$  viele geben:

- $\mathcal{O}(n)$  viele Vor.-Kanten und -Knoten
- $R$  kann mit jeder Kante maximal 2 Schnittpunkte haben.

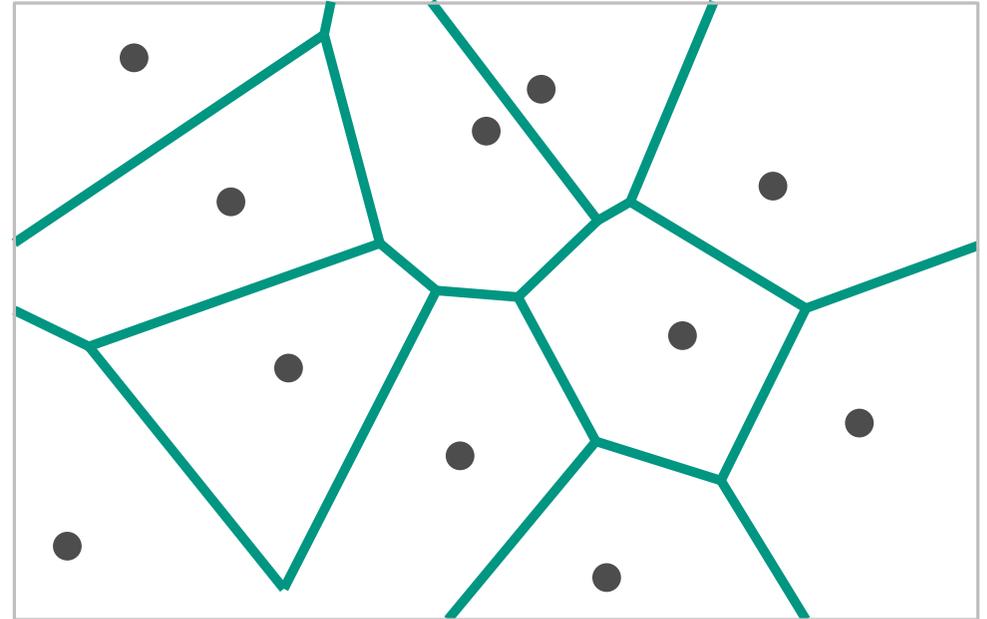
—► Berechnung in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit möglich



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am weitesten von allen AKWs entfernt ist.

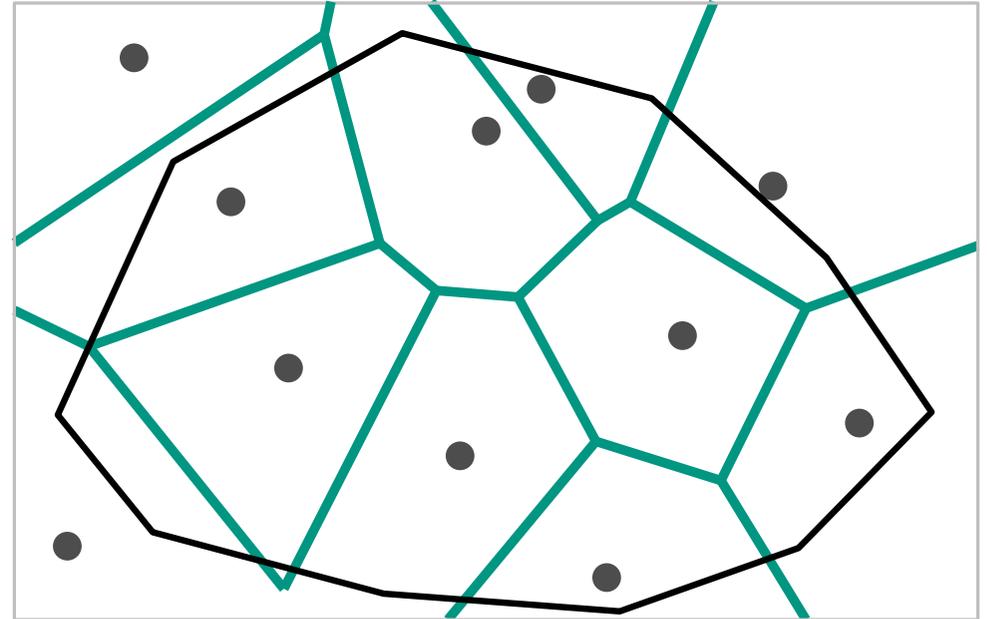
Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon  $P$  mit  $m$  Knoten.



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon  $P$  mit  $m$  Knoten.



# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

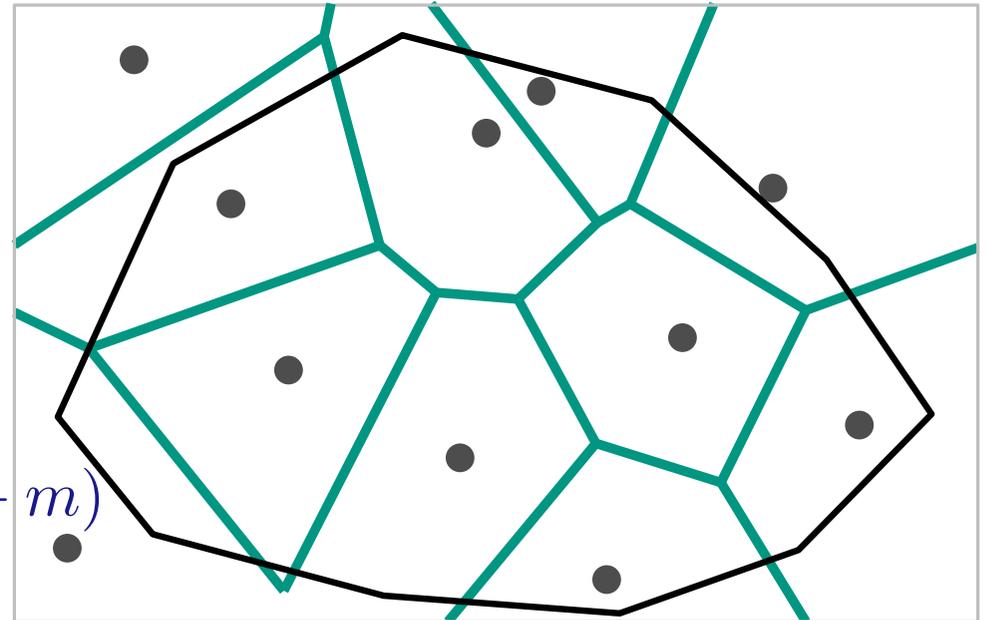
Finde Punkt der am weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon  $P$  mit  $m$  Knoten.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

1) Kandidaten reichen aus

2) Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n + m)$

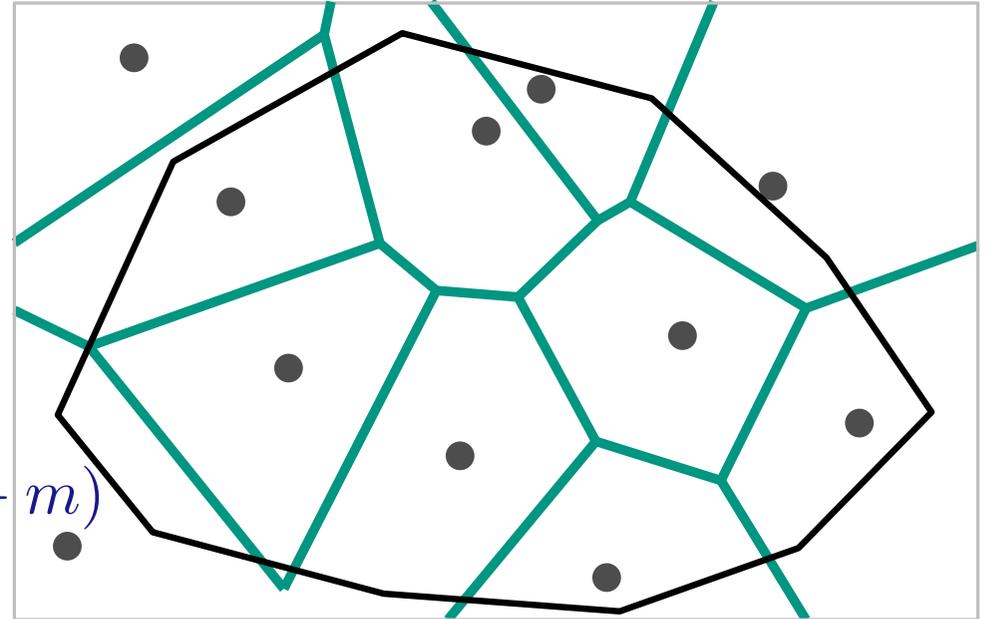


# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am Weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon  $P$  mit  $m$  Knoten.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten



1) Kandidaten reichen aus

2) Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n + m)$

zu 1.) gleiche Argumentation wie bei a).

# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

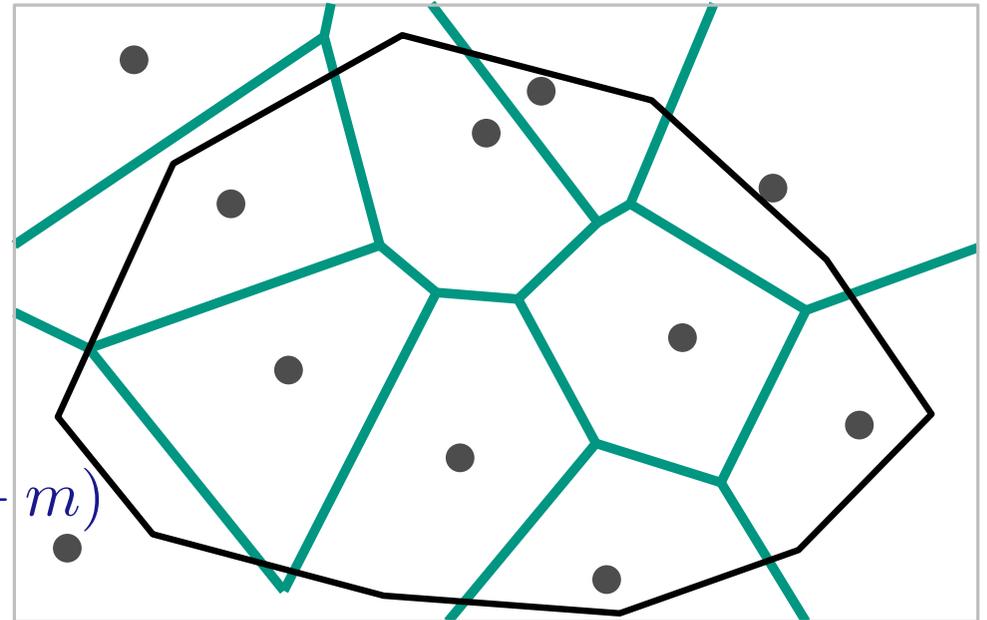
Finde Punkt der am weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon  $P$  mit  $m$  Knoten.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten

- 1) Kandidaten reichen aus
- 2) Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n + m)$

zu 1.) gleiche Argumentation wie bei a).

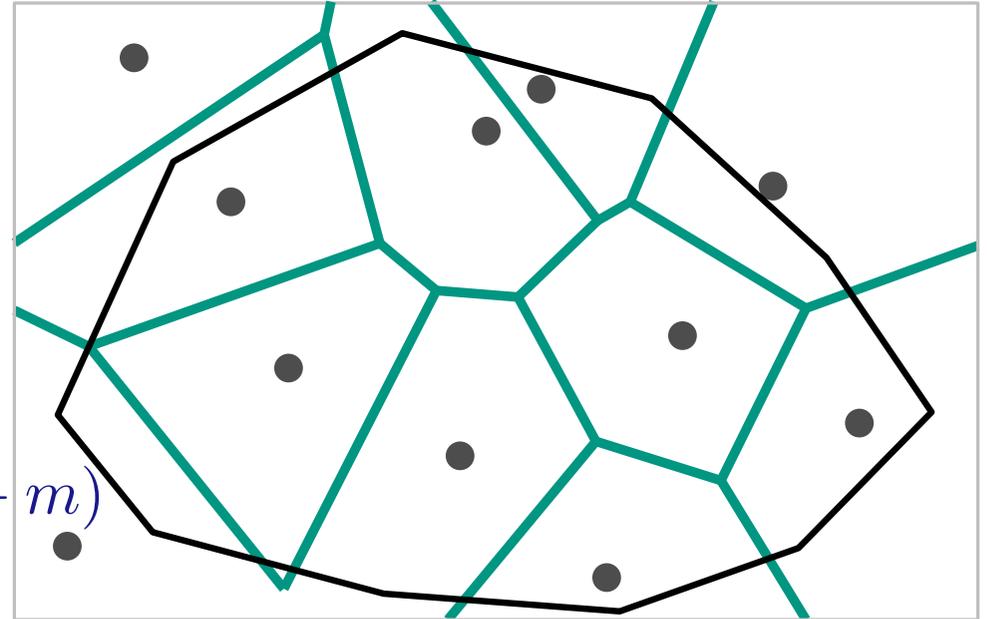


# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon  $P$  mit  $m$  Knoten.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten



1) Kandidaten reichen aus

2) Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n + m)$

zu 1.) gleiche Argumentation wie bei a).

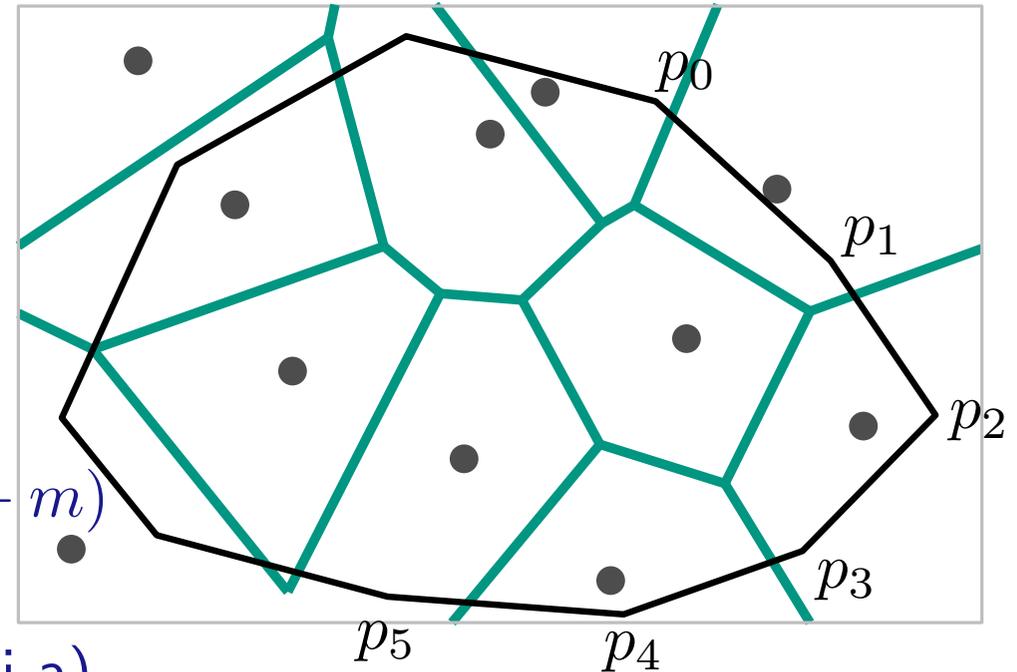
zu 2.)

# Aufgabe 4 – Atomkraftwerke

Finde Punkt der am weitesten von allen AKWs entfernt ist.

Dieses mal: Statt Rechteck konvexes Polygon  $P$  mit  $m$  Knoten.

- Voronoi-Knoten
- Ecken des Rechtecks  $R$
- Schnittpunkt  $R$  & Voronoi-Kanten



1) Kandidaten reichen aus

2) Algorithmus zur Lösung in  $\mathcal{O}(n + m)$

zu 1.) gleiche Argumentation wie bei a).

zu 2.) 1. Berechne Voronoi-Zelle  $C$ , in der  $p_0$  liegt.

2. Folge im Uhrzeigersinn dem Polygon.

Bestimme Schnittpunkt von  $\overline{p_i p_{i+1}}$  mit aktueller Zelle  $C$

Schnittpunkt liefert Nachbarzelle, durch die  $\overline{p_i p_{i+1}}$  läuft.

➔ Schnittpunkt kann im Durchschnitt in  $\mathcal{O}(1)$  Zeit bestimmt werden.