Übung Algorithmische Geometrie
Point Location

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann
04.06.2014

Übersicht

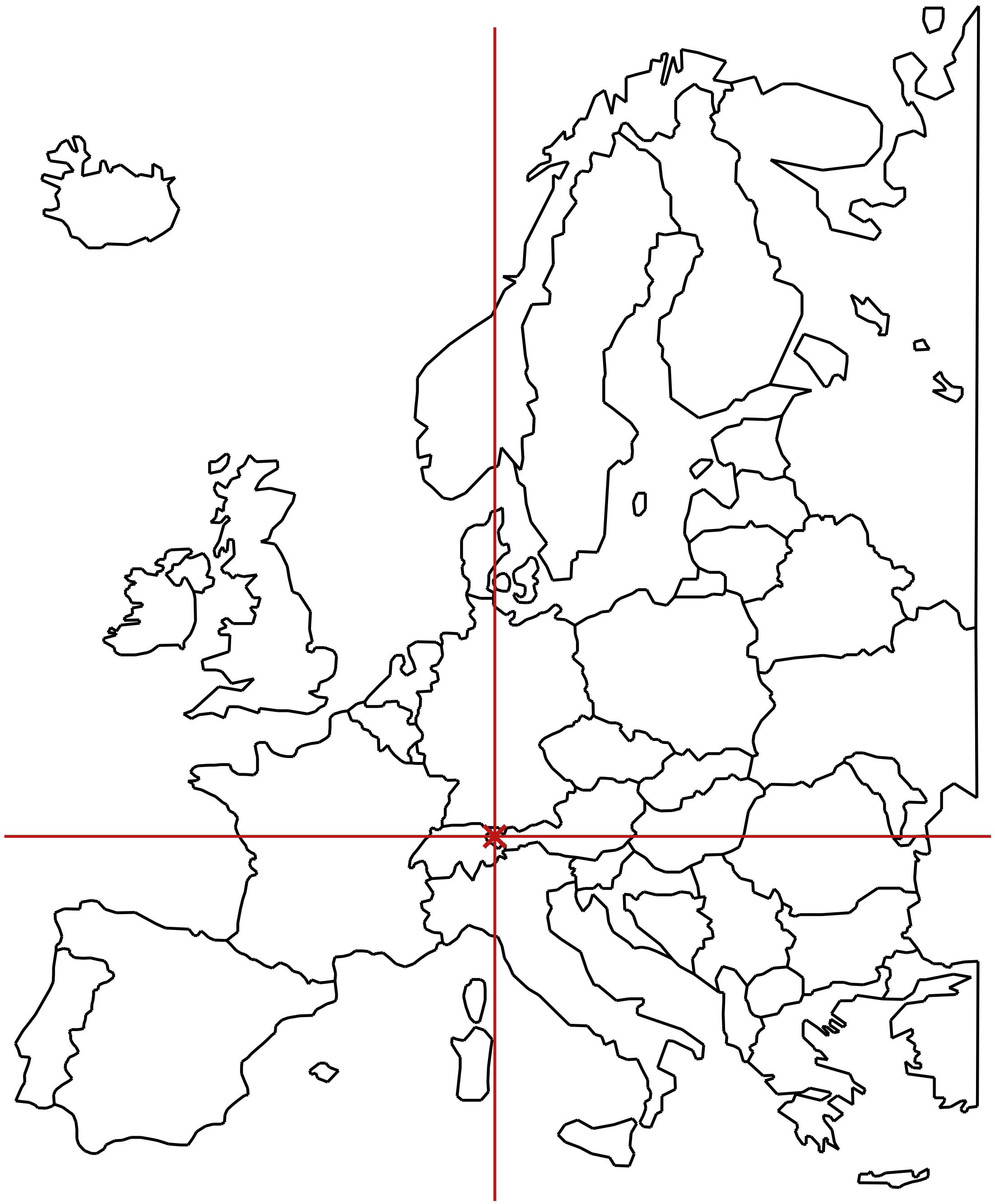
Wiederholung

Übungsblatt 6 - Point Location

Motivation

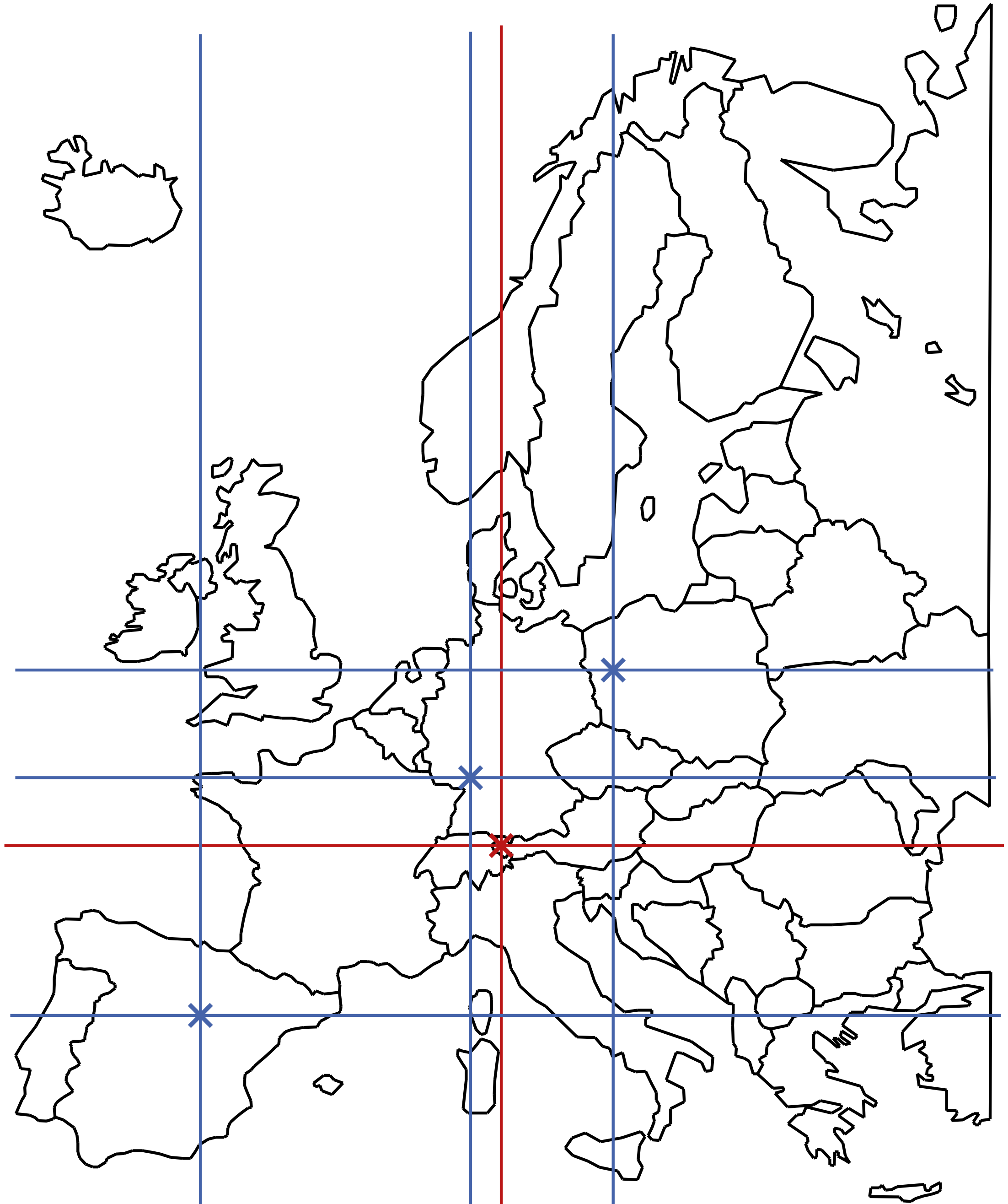
Gegeben eine Position $p = (p_x, p_y)$ in einer Landkarte, bestimme in welchem Land p liegt.

Motivation



Gegeben eine Position $p = (p_x, p_y)$ in einer Landkarte, bestimme in welchem Land p liegt.

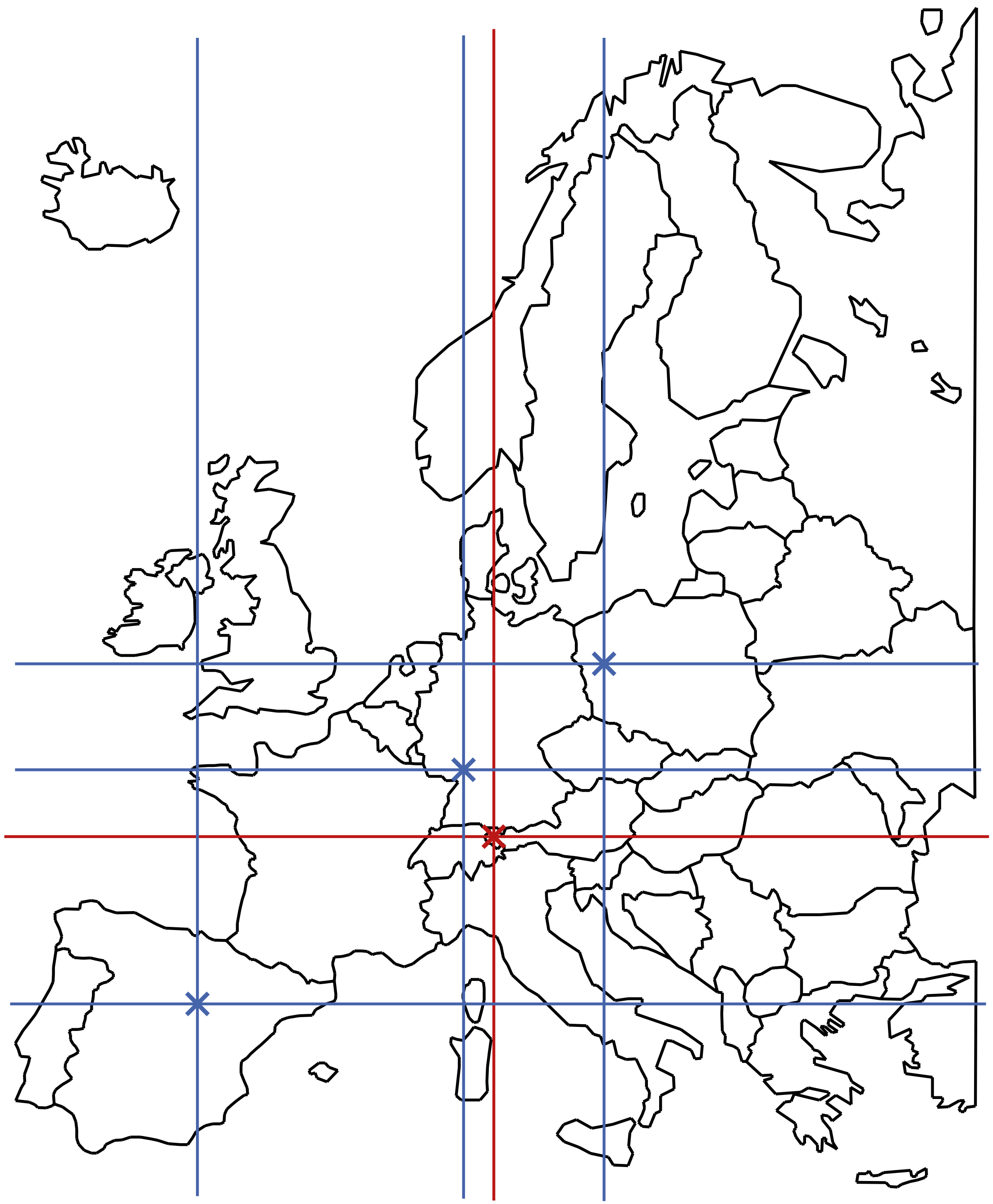
Motivation



Gegeben eine Position $p = (p_x, p_y)$ in einer Landkarte, bestimme in welchem Land p liegt.

Genauer: Finde eine Datenstruktur, die solche Lokalisierungsanfragen effizient beantworten kann.

Motivation

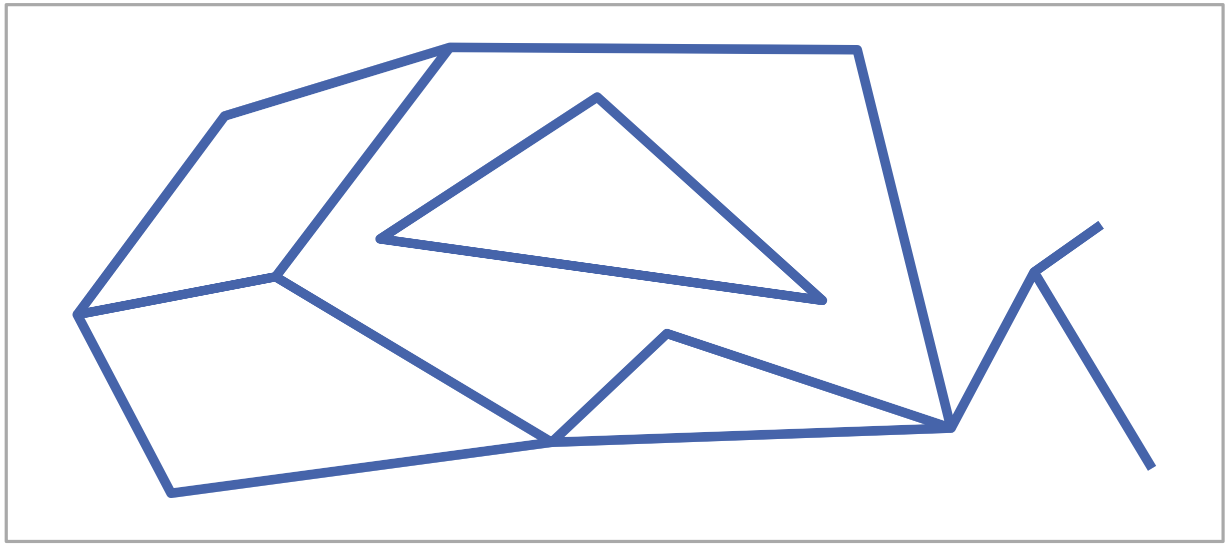


Gegeben eine Position $p = (p_x, p_y)$ in einer Landkarte, bestimme in welchem Land p liegt.

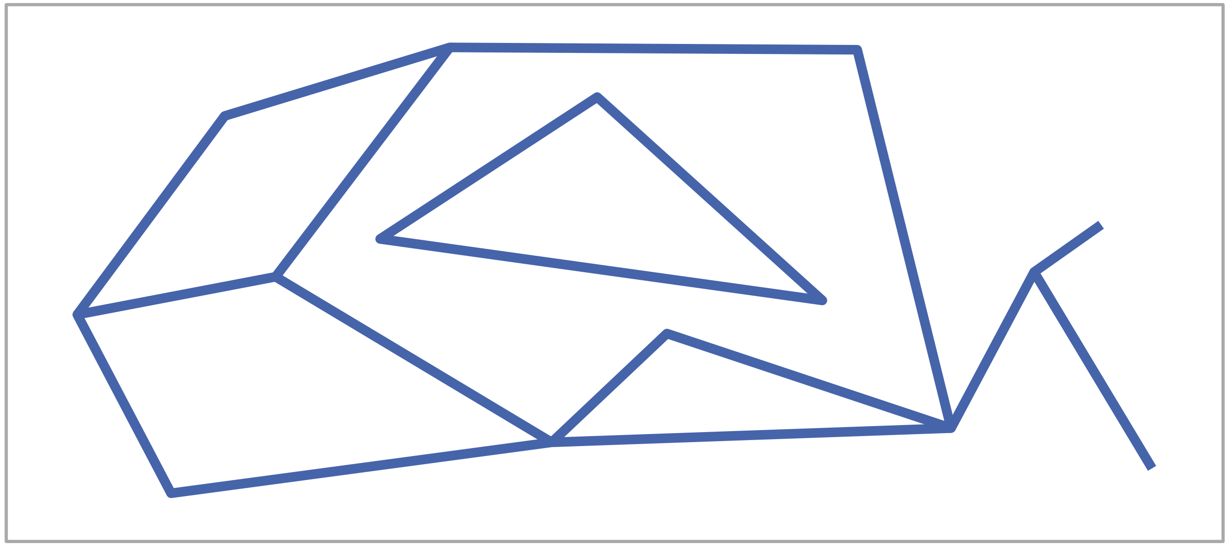
Genauer: Finde eine Datenstruktur, die solche Lokalisierungsanfragen effizient beantworten kann.

Dabei ist die Landkarte modelliert als Unterteilung der Ebene in disjunkte Polygone.

Problemstellung

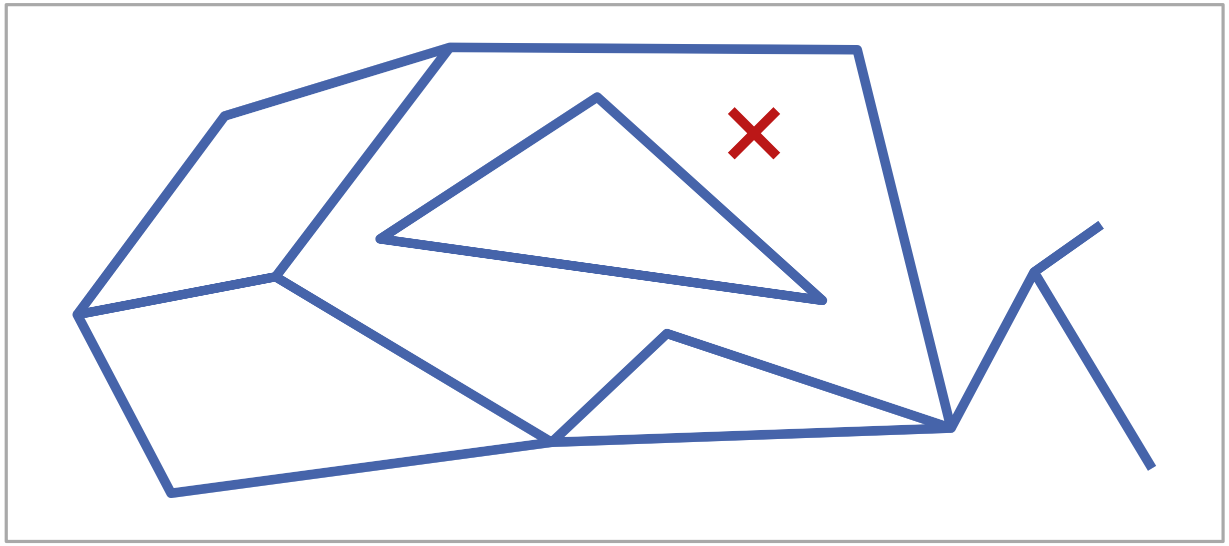


Problemstellung



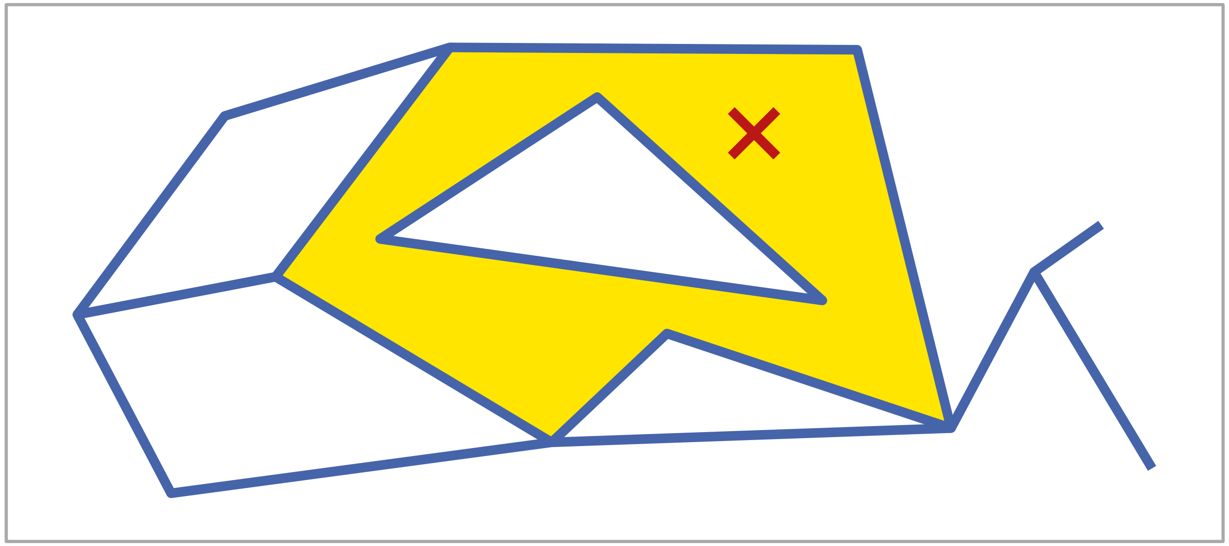
Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Problemstellung



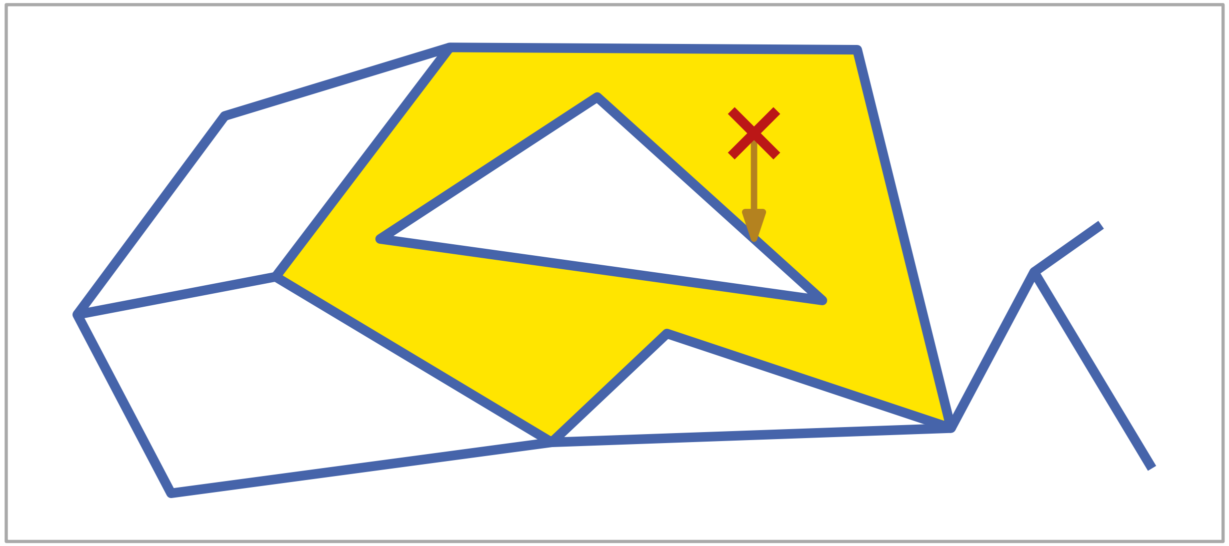
Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Problemstellung



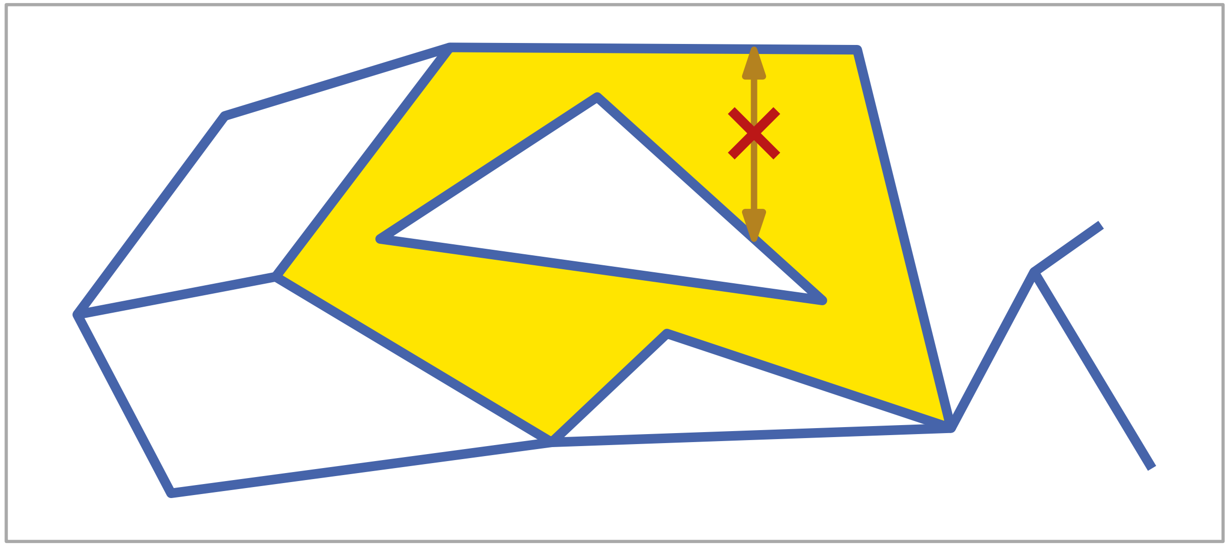
Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Problemstellung



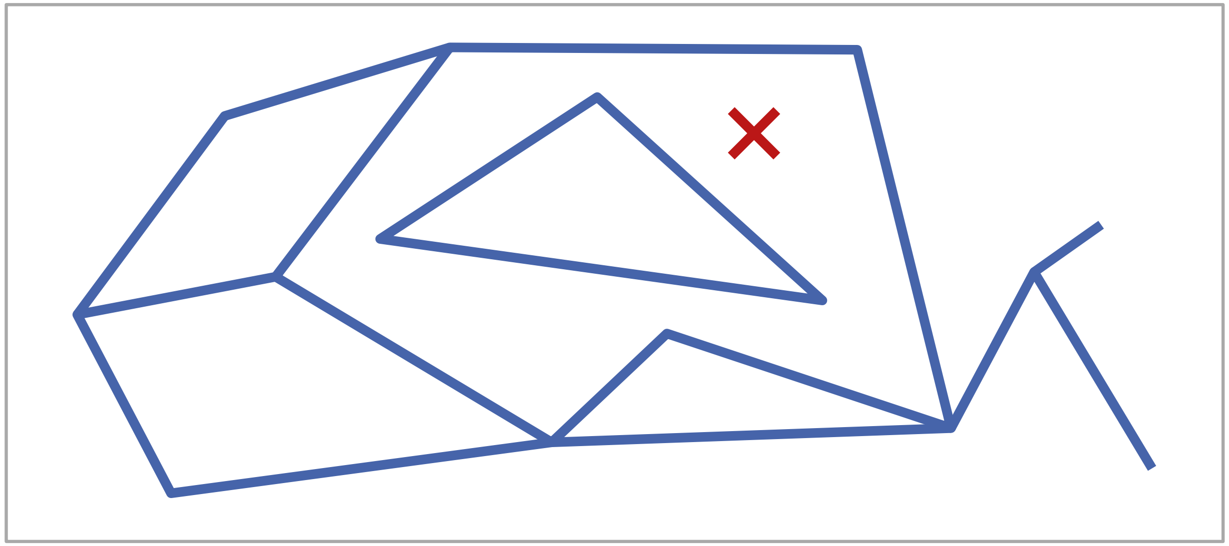
Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Problemstellung



Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

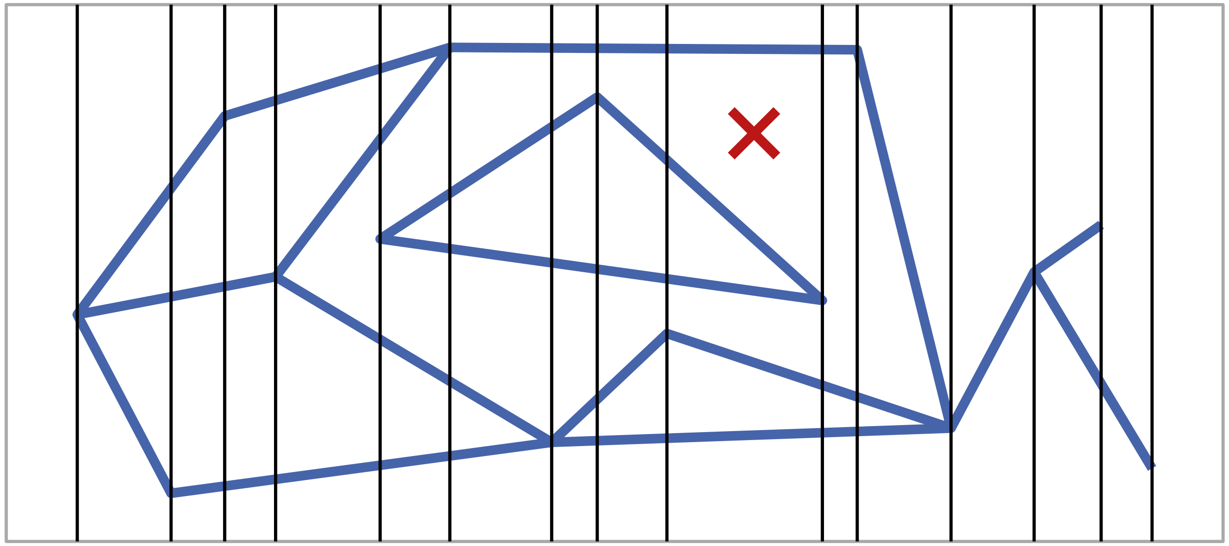
Problemstellung



Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen.

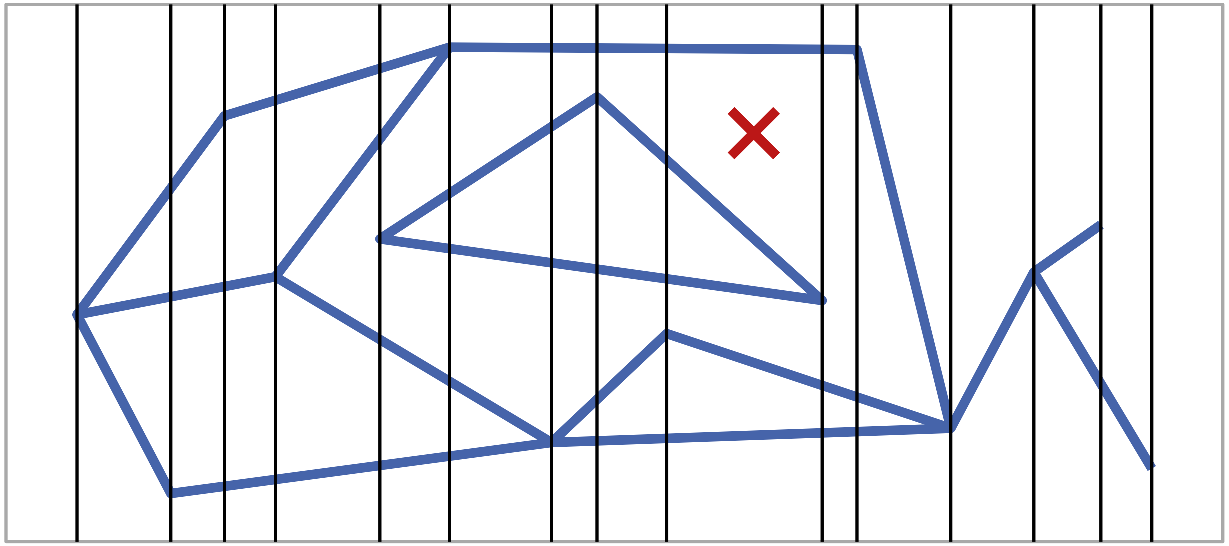
Problemstellung



Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen.

Problemstellung

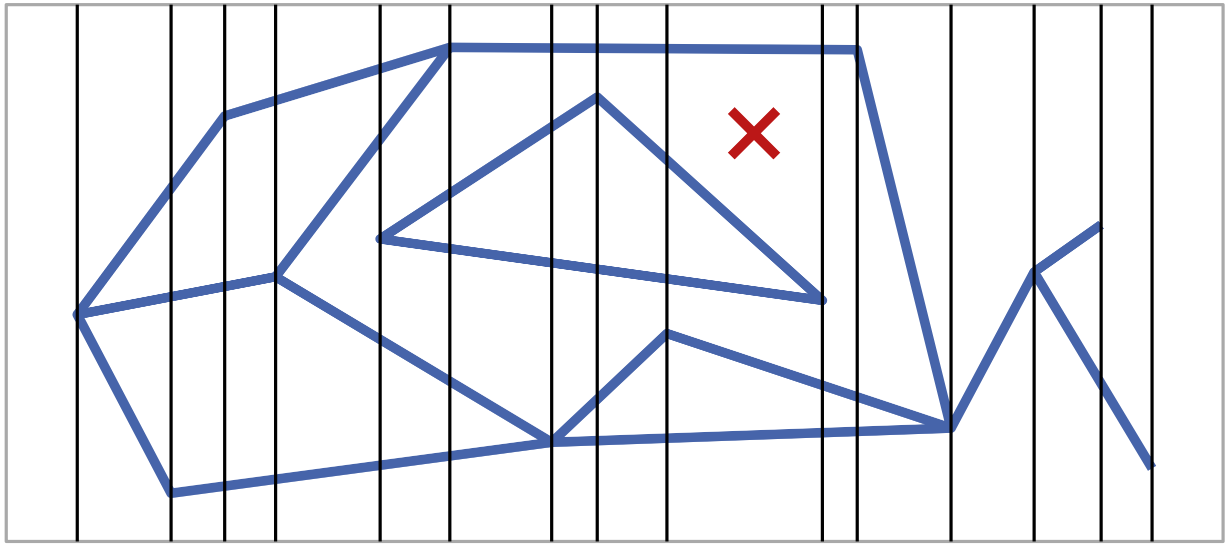


Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen.

Anfrage:

Problemstellung

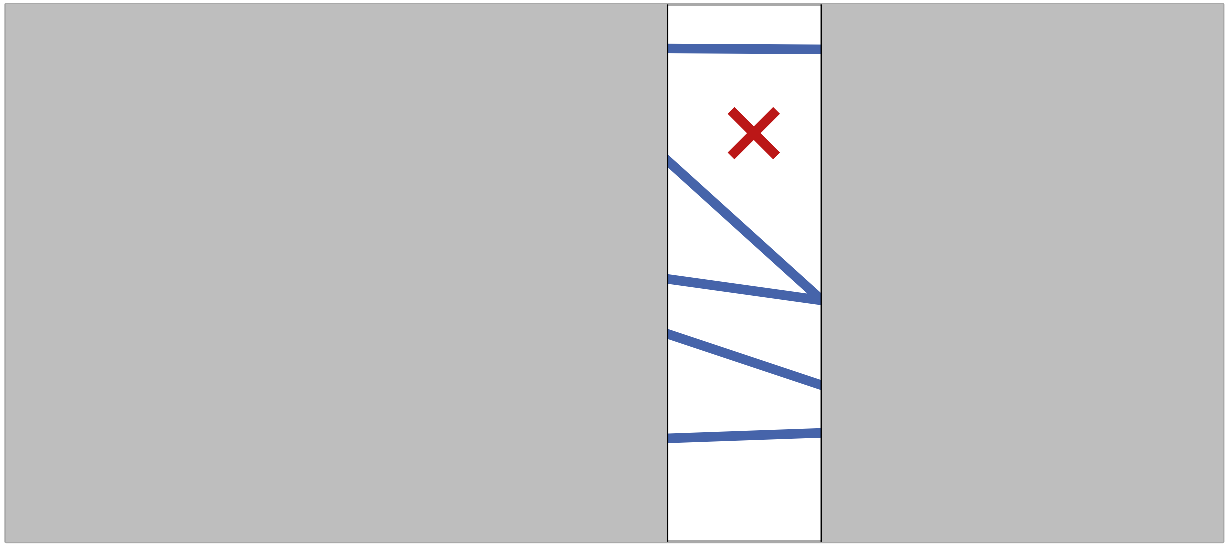


Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen.

Anfrage:
- finde richtigen Streifen

Problemstellung

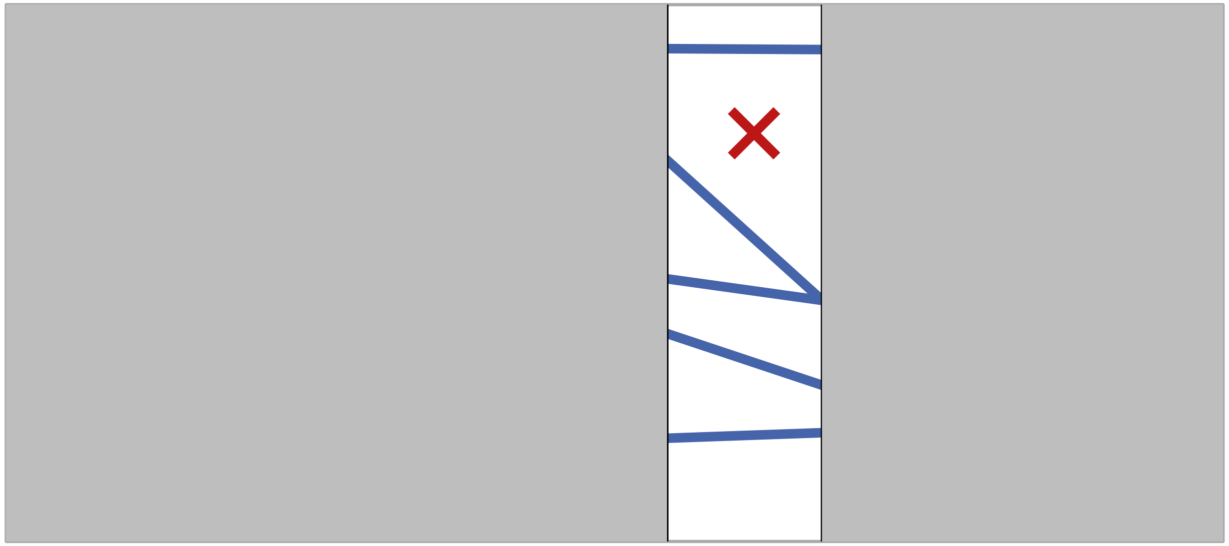


Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen.

Anfrage:
- finde richtigen Streifen

Problemstellung

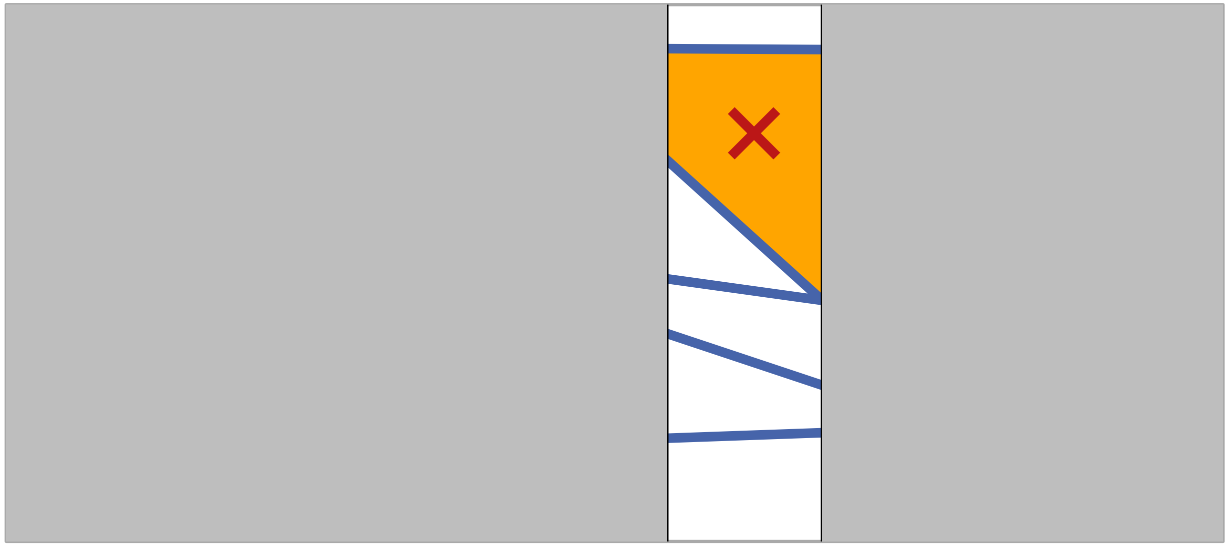


Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen.

Anfrage:
- finde richtigen Streifen
- durchsuche diesen Streifen

Problemstellung

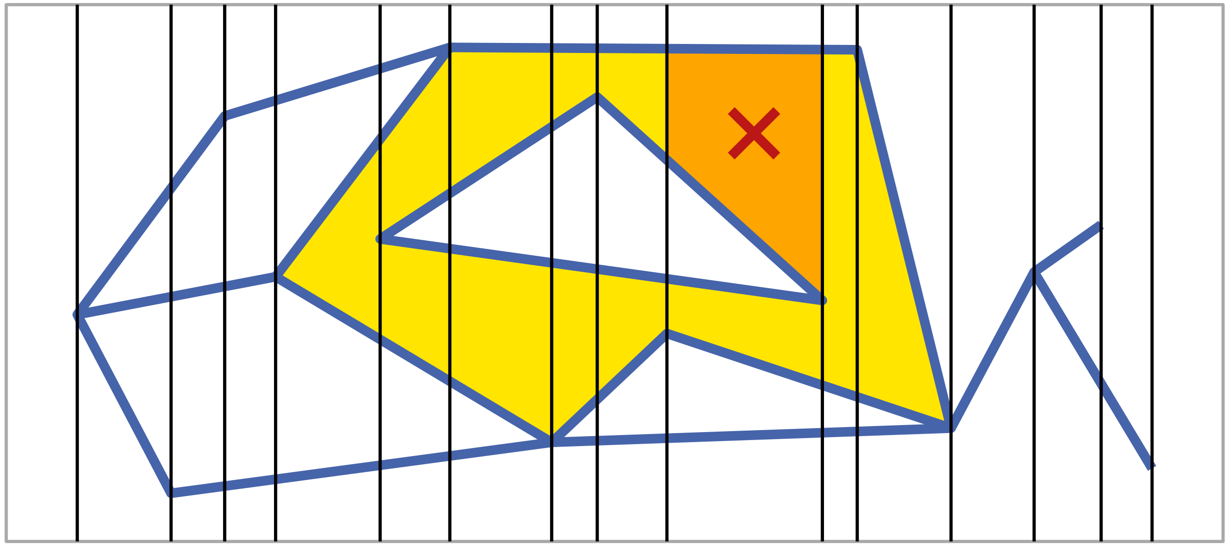


Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen.

Anfrage:
- finde richtigen Streifen
- durchsuche diesen Streifen

Problemstellung



Ziel: Geg. eine Unterteilung $\mathcal{S}$ der Ebene mit n Strecken, erstelle Datenstruktur für schnelle Punktlokalisierung.

Lösung: Zerteile $\mathcal{S}$ an Punkten in vertikale Streifen. $O(\log n)$ Zeit

Anfrage:
- finde richtigen Streifen
- durchsuche diesen Streifen

} 2 binäre Suchen

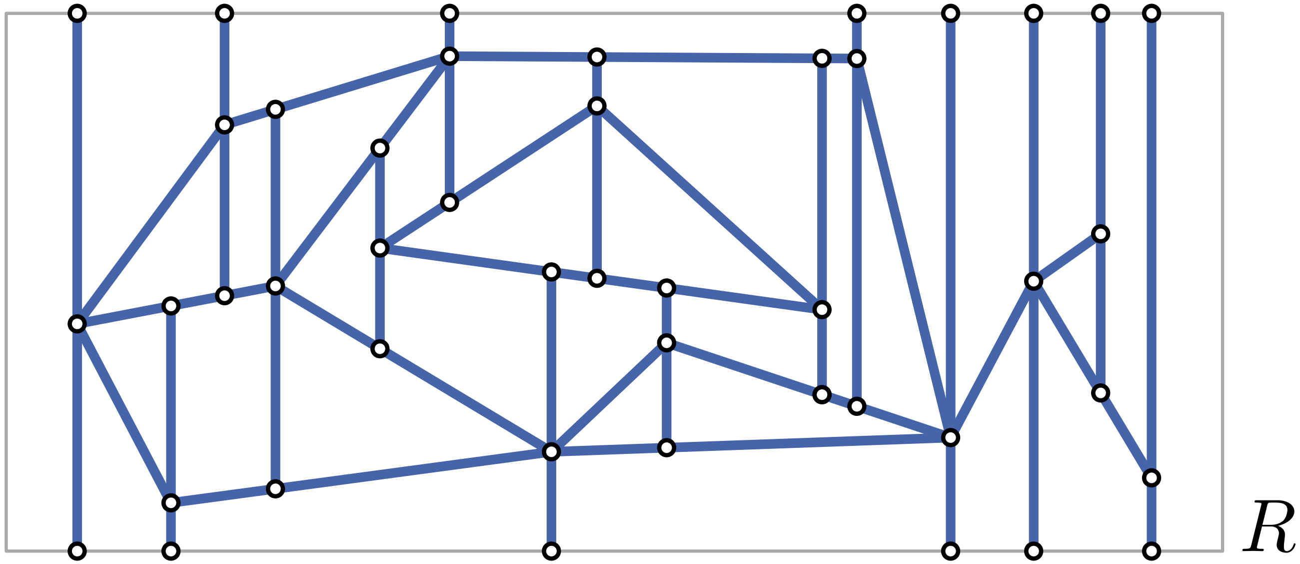
Aber: Platz $\Theta(n^2)$

Verringern der Komplexität

Beob.: Die Streifenzerlegung ist eine Verfeinerung $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}$ in (evtl. degenerierte) Trapeze.

Ziel: Finde geeignete Verfeinerung von $\mathcal{S}$ mit geringerer Komplexität!

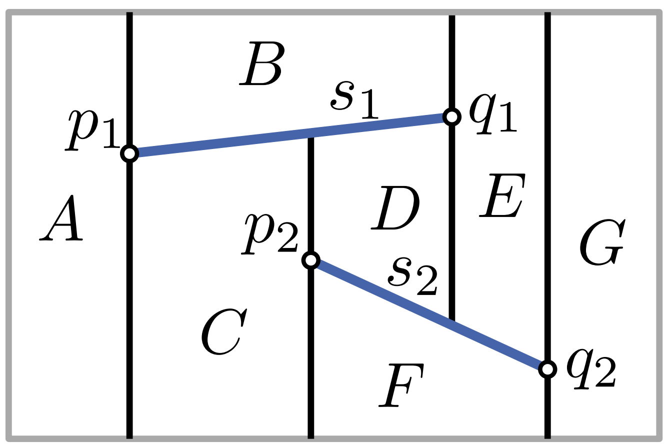
Lösung: *Trapezzerlegung* $\mathcal{T}(\mathcal{S})$



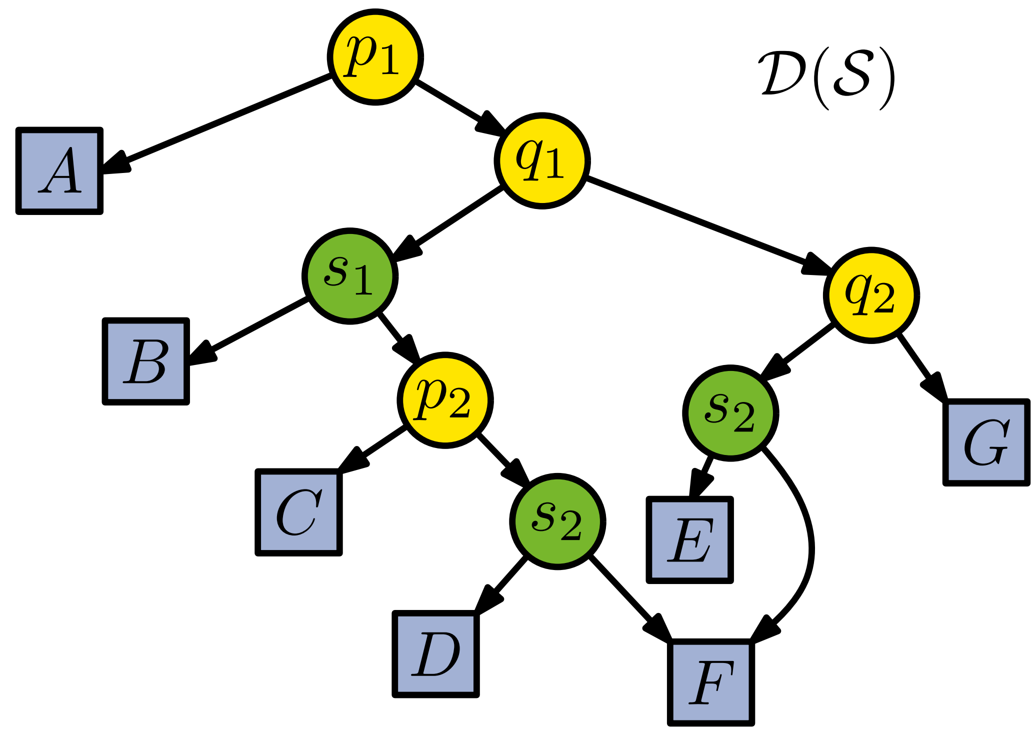
Annahme: $\mathcal{S}$ ist in *allgemeiner Lage*, d.h. keine zwei Knoten haben gleiche x-Koordinaten.

Suchstruktur

Ziel: Berechne die Trapezzerlegung $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ und gleichzeitig eine Datenstruktur $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ zur Lokalisierung in $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.



$\mathcal{T}(\mathcal{S})$



$\mathcal{D}(\mathcal{S})$ ist ein DAG mit:

- p — x-Knoten für Punkt p testet auf links/rechts von p
- s — y-Knoten für Strecke s testet auf oberhalb/unterhalb von s
- Δ — Blattknoten für Trapez Δ

Analyse

Satz 1: Der Algorithmus berechnet die Trapezzerlegung $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ und die Suchstruktur $\mathcal{D}$ für eine Menge $\mathcal{S}$ von n Strecken in *erwartet* $O(n \log n)$ Zeit. Die *erwartete* Größe von $\mathcal{D}$ ist $O(n)$ und die *erwartete* Anfragezeit $O(\log n)$.

Analyse

Satz 1: Der Algorithmus berechnet die Trapezzerlegung $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ und die Suchstruktur $\mathcal{D}$ für eine Menge $\mathcal{S}$ von n Strecken in *erwartet* $O(n \log n)$ Zeit. Die *erwartete* Größe von $\mathcal{D}$ ist $O(n)$ und die *erwartete* Anfragezeit $O(\log n)$.

Beobachtungen:

- im schlimmsten Fall kann $\mathcal{D}$ quadratisch groß werden und eine Anfrage lineare Zeit benötigen
- Hoffnung: das passiert nur selten!
- betrachte erwartete Laufzeit und Größe über alle $n!$ möglichen Permutationen von $\mathcal{S}$
- der Satz gilt unabhängig von der Eingabemenge $\mathcal{S}$

Übersicht

Wiederholung

Übungsblatt 6 - Point Location

Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P

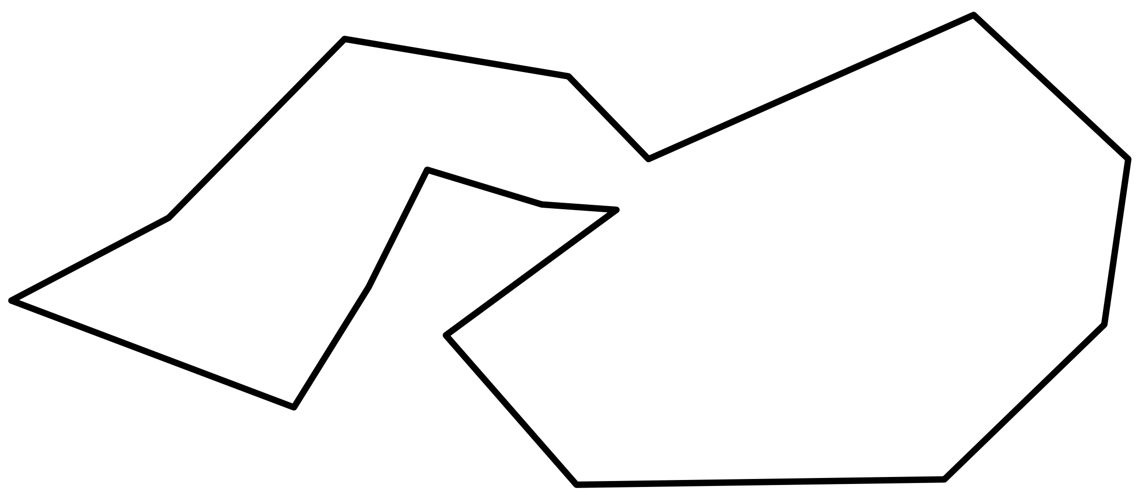
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



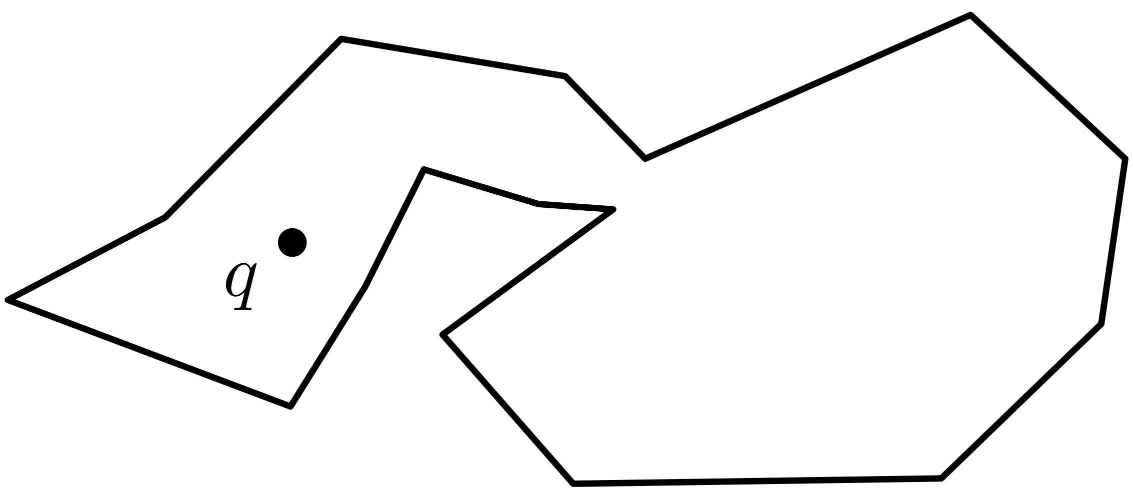
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



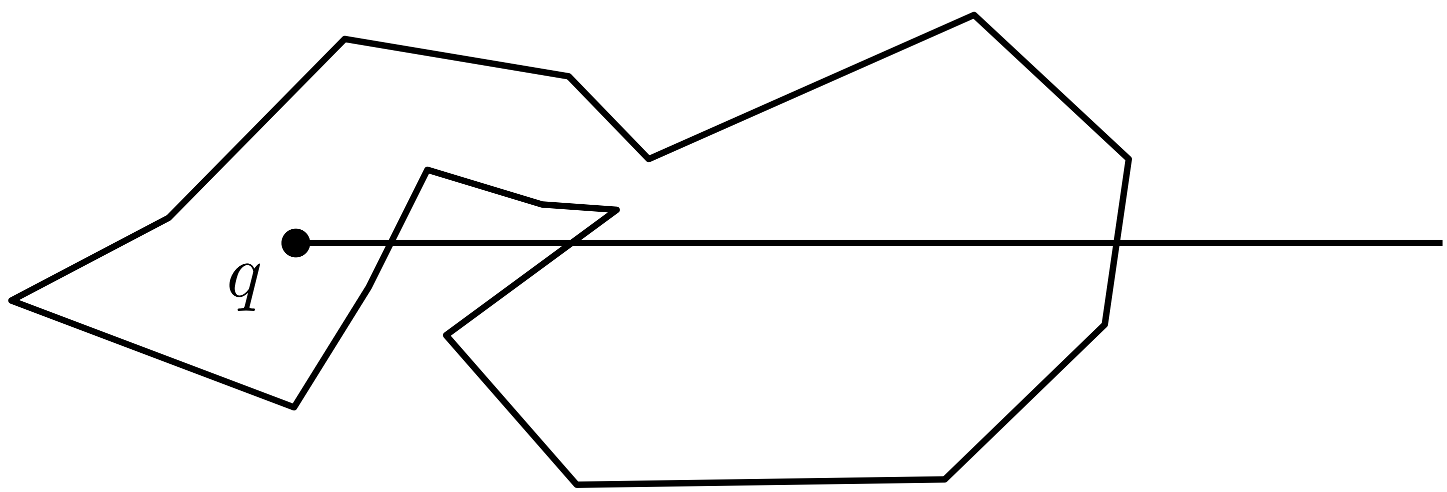
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



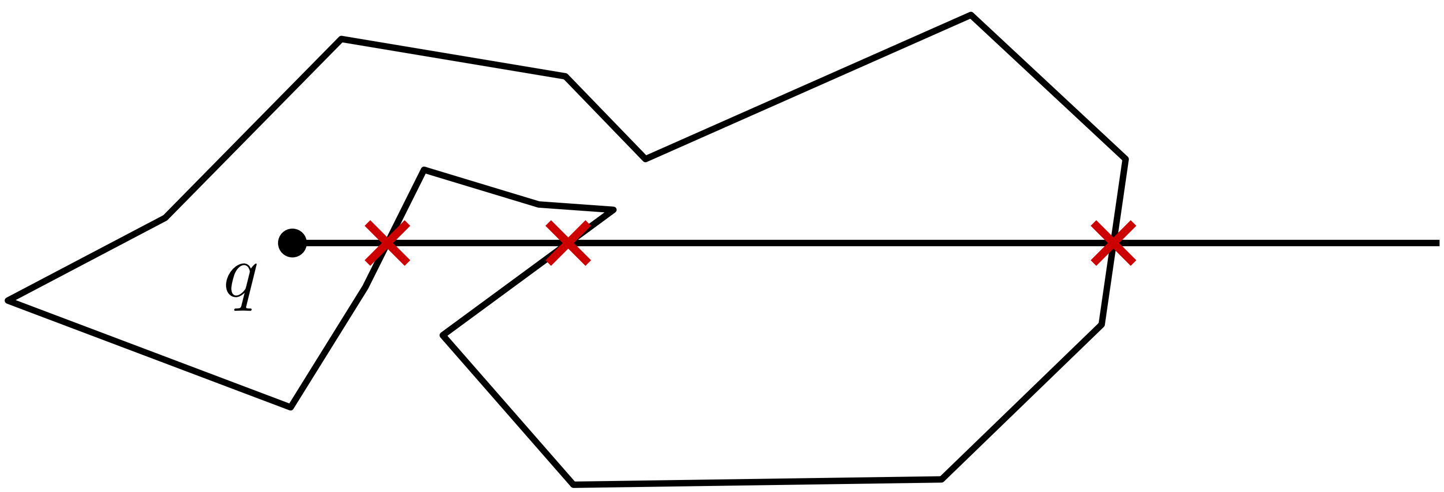
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



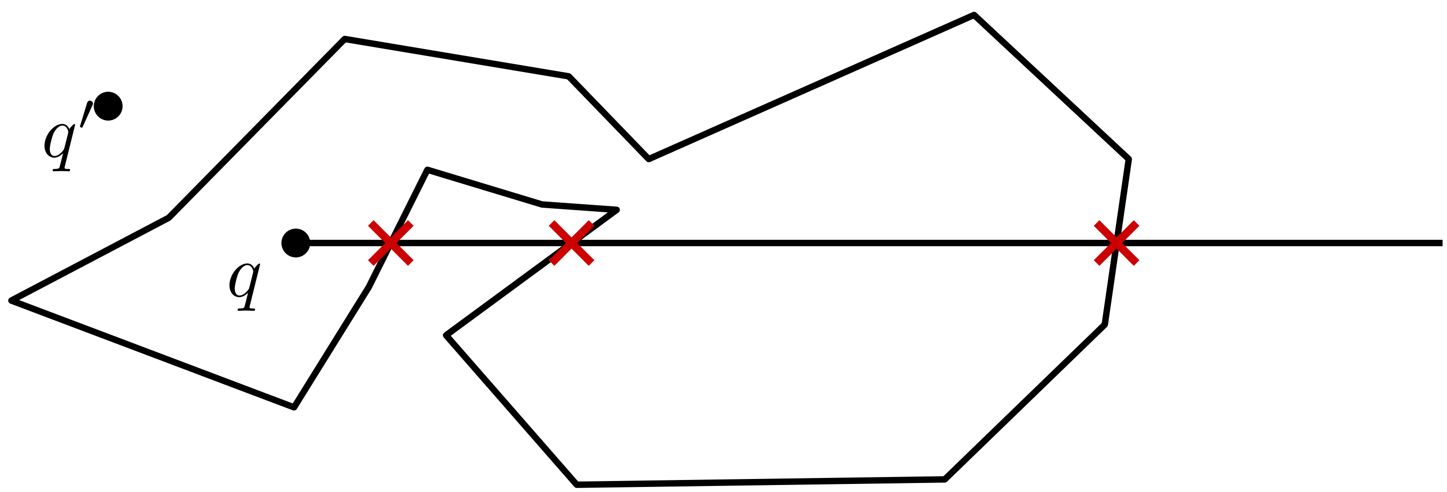
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



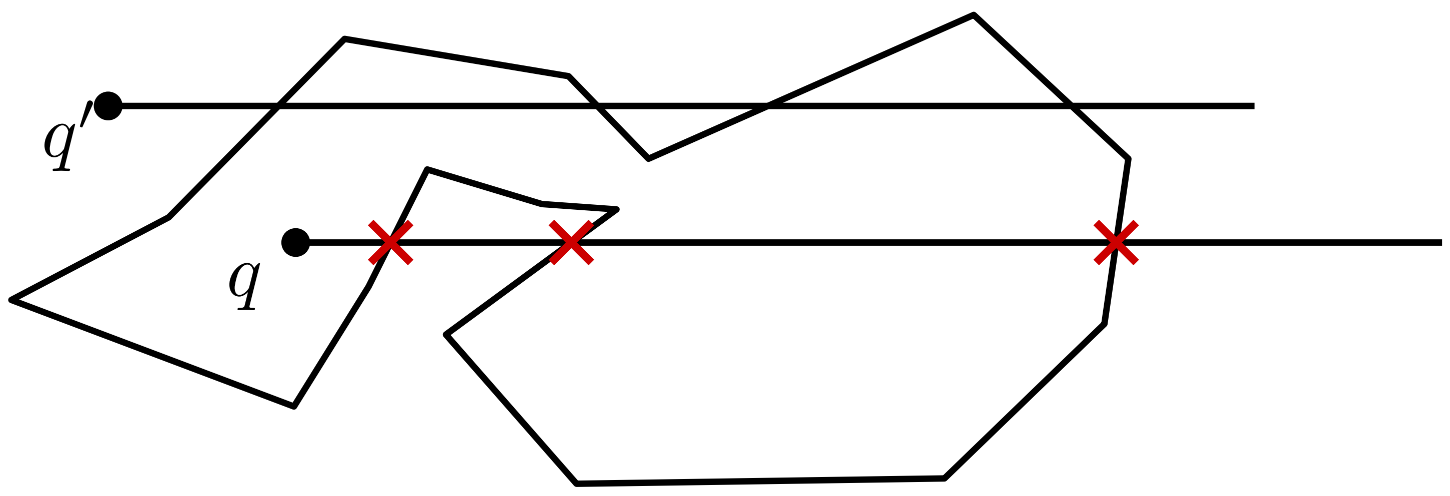
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



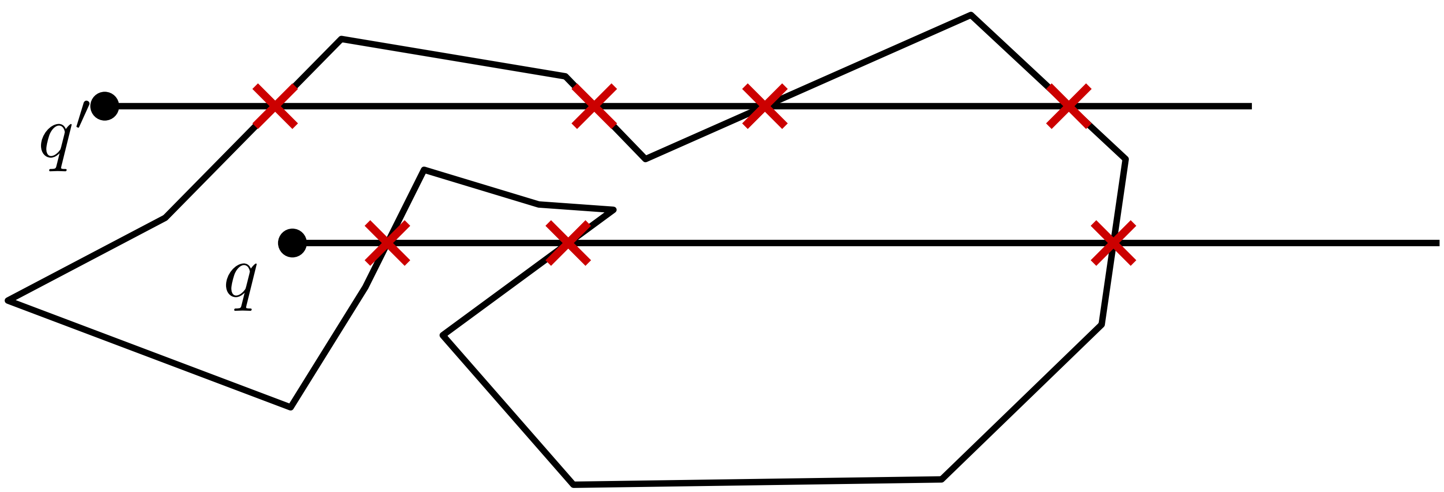
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



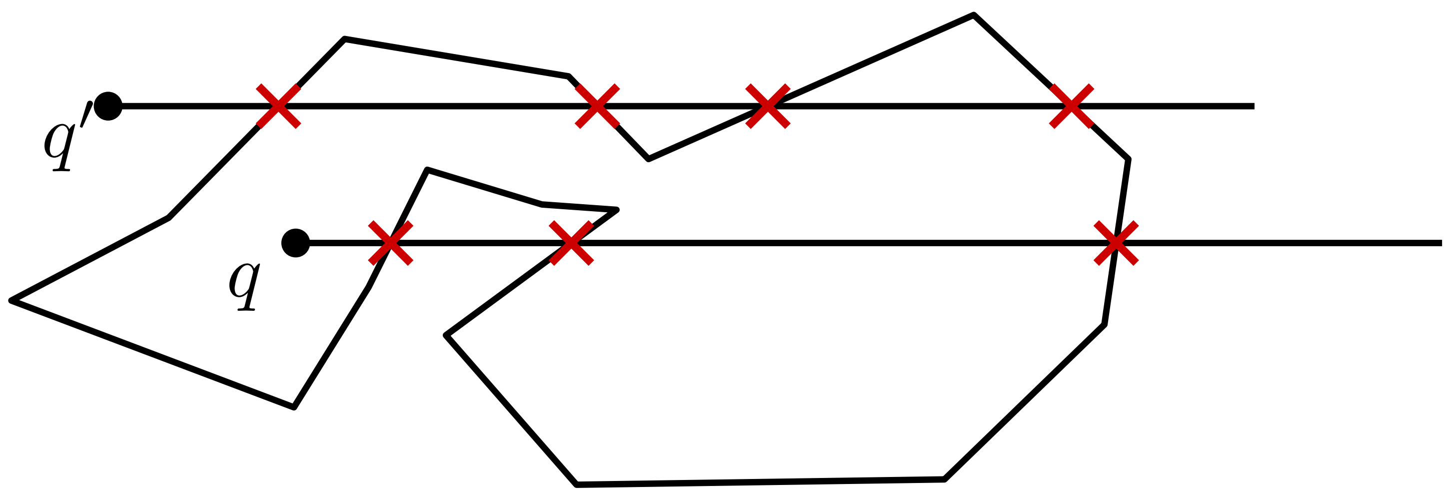
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



a) **Korrektheit**

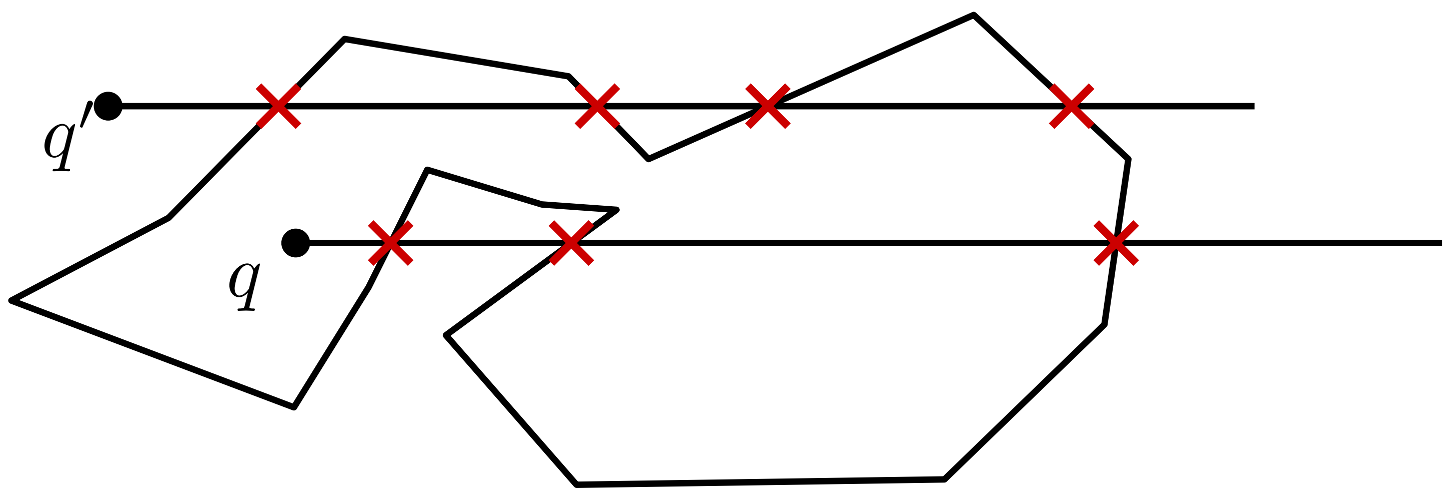
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



b) Degenerierte Fälle?

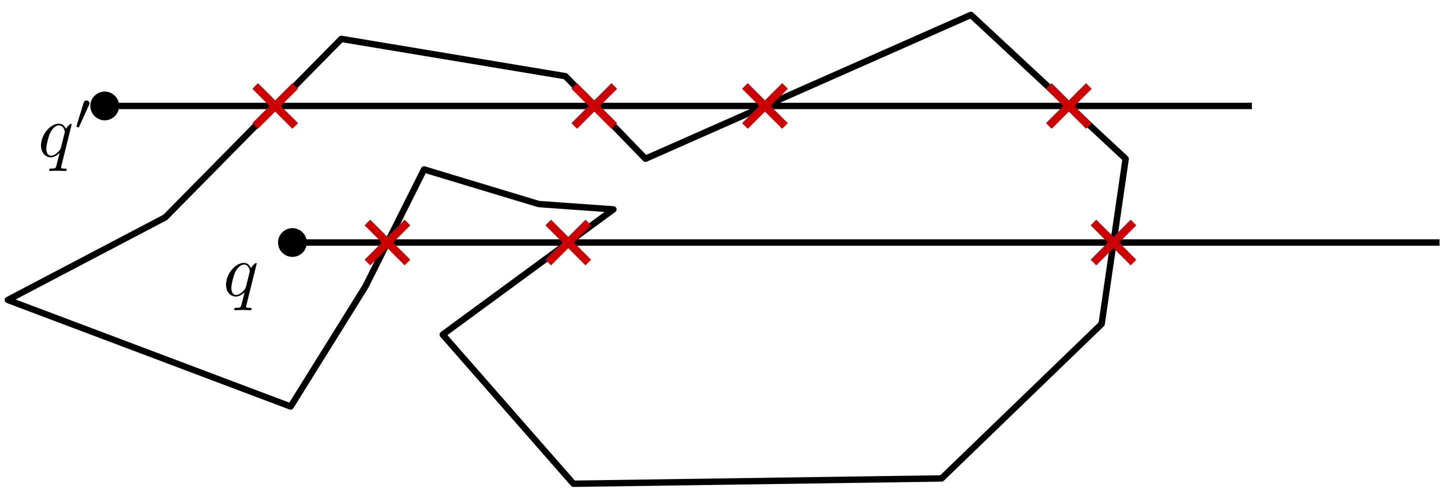
Aufgabe 1

geg.: Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ und Polygon P

Frage: Ist q in P enthalten?

Algorithmus:

1. Starte in q eine horizontal verlaufende Halbgerade ϱ.
2. Zähle Schnitte von Polygonkanten mit ϱ.
   - Anzahl Schnitte gerade: q nicht im Inneren von P
   - Anzahl Schnitte ungerade: q im Inneren von P



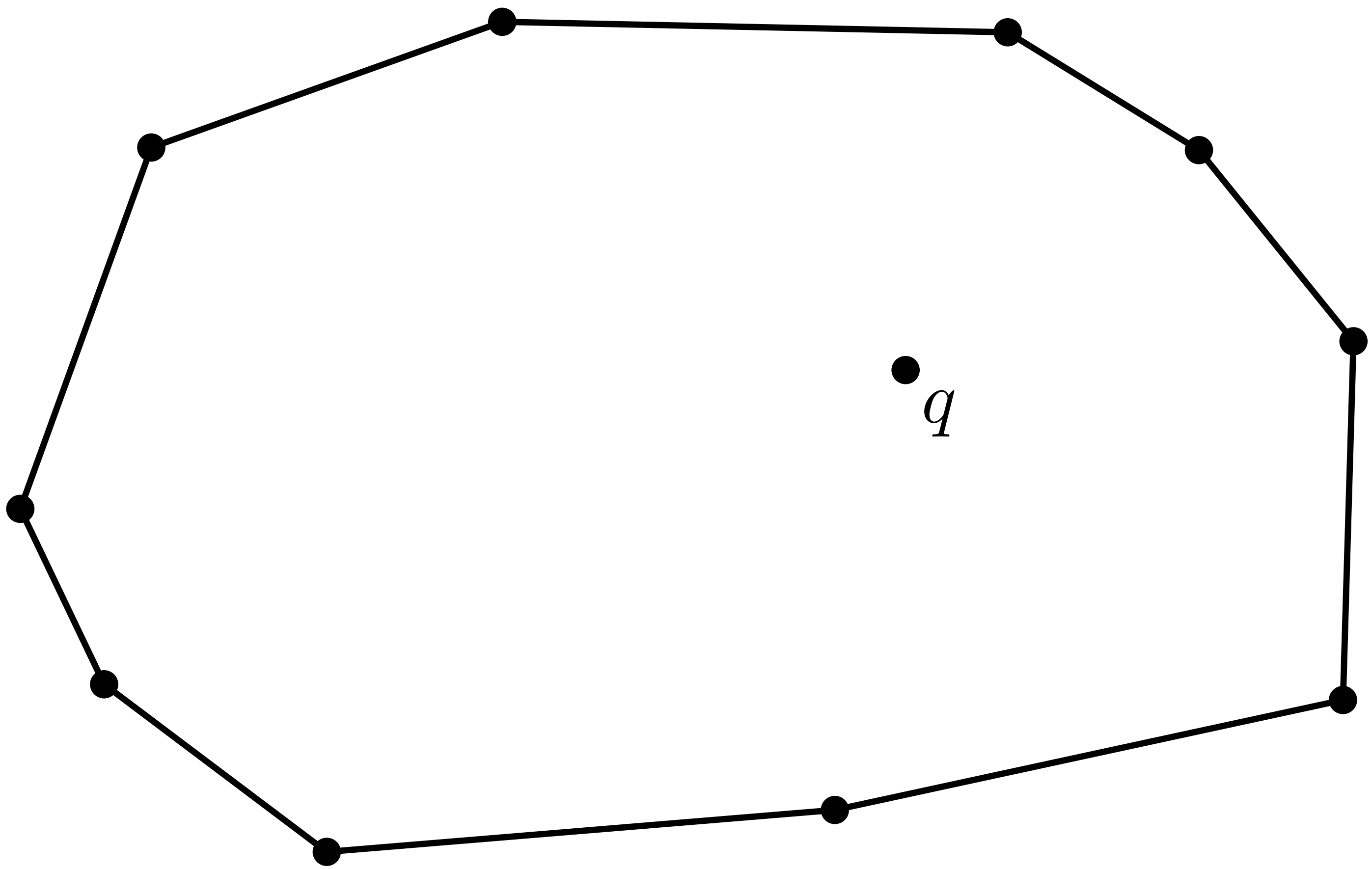
c) **Laufzeit?**

Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

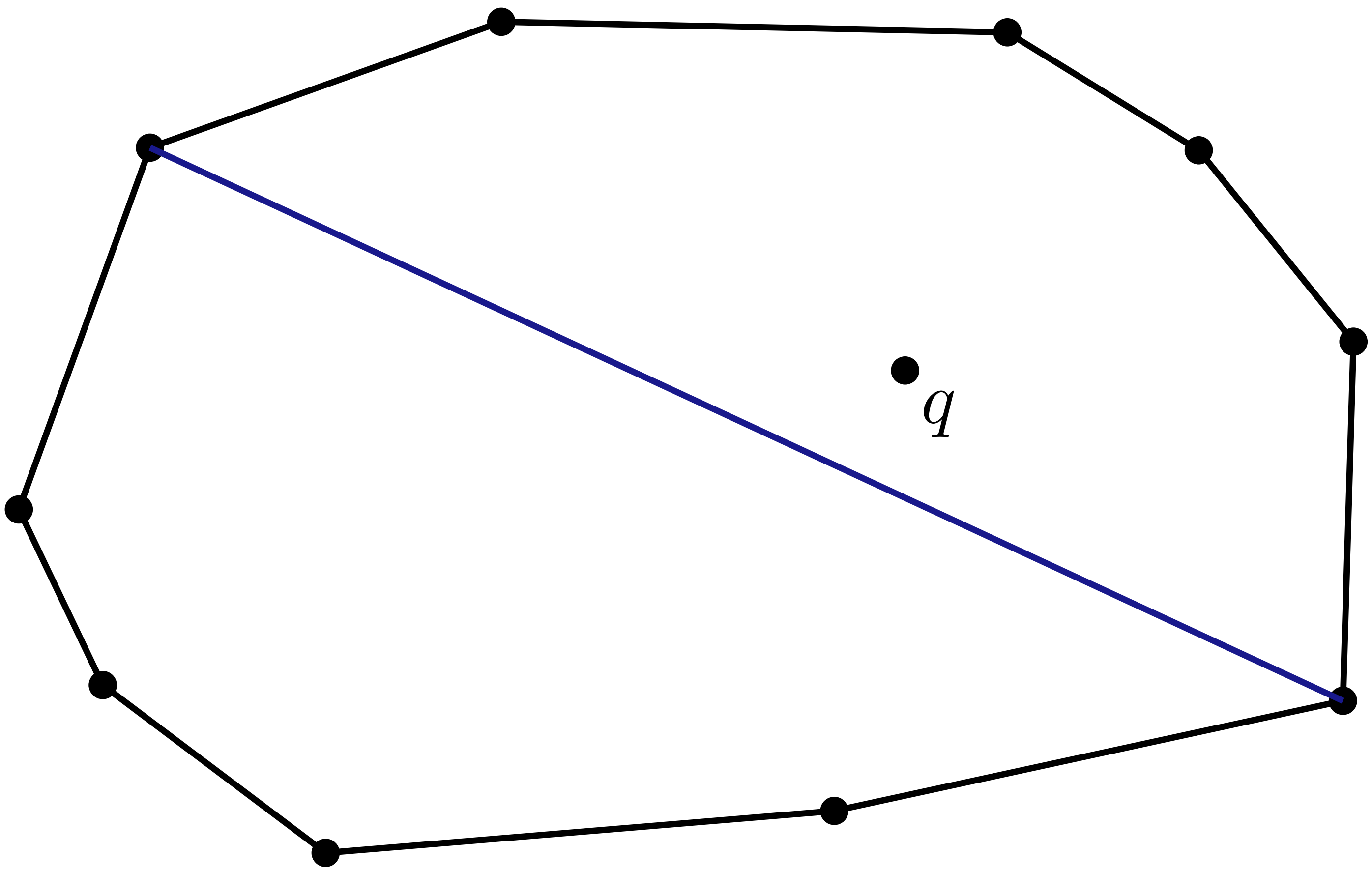


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

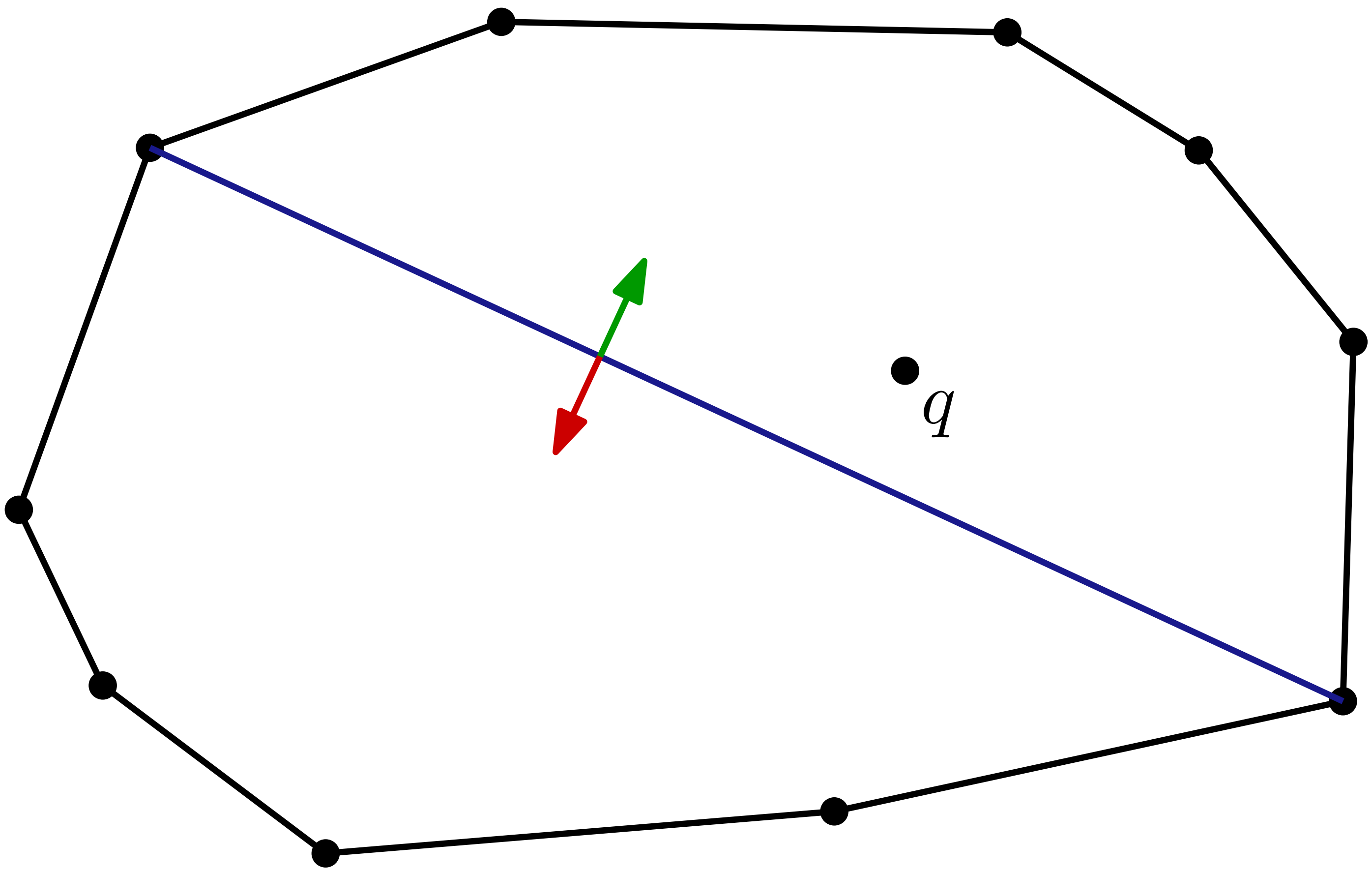
a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$



Aufgabe 2

Gegeben:
- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

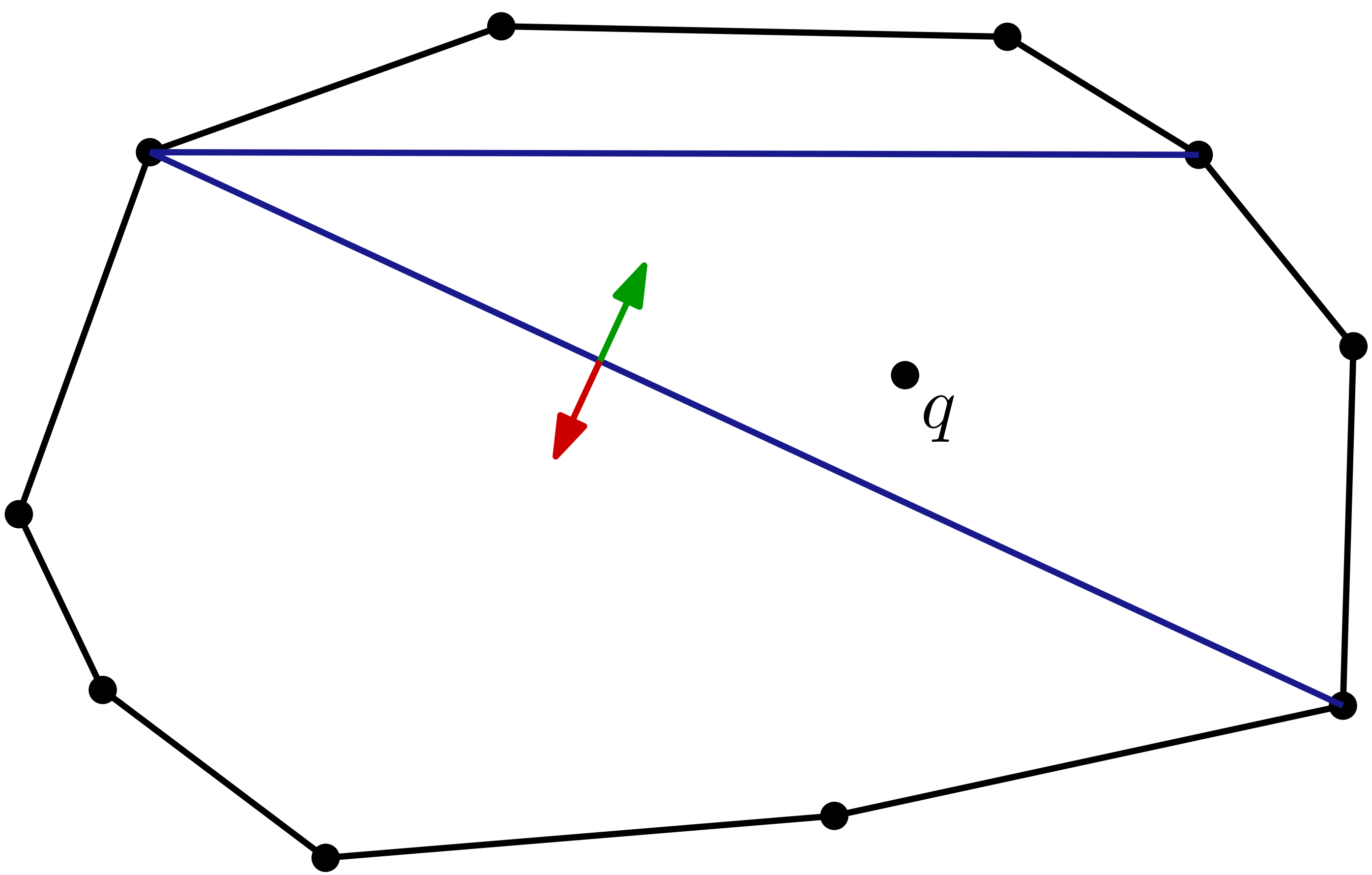


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

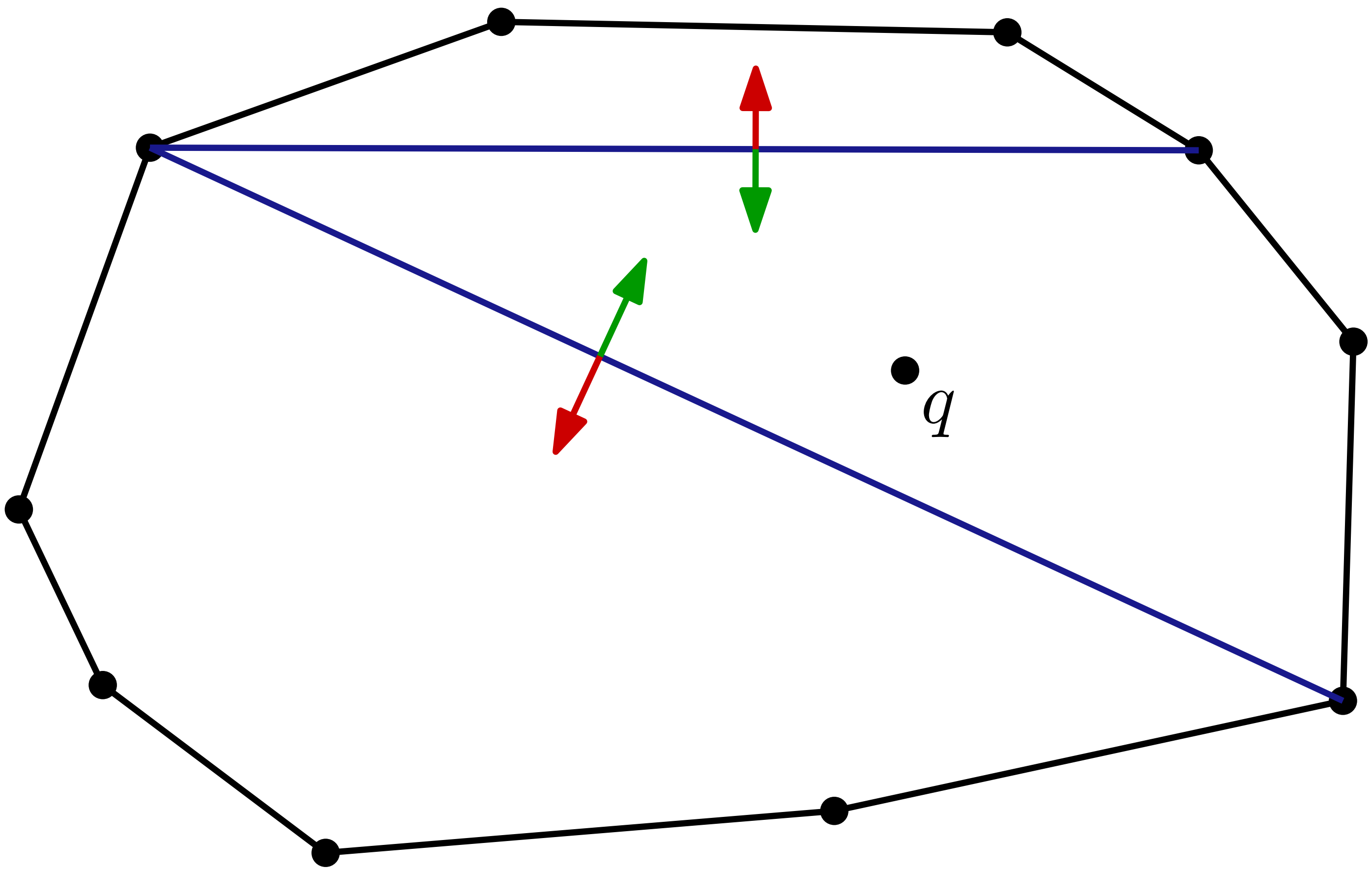


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

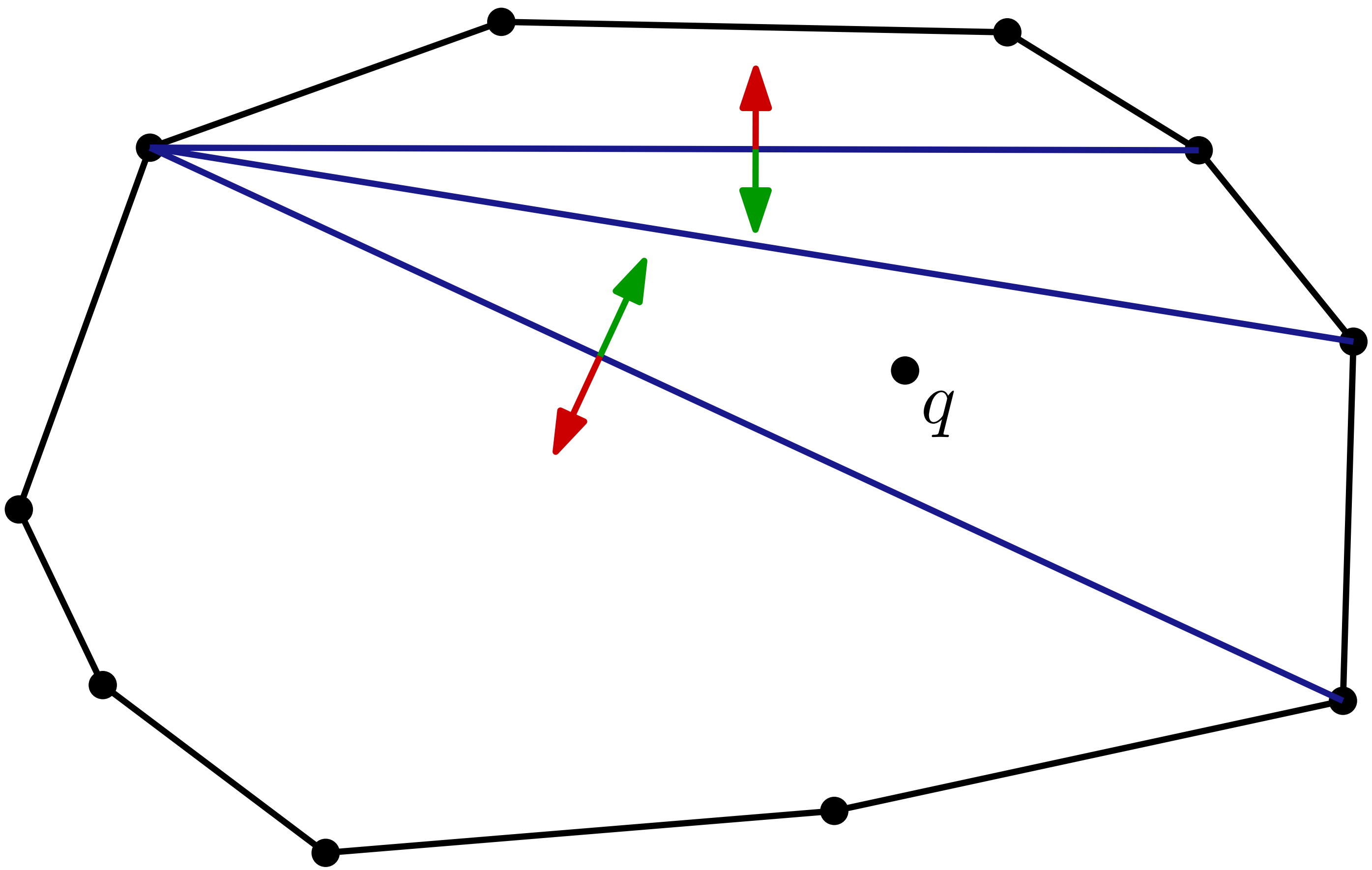


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

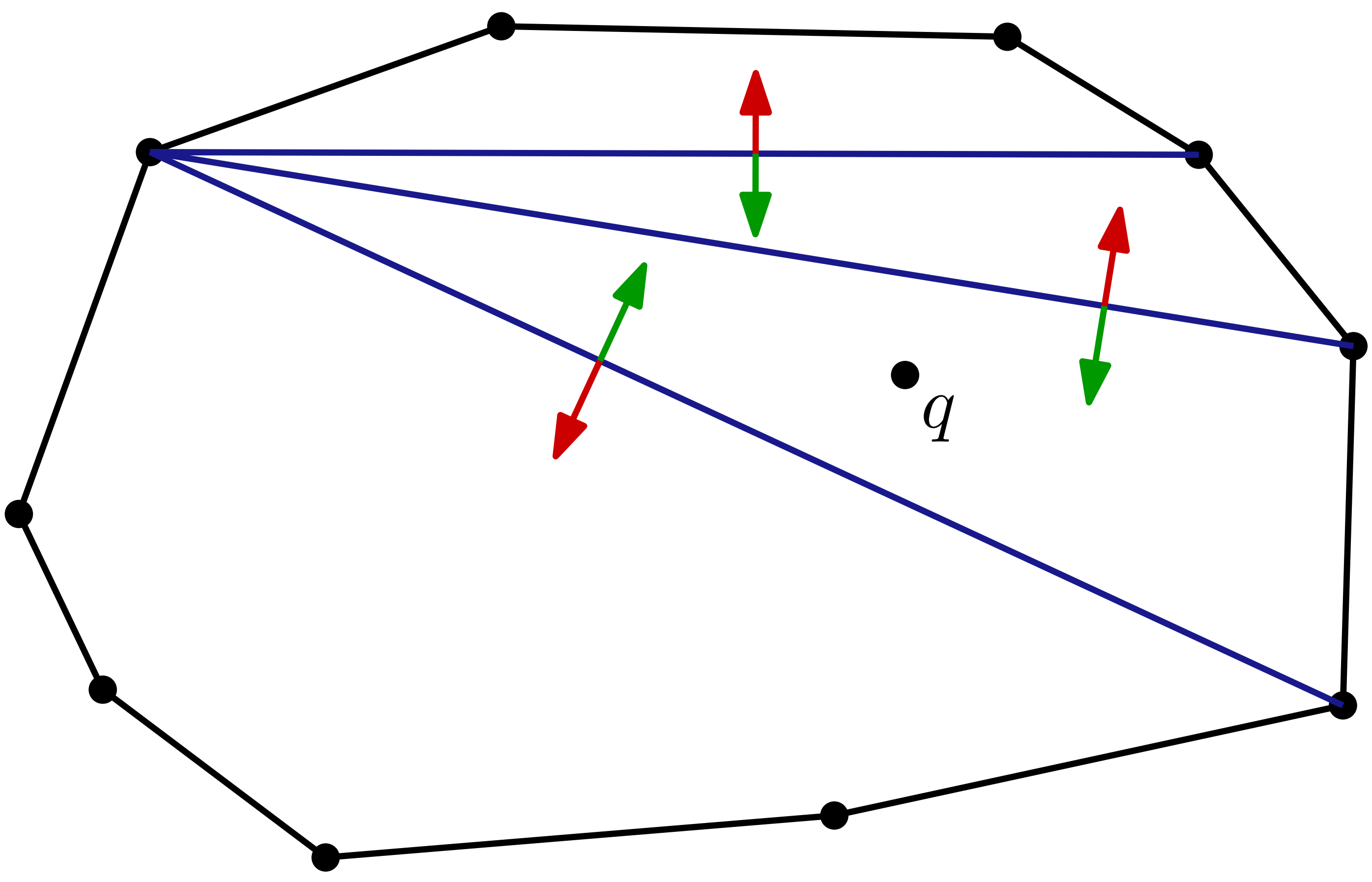


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

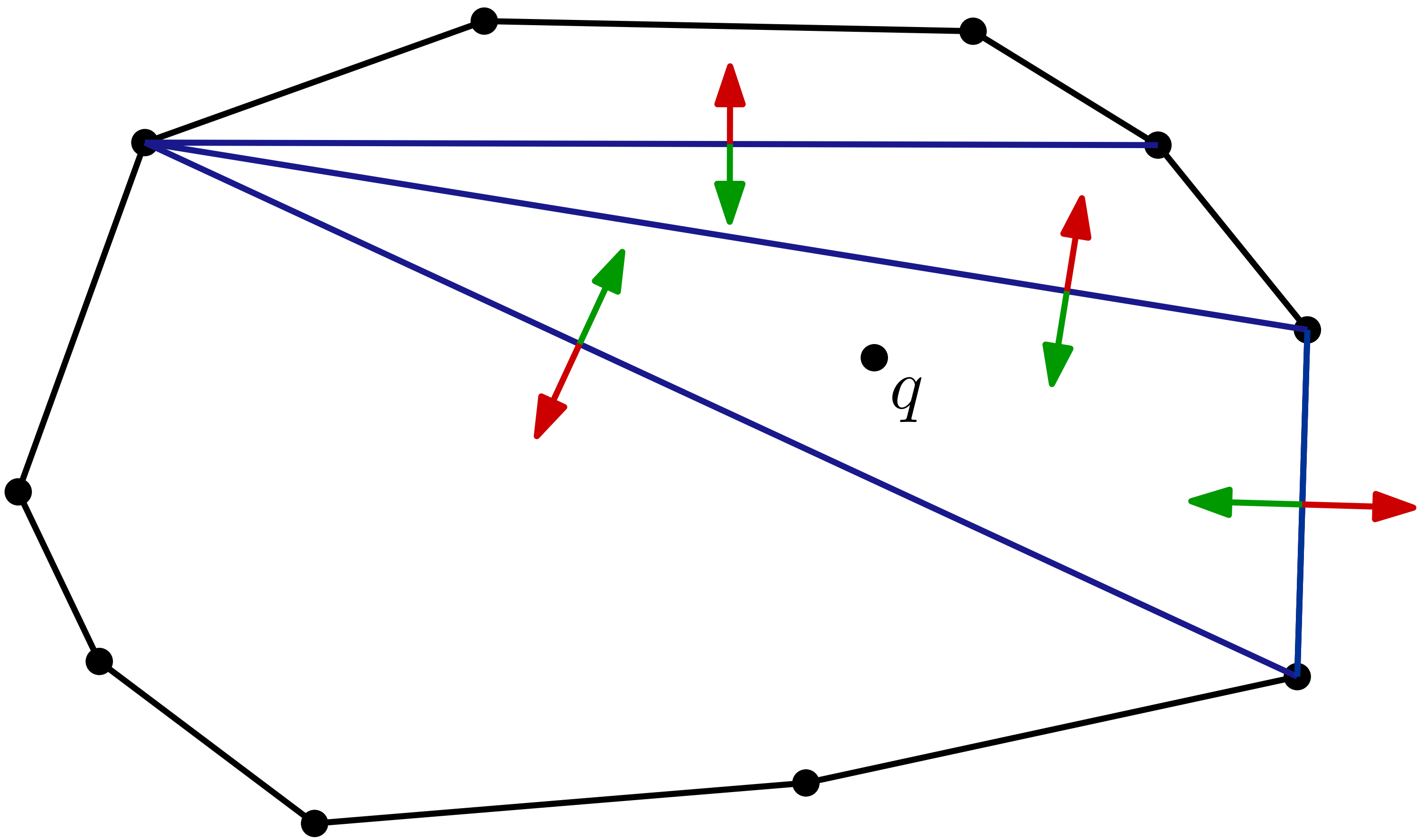


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

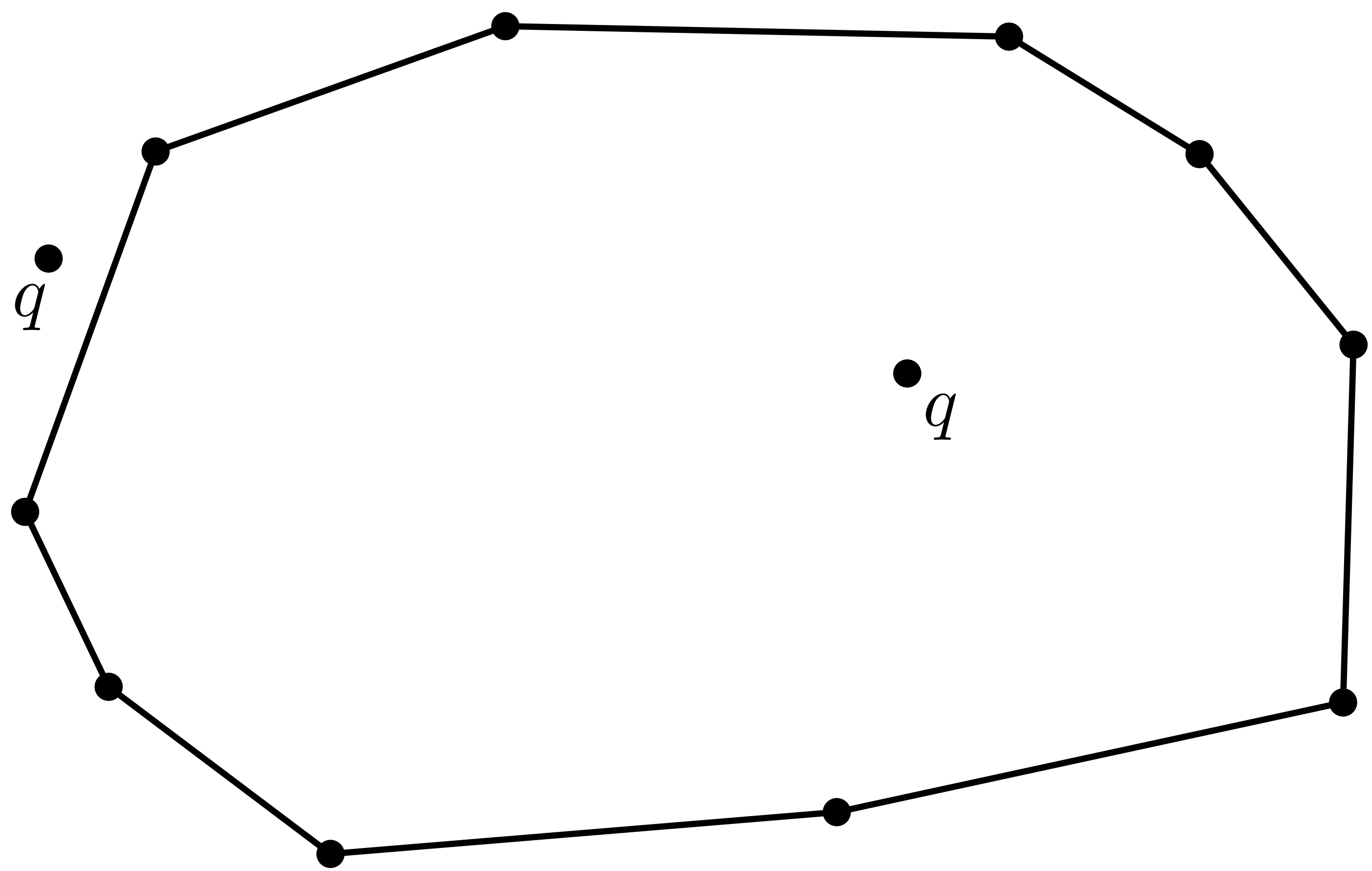


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

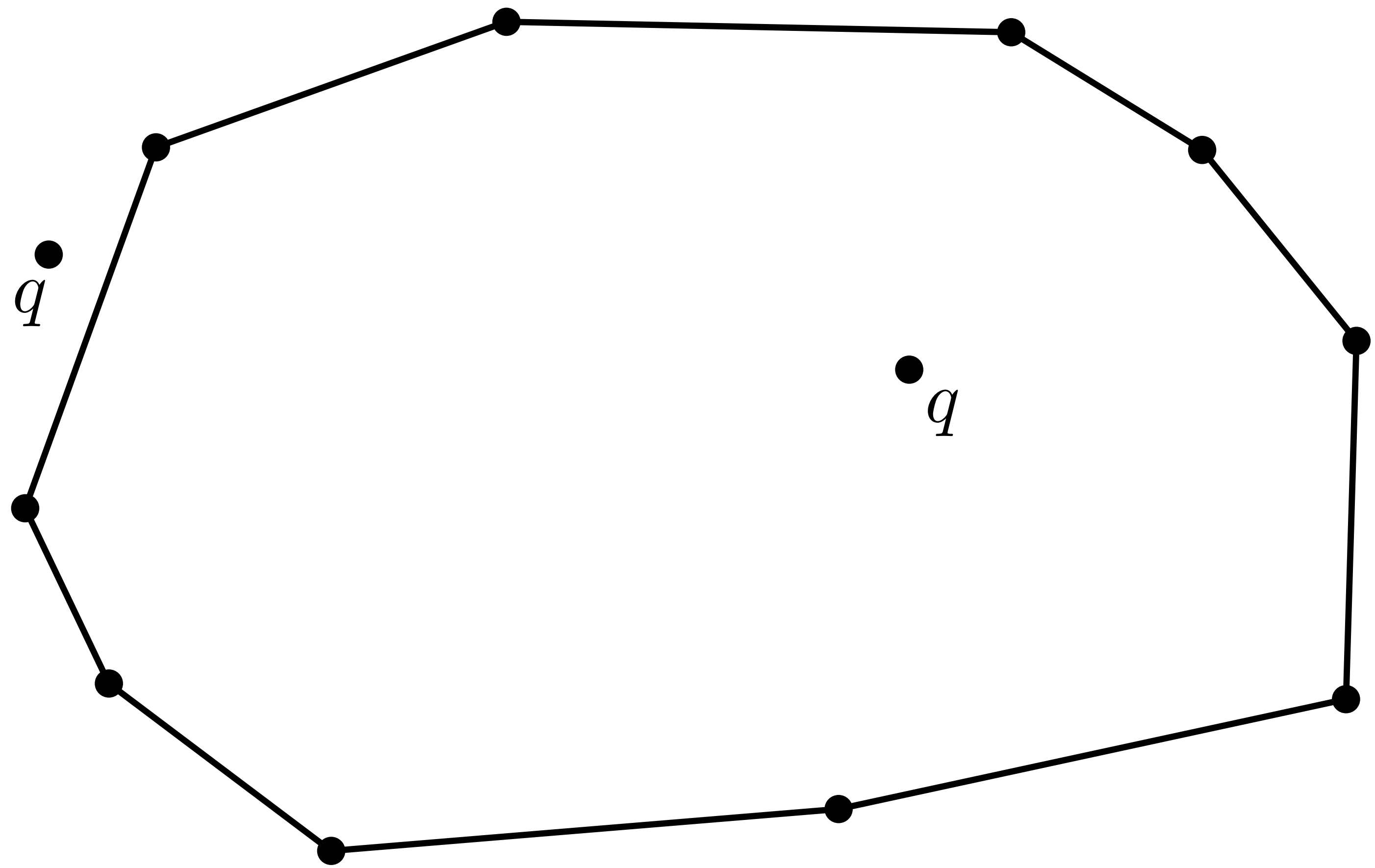


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

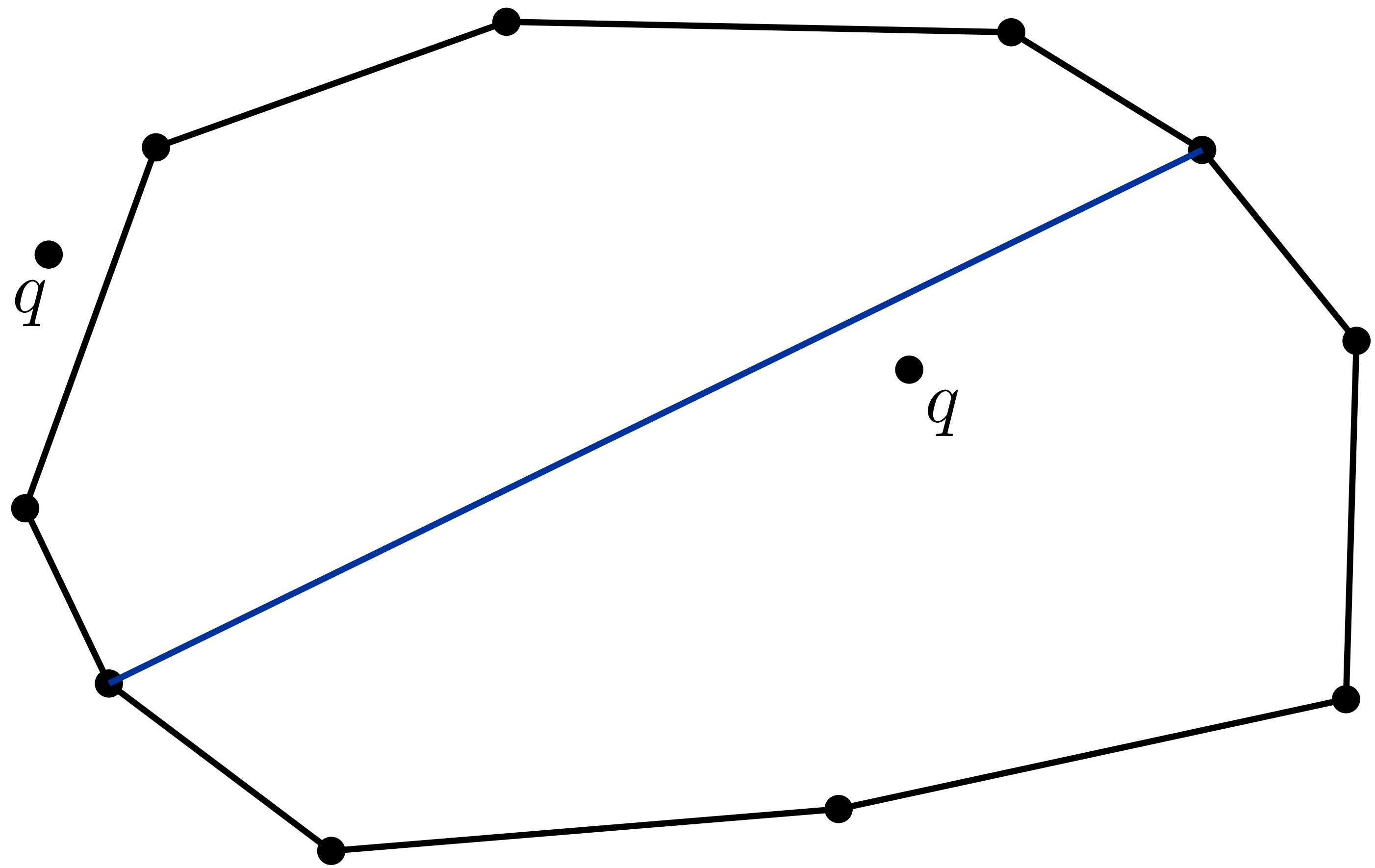
a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$



Aufgabe 2

Gegeben:
- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

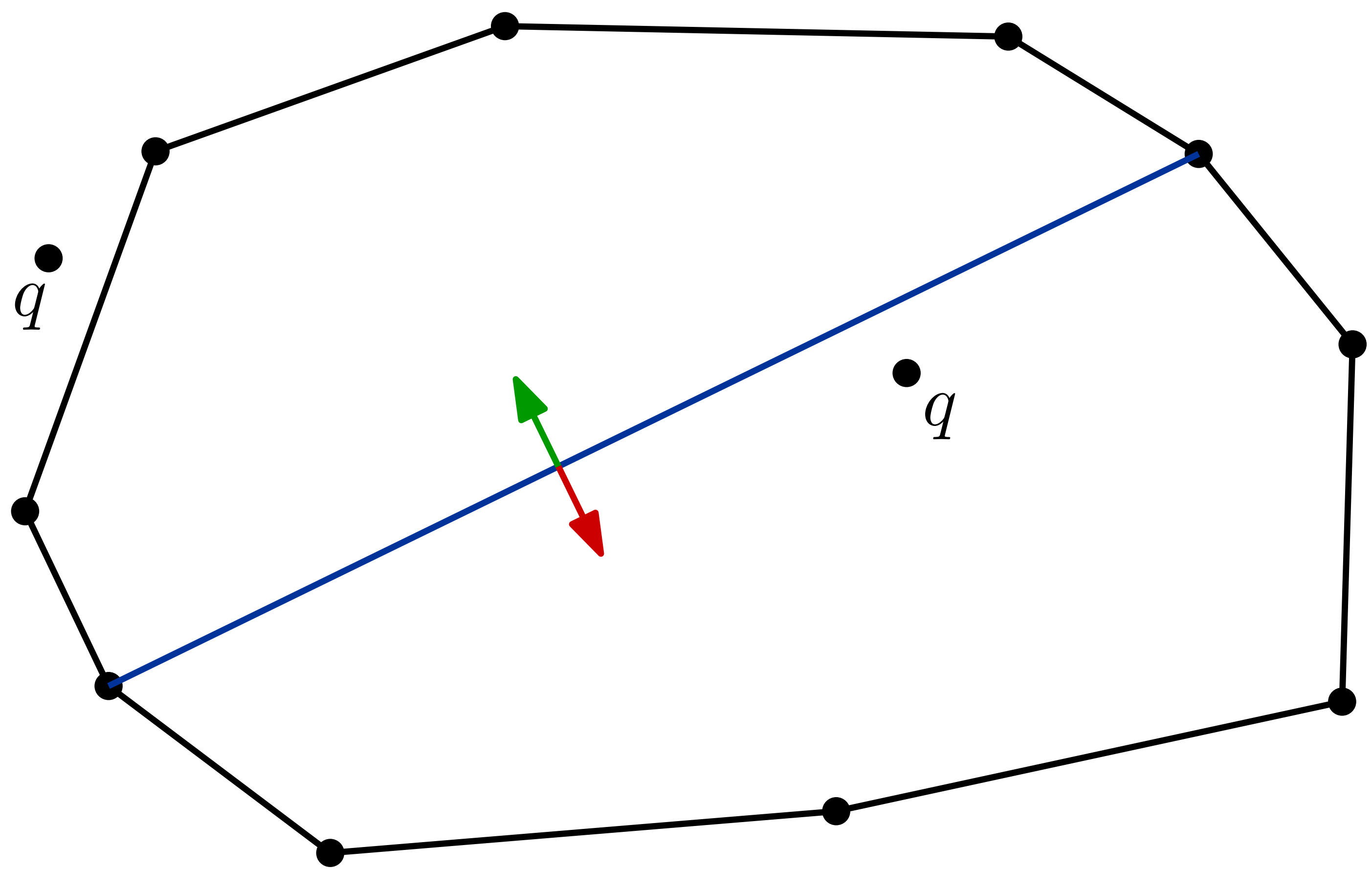
a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$



Aufgabe 2

Gegeben:
- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

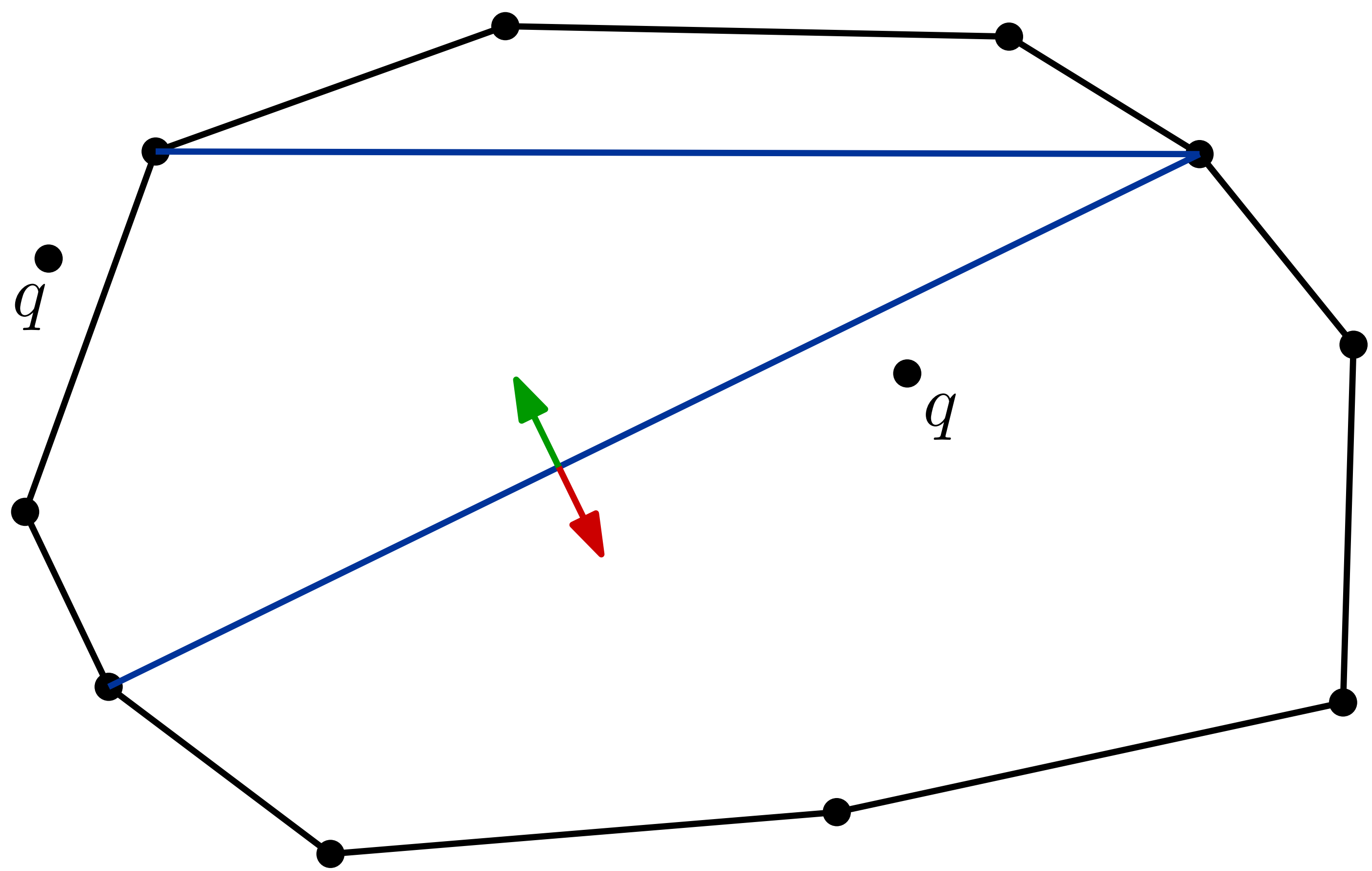


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

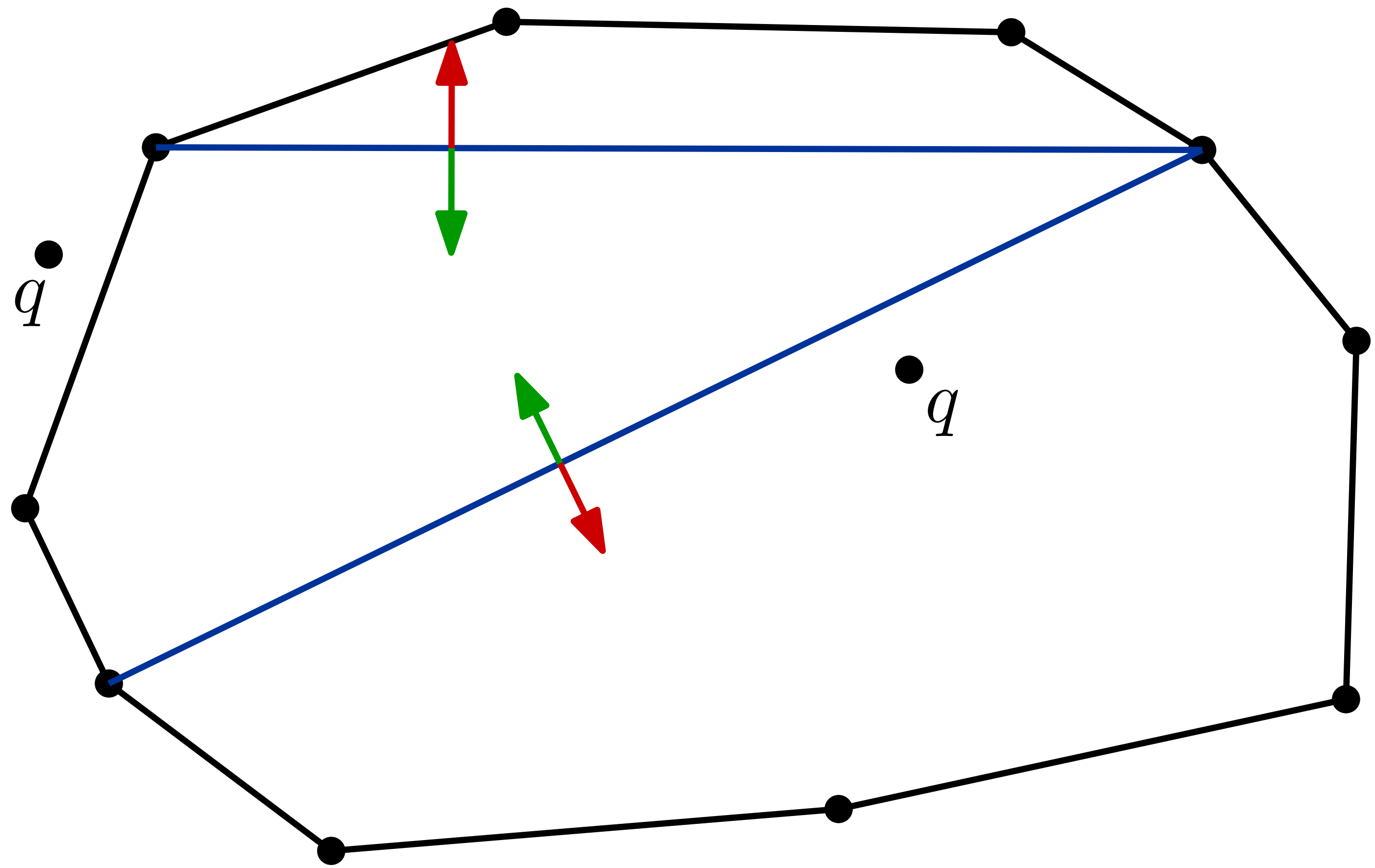


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

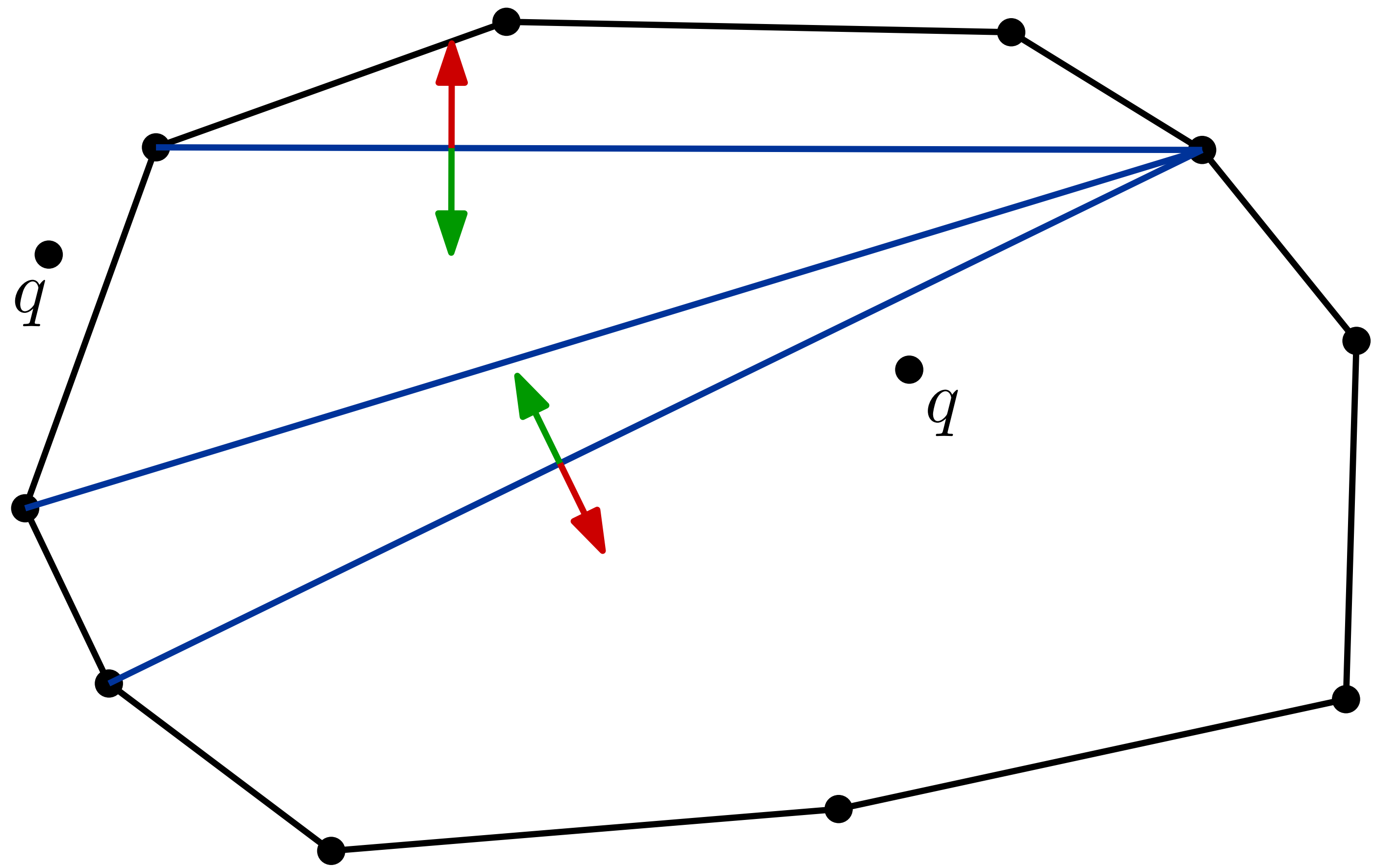


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

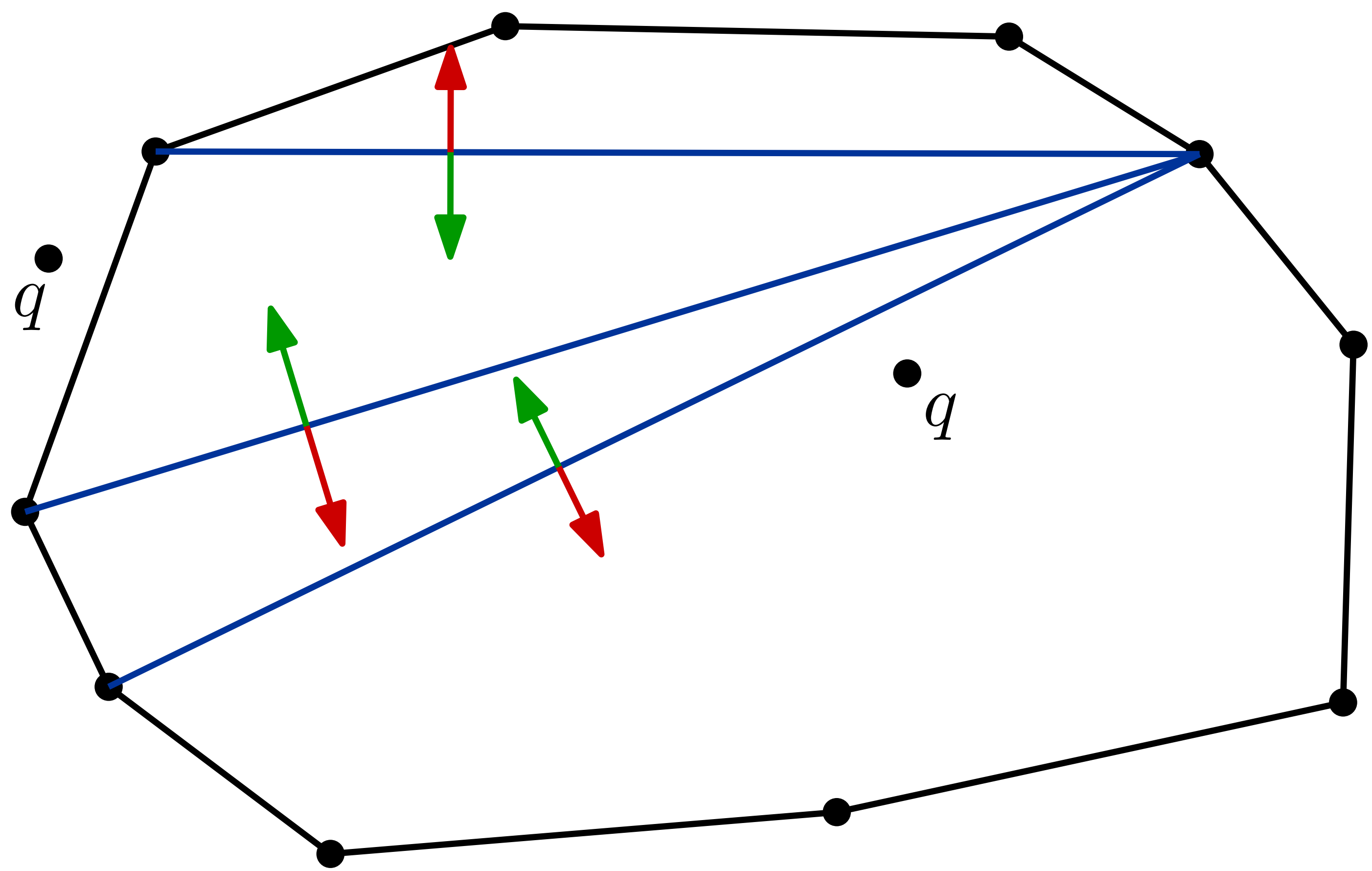


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

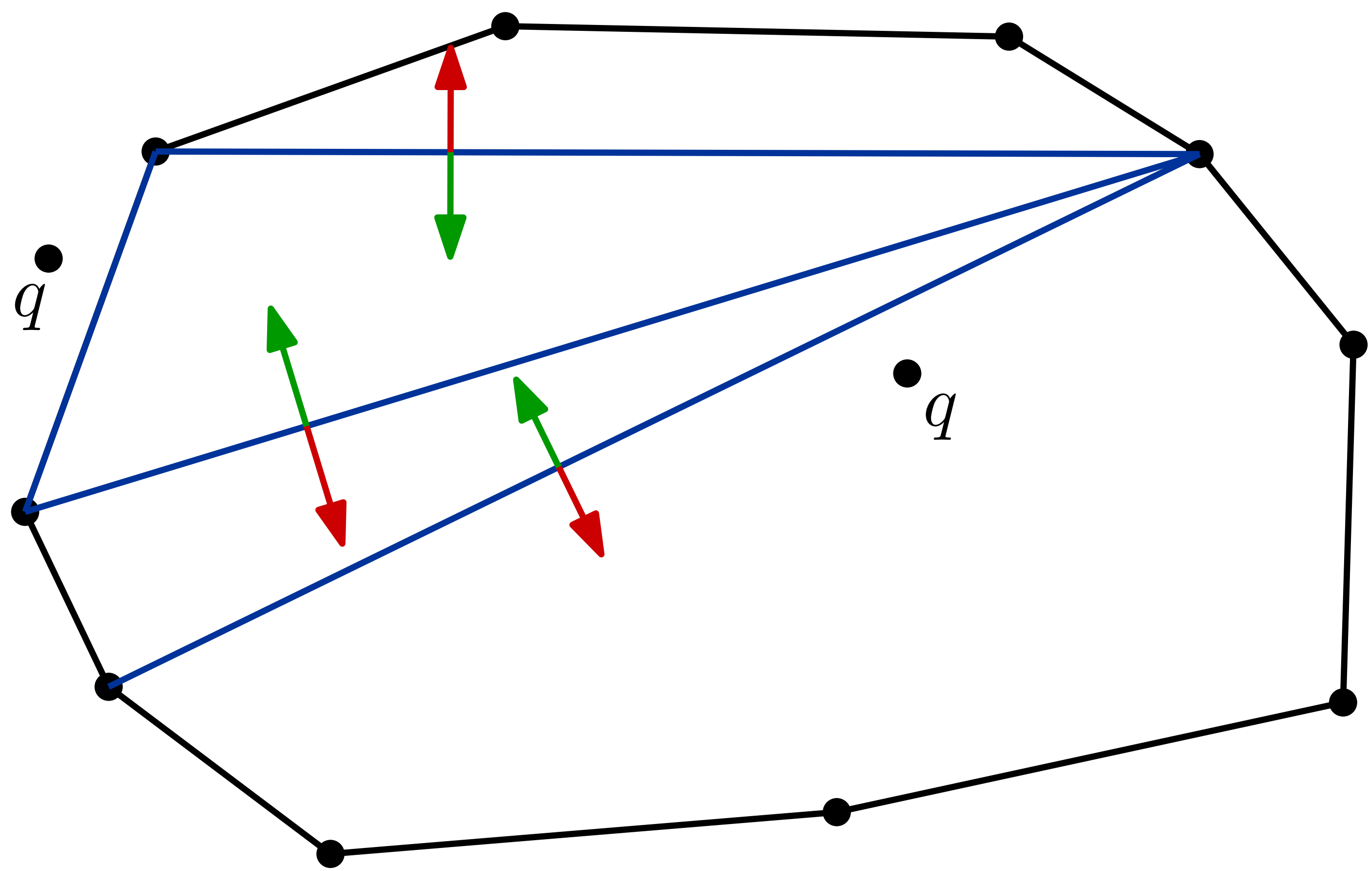


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$

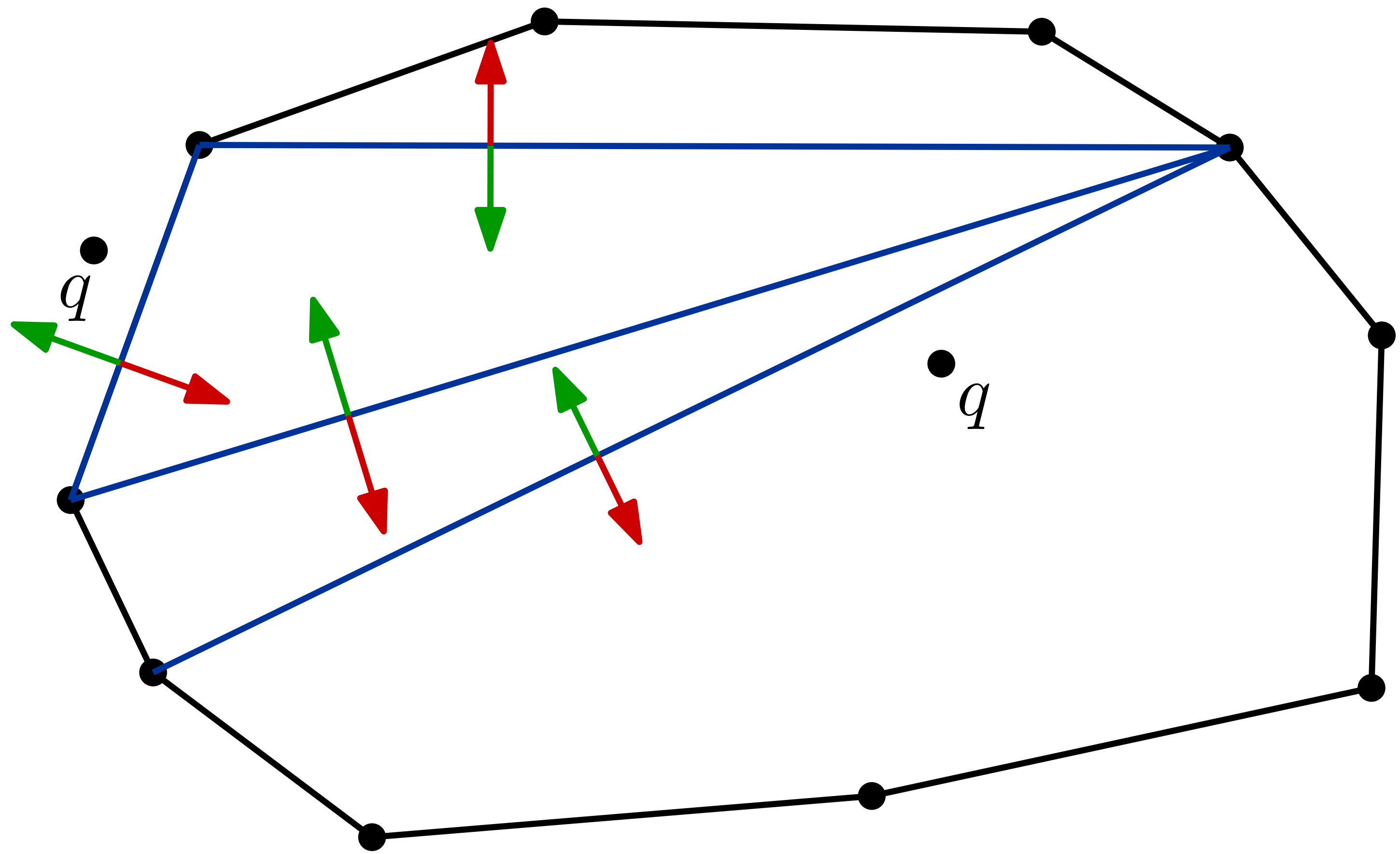


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- konvexes Polygon P bestehend aus n Punkten

a) Liegt q im Inneren von P? $\mathcal{O}(\log n)$



Aufgabe 2

Gegeben:
- Punkt q
- $\boxed{y\text{-monotones}}$ Polygon P bestehend aus n Punkten

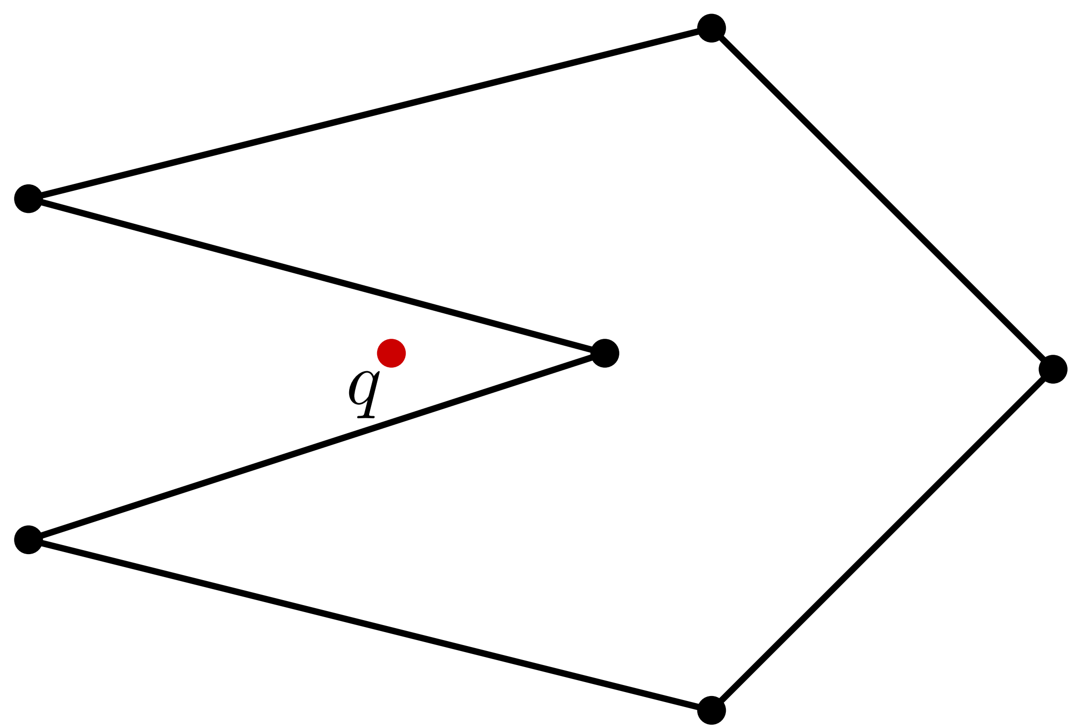
b) Kann man das Verfahren aus a) anpassen?

Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- $\boxed{y\text{-monotones}}$ Polygon P bestehend aus n Punkten

b) Kann man das Verfahren aus a) anpassen?

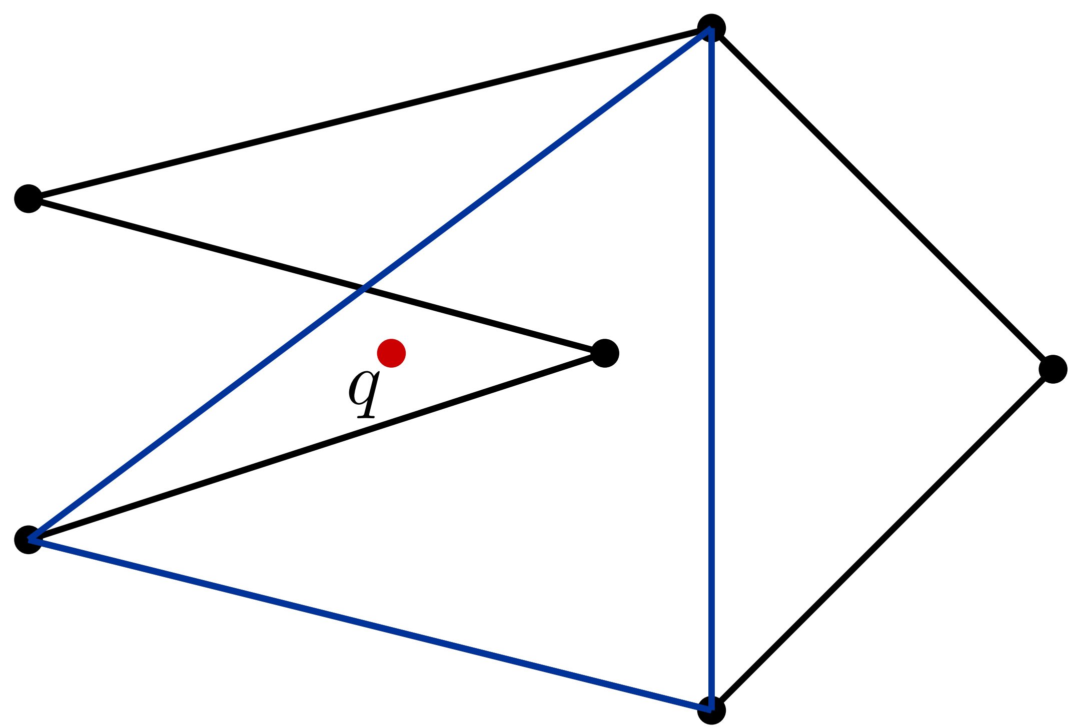


Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt q
- $\boxed{y\text{-monotones}}$ Polygon P bestehend aus n Punkten

b) Kann man das Verfahren aus a) anpassen?

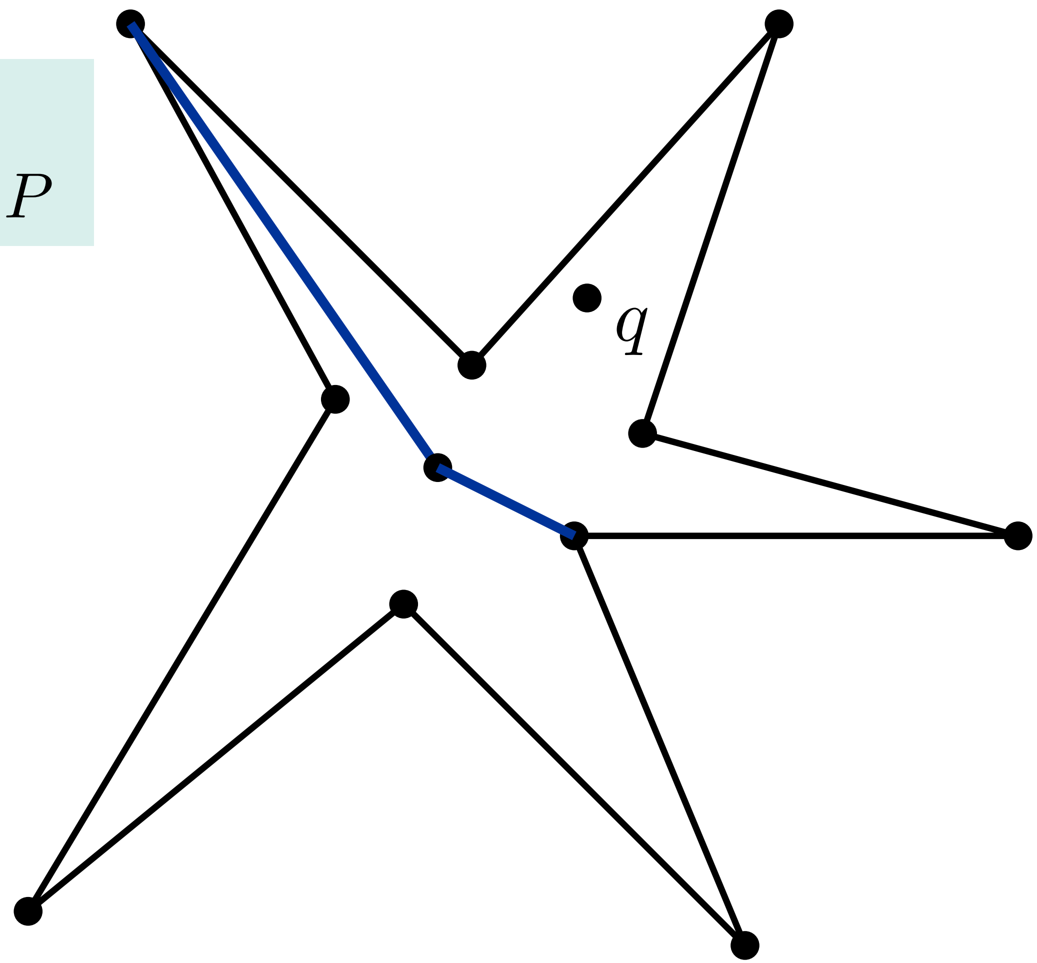


Aufgabe 3

Gegeben:

- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?



P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

Annahme: p ist gegeben.

Aufgabe 3

Gegeben:

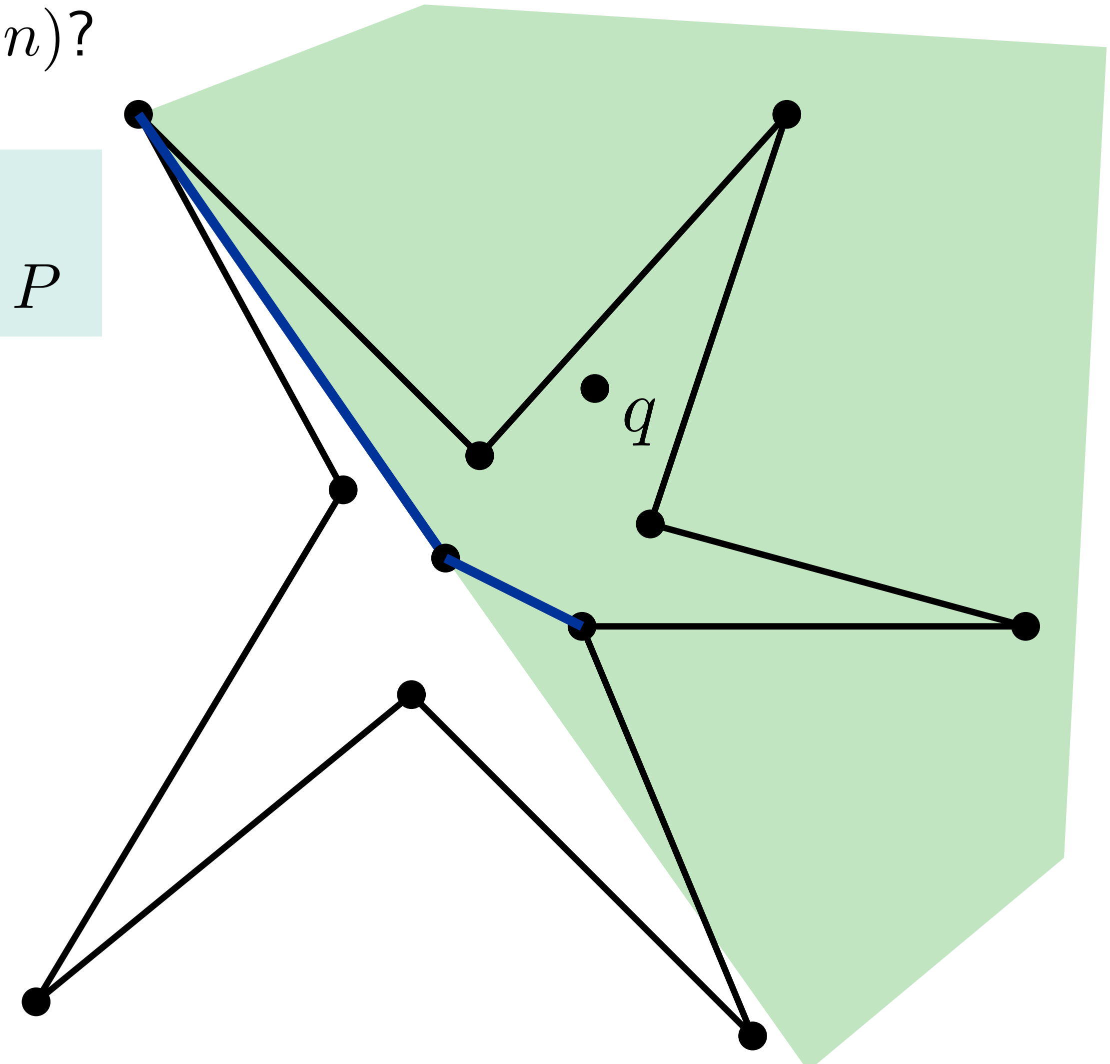
- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

Annahme: p ist gegeben.



Aufgabe 3

Gegeben:

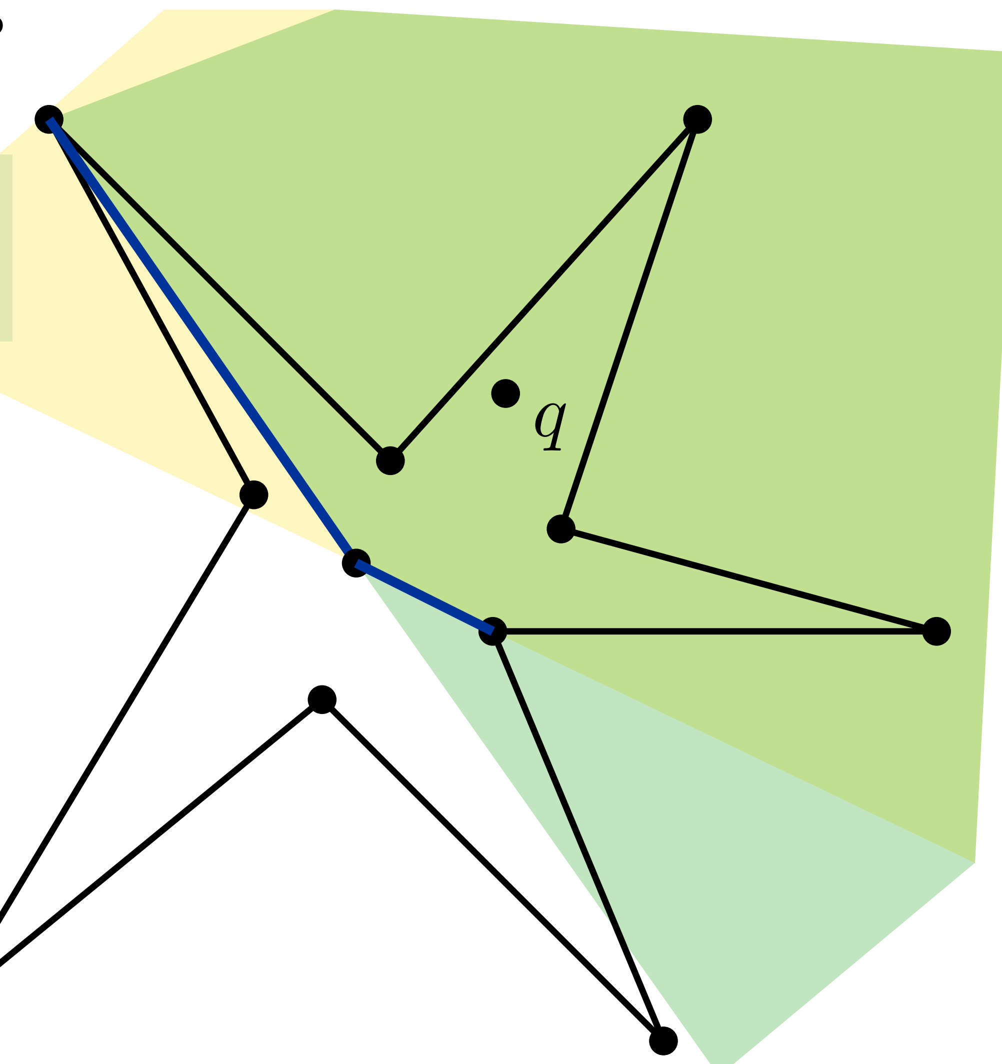
- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

Annahme: p ist gegeben.



Aufgabe 3

Gegeben:

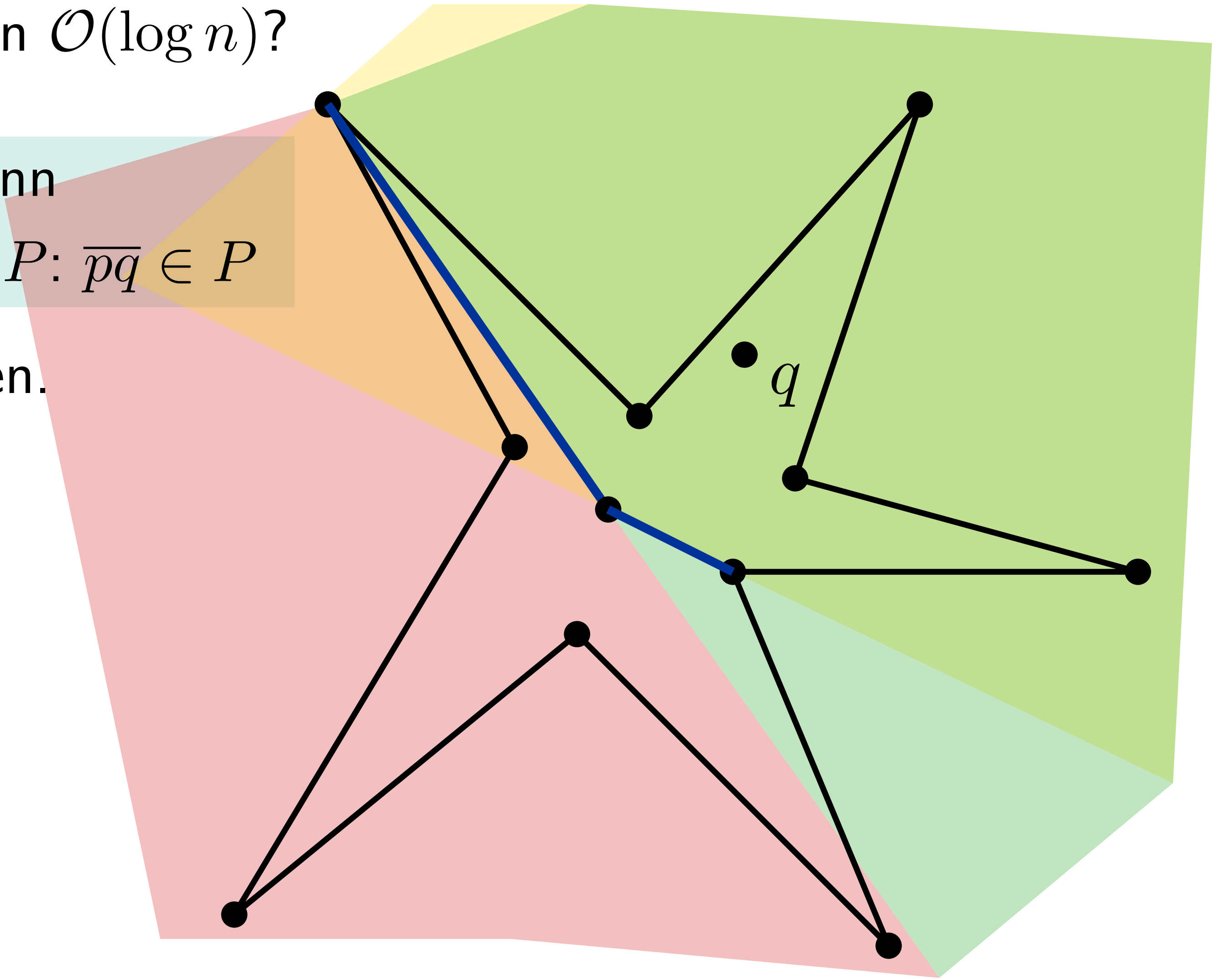
- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

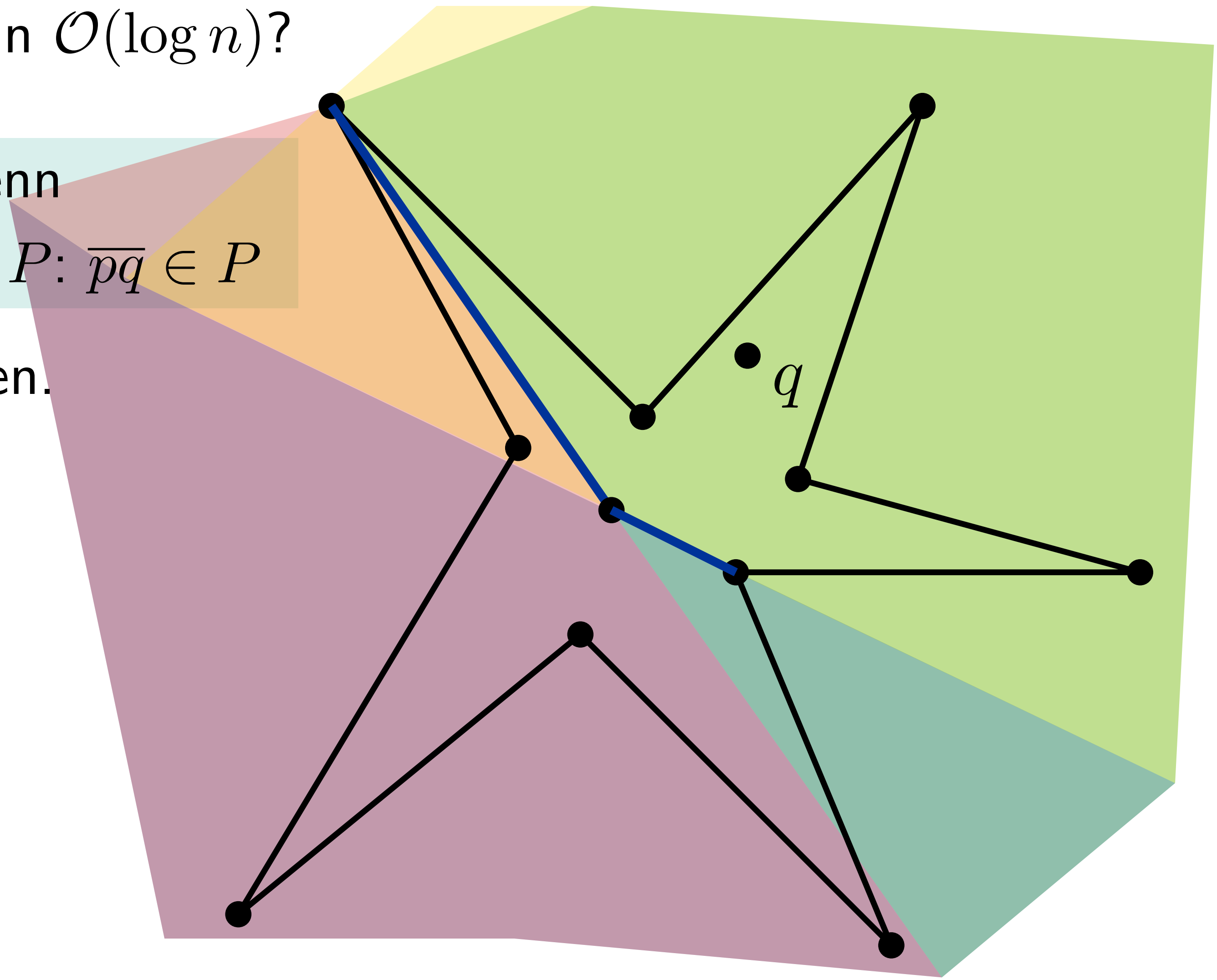
Annahme: p ist gegeben.



Aufgabe 3

Gegeben:
- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?



P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

Annahme: p ist gegeben.

Aufgabe 3

Gegeben:

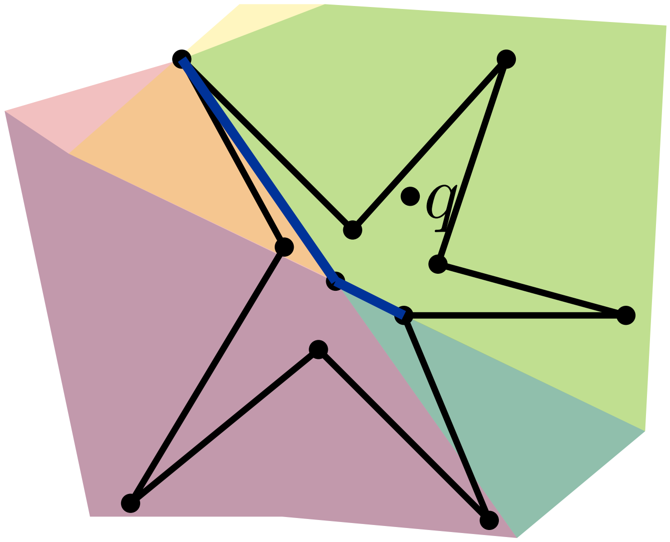
- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

Annahme: p ist gegeben.



Aufgabe 3

Gegeben:

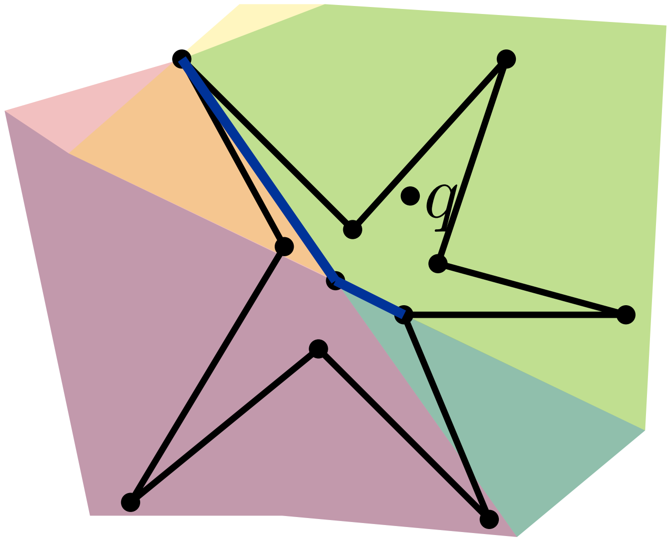
- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

a) q im Inneren von P in $\mathcal{O}(\log n)$?

P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

Annahme: p ist gegeben.



Aufgabe 3

Gegeben:

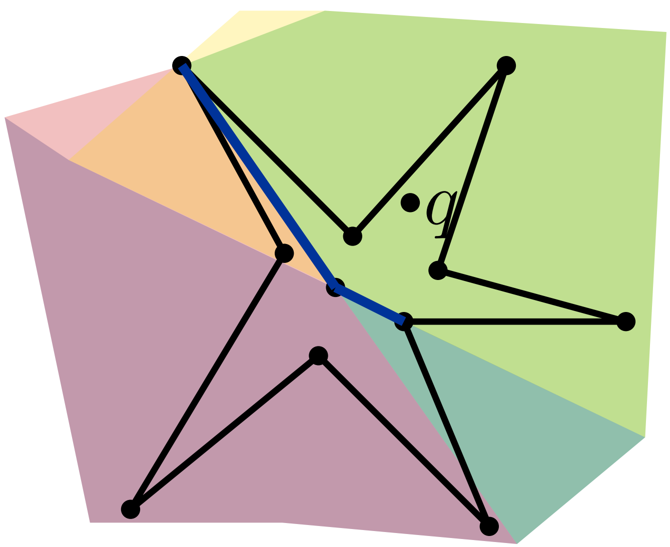
- Punkt q
- sternförmiges Polygon P bestehend aus n Punkten

b) Was ist, wenn p nicht bekannt ist?

P heißt *sternförmig*, wenn

$\exists p \in P$ sodass $\forall q \in P$: $\overline{pq} \in P$

Annahme: p ist gegeben.



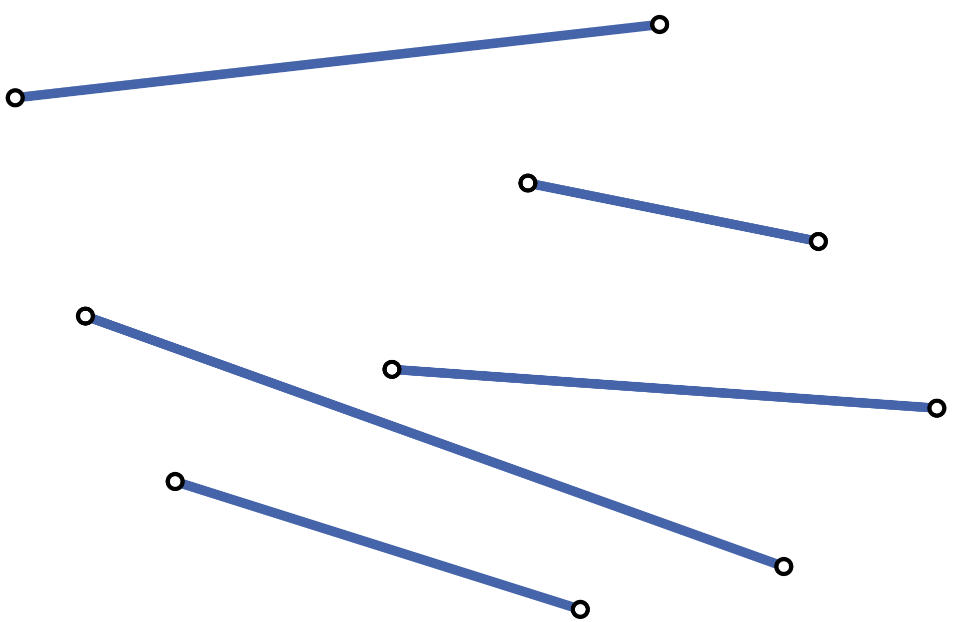
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



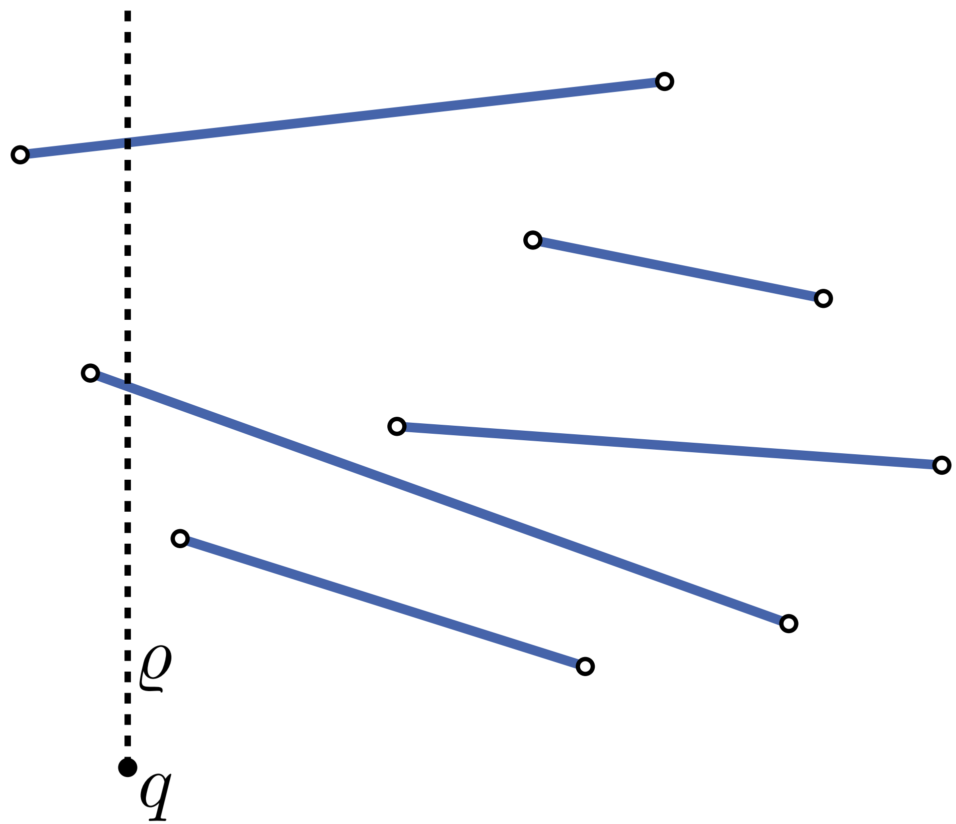
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.

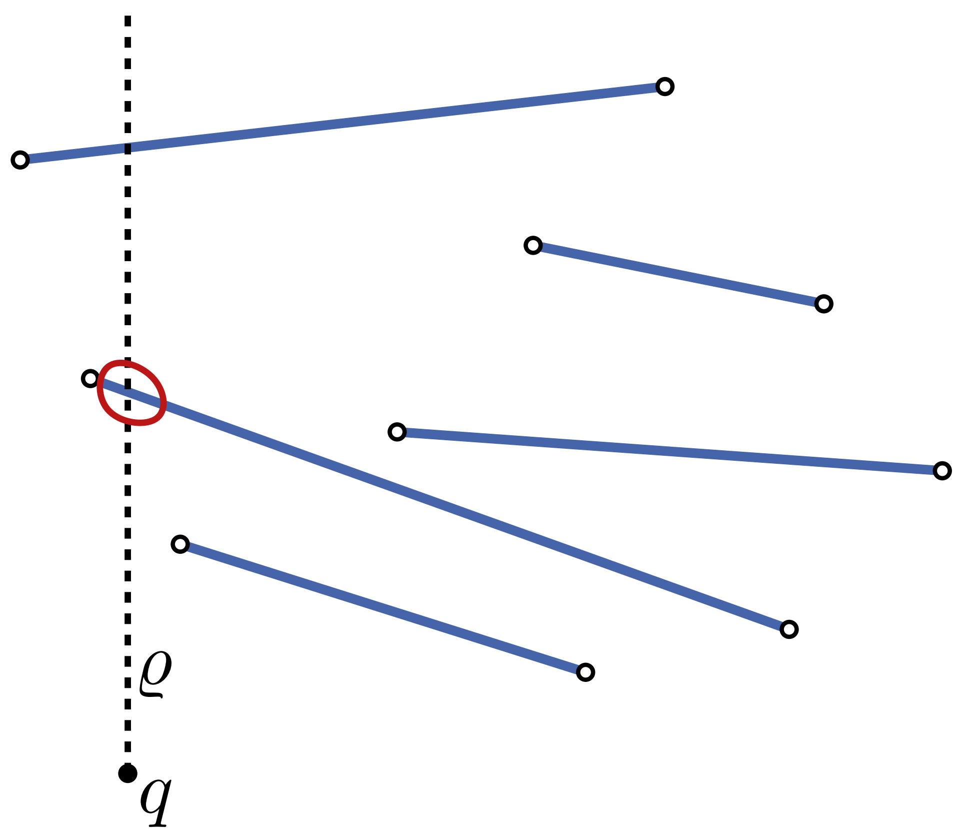


Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem   Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



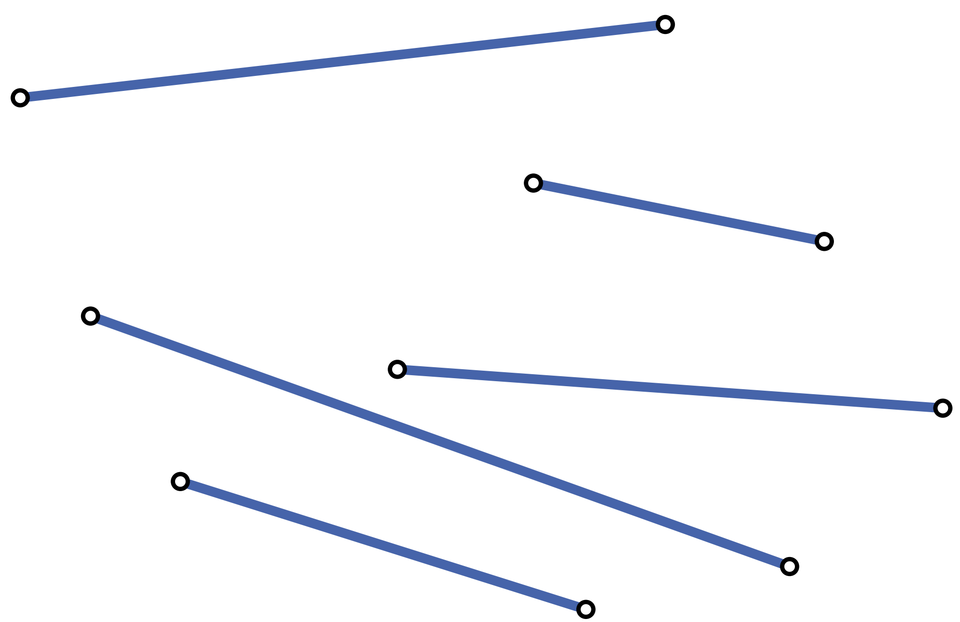
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



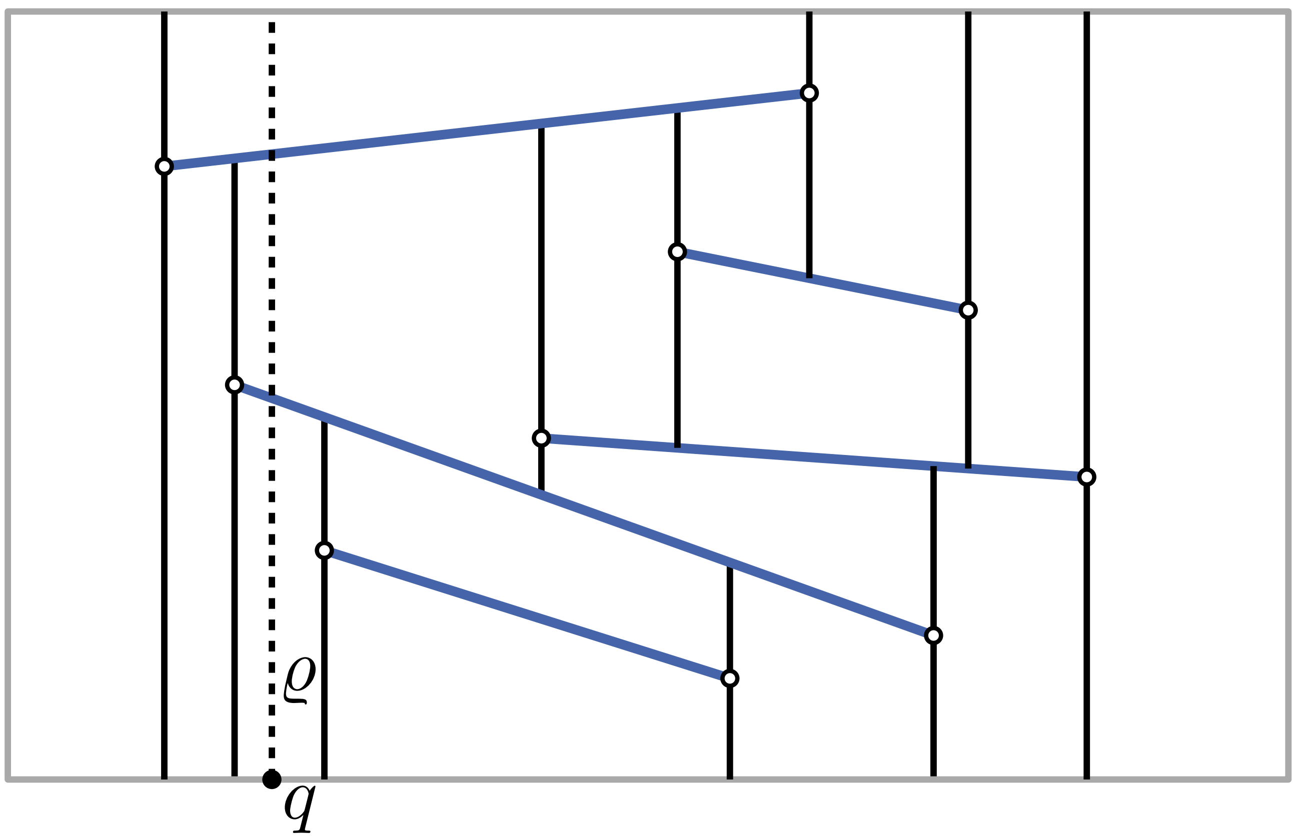
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



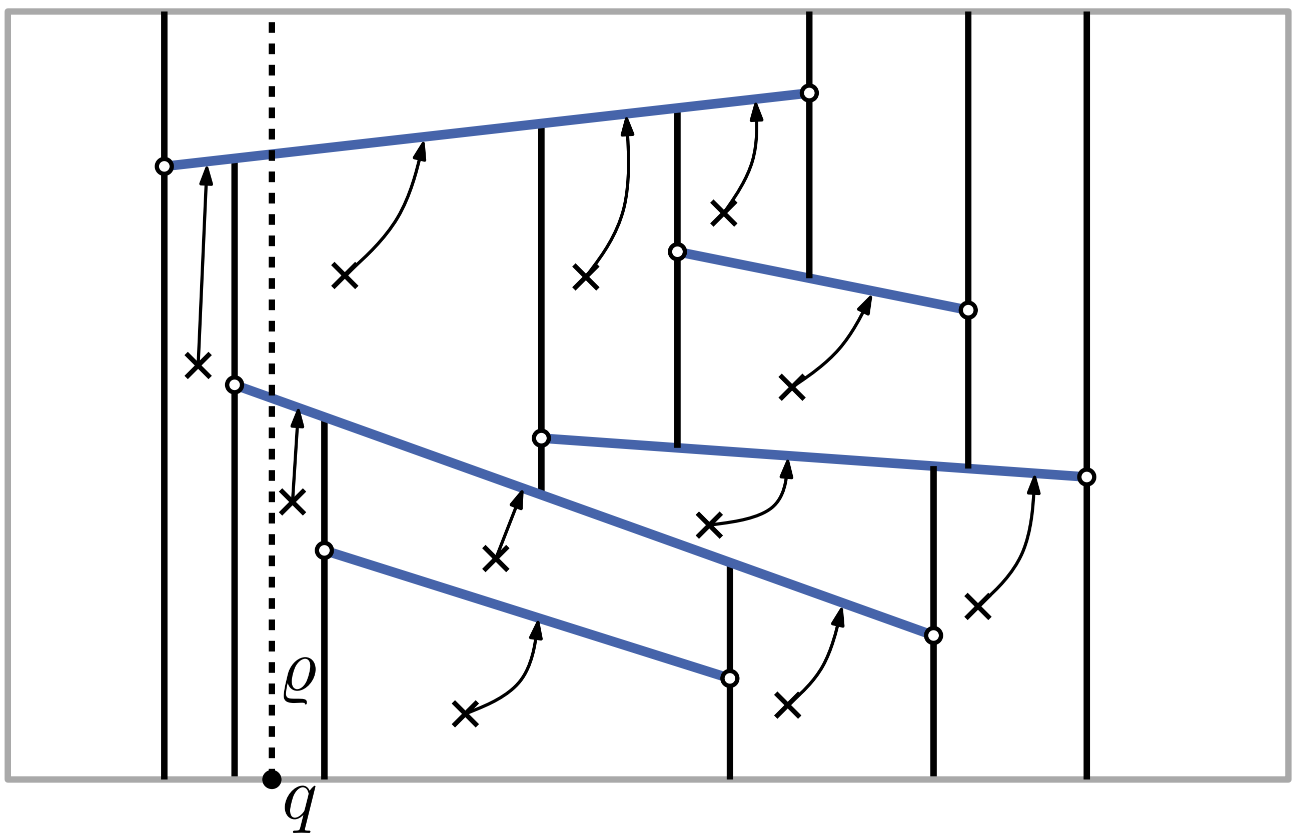
Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich nicht schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.



Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich mögl. schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.

b) Verfahren aus a) adaptierbar? Wenn ja, wie aufwändig?

Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich mögl. schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.

b) Verfahren aus a) adaptierbar? Wenn ja, wie aufwändig?

1. Bestimme Schnittpunkte der Strecken.
2. Führe für jeden Schnittpunkt einen Pseudoknoten ein.
3. Verwende Trapezzerlegung.

Aufgabe 4

Ray-Shooting Problem

Hier: Vereinfachte Version

Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ gegeben und n sich mögl. schneidende Streckensegmente.
Sei ϱ vertikale Halbgerade die von q aus nach oben 'schießt'.

Finde 'erstes' Streckensegment das ϱ schneidet.

b) Verfahren aus a) adaptierbar? Wenn ja, wie aufwändig?

1. Bestimme Schnittpunkte der Strecken.
2. Führe für jeden Schnittpunkt einen Pseudoknoten ein.
3. Verwende Trapezzerlegung.

Erwartete Anfragezeit: $O(\log(n+k))$

Erwartete Aufbauzeit: $O((n+k)\log(n+k))$

Speicherplatz: $O(n+k)$