Übung Algorithmische Geometrie

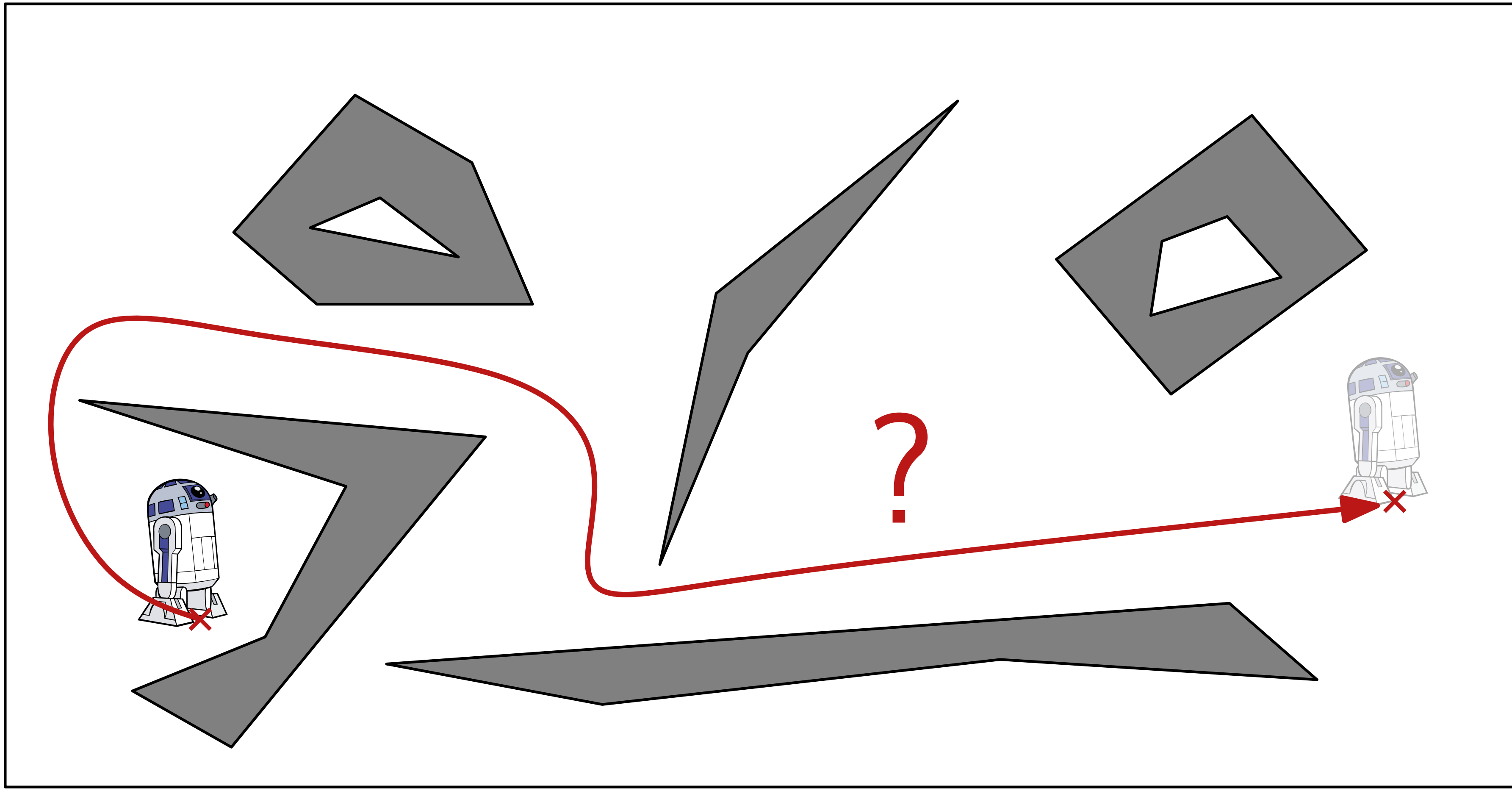
Sichtbarkeitsgraph

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann

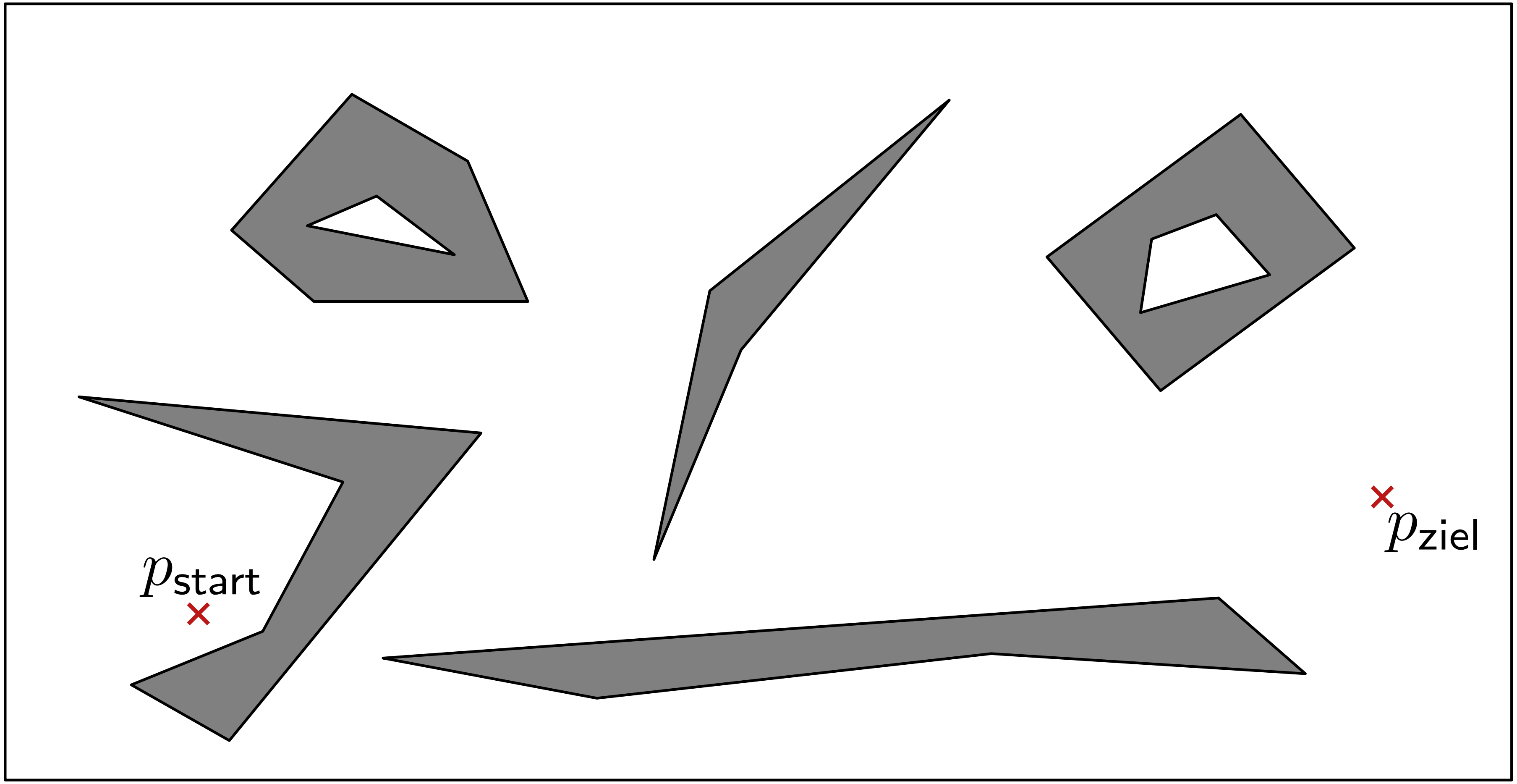
16.07.2014

Bewegungsplanung für Roboter

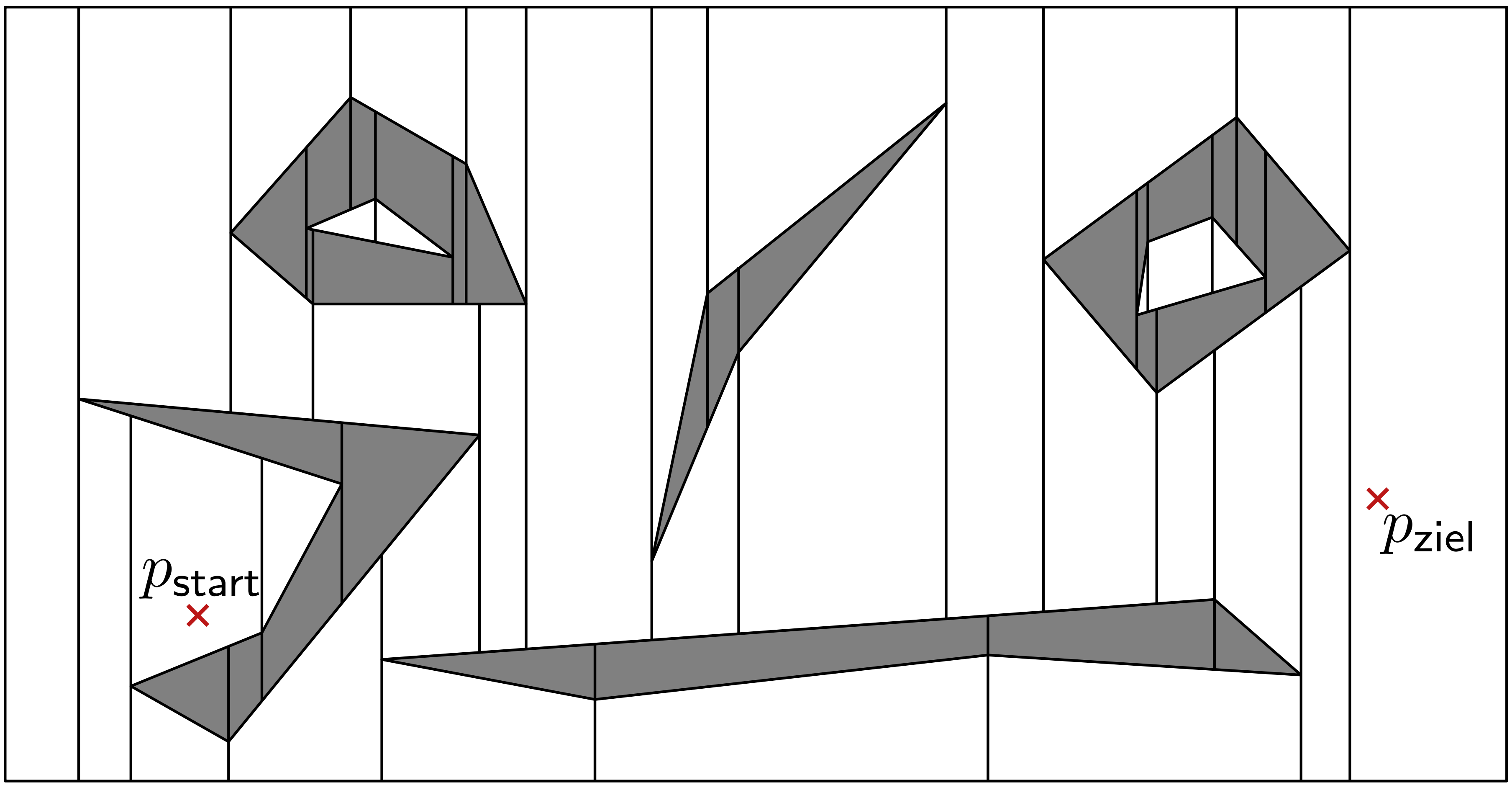


Problem: Gegeben ein (punktförmiger) Roboter an Position p_{start} in einem Gebiet mit polygonalen Hindernissen finde einen möglichst kurzen Weg zum Ziel p_{ziel} um die Hindernisse herum.

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen

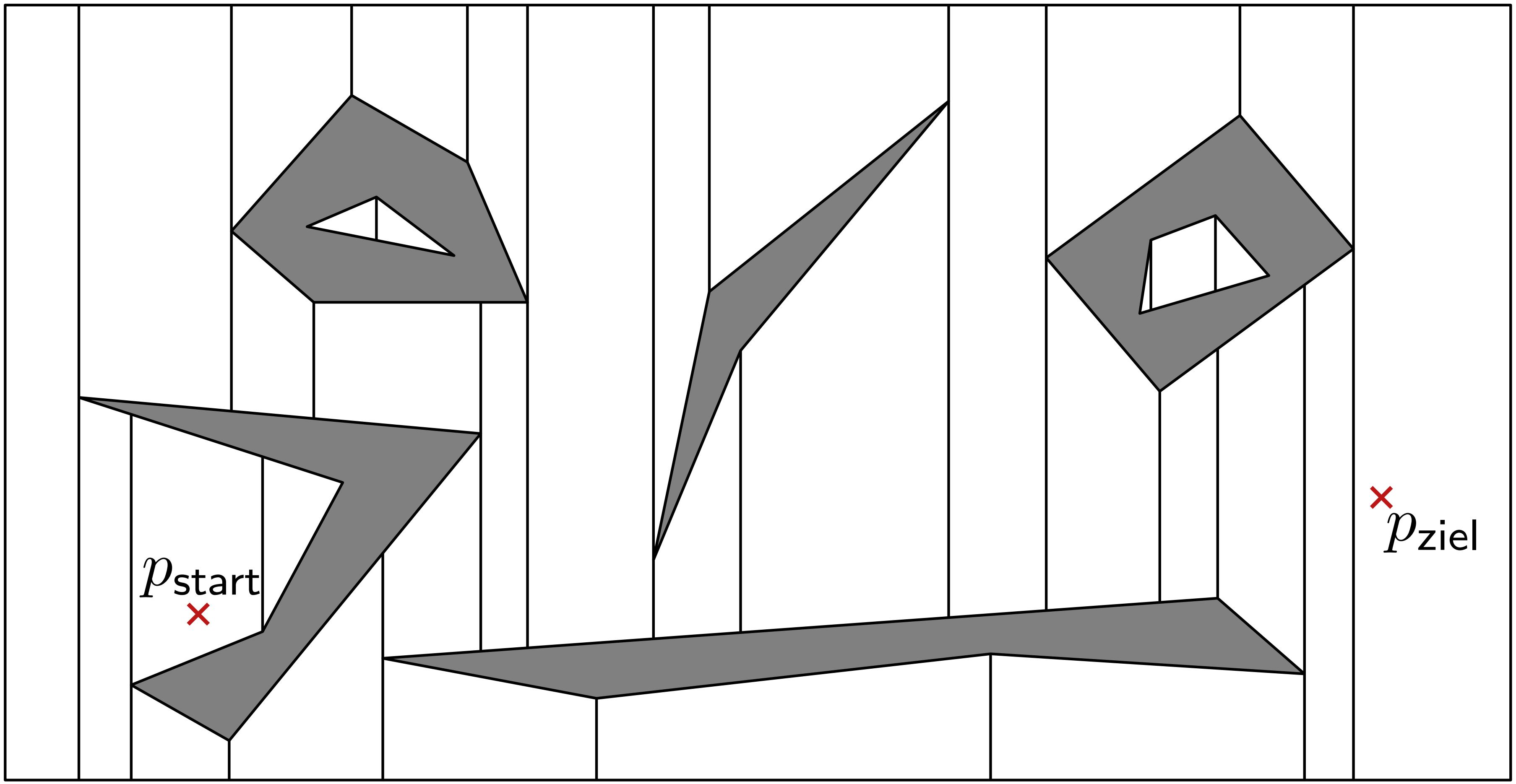


Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



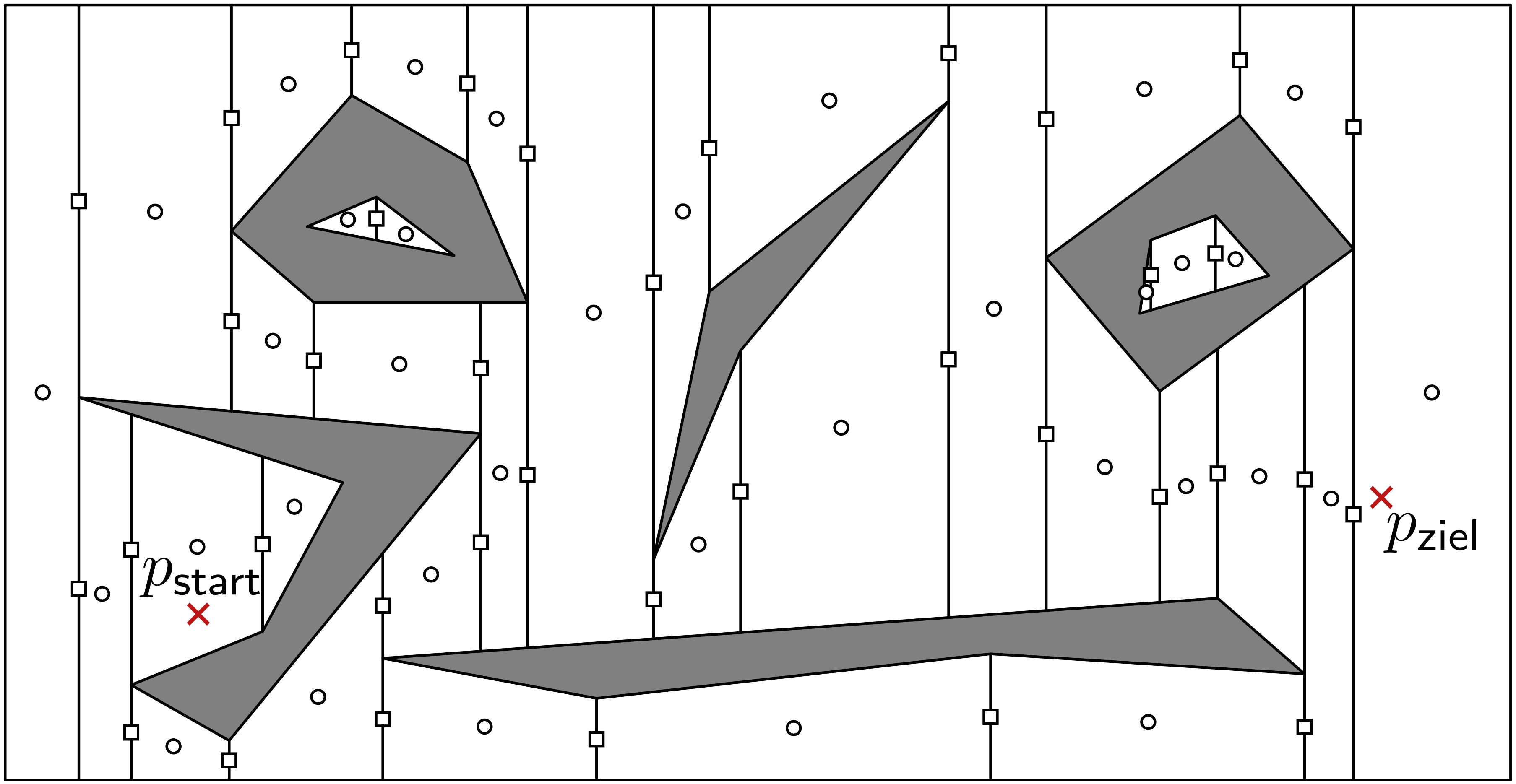
- erstelle Trapezzerlegung

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



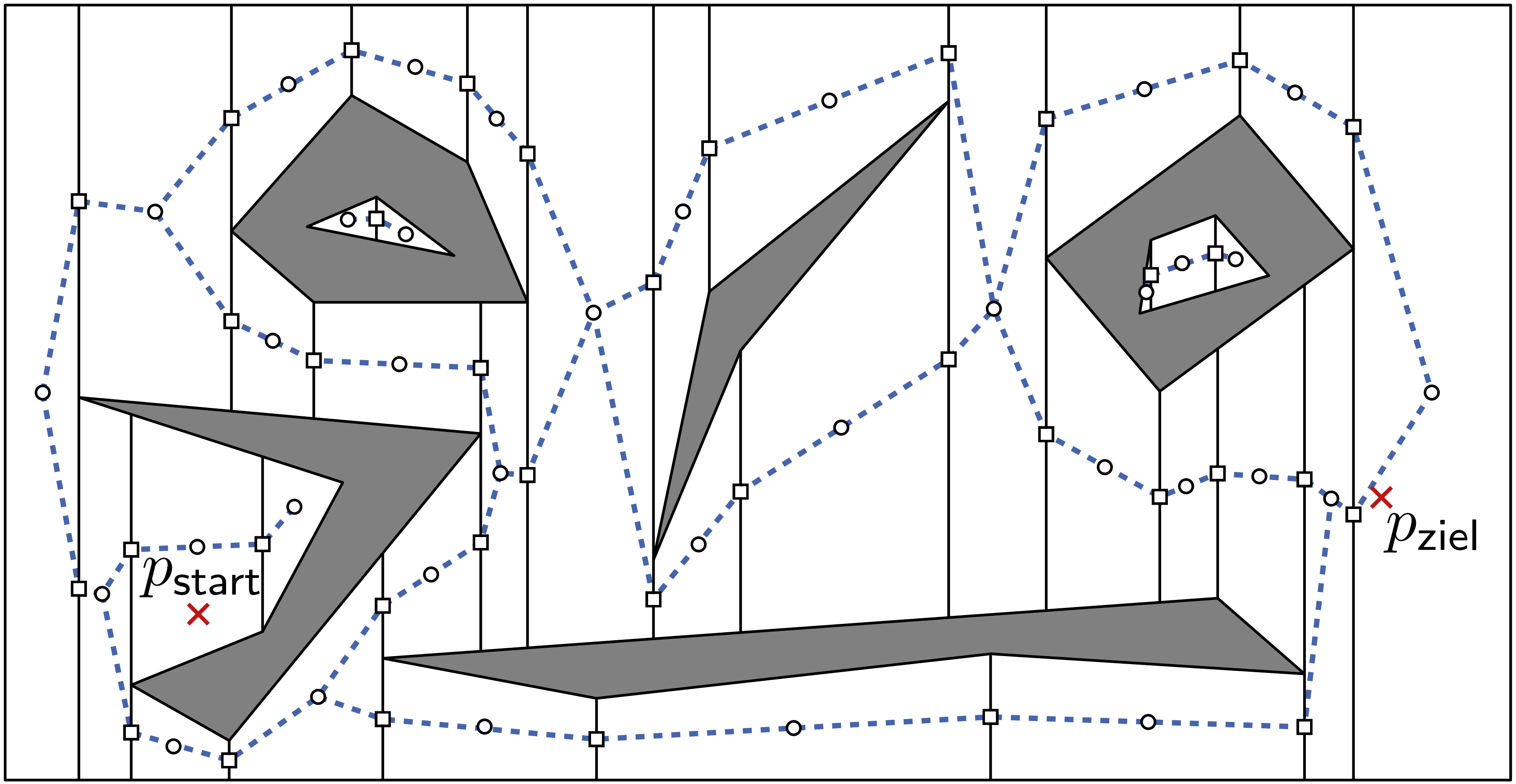
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



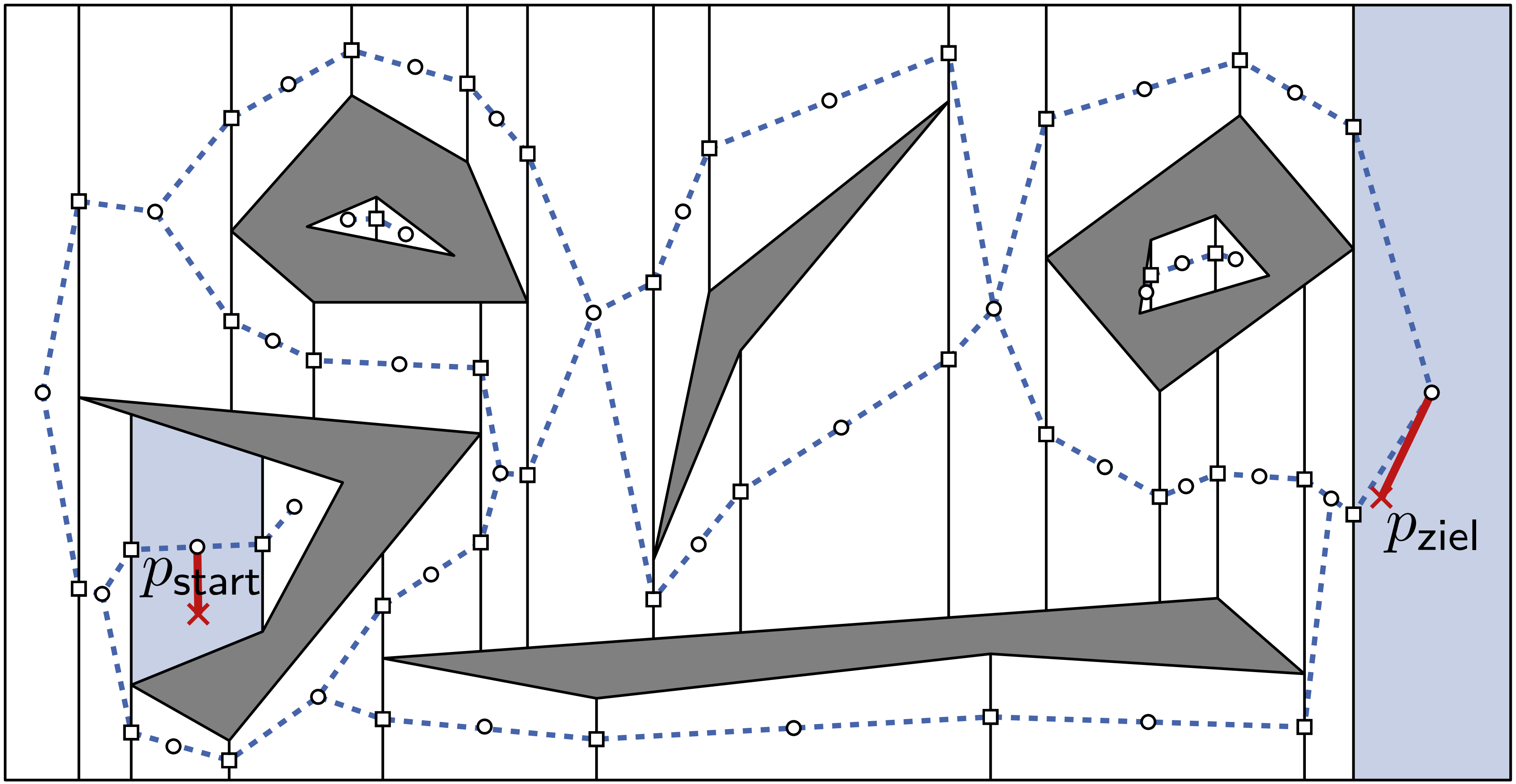
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



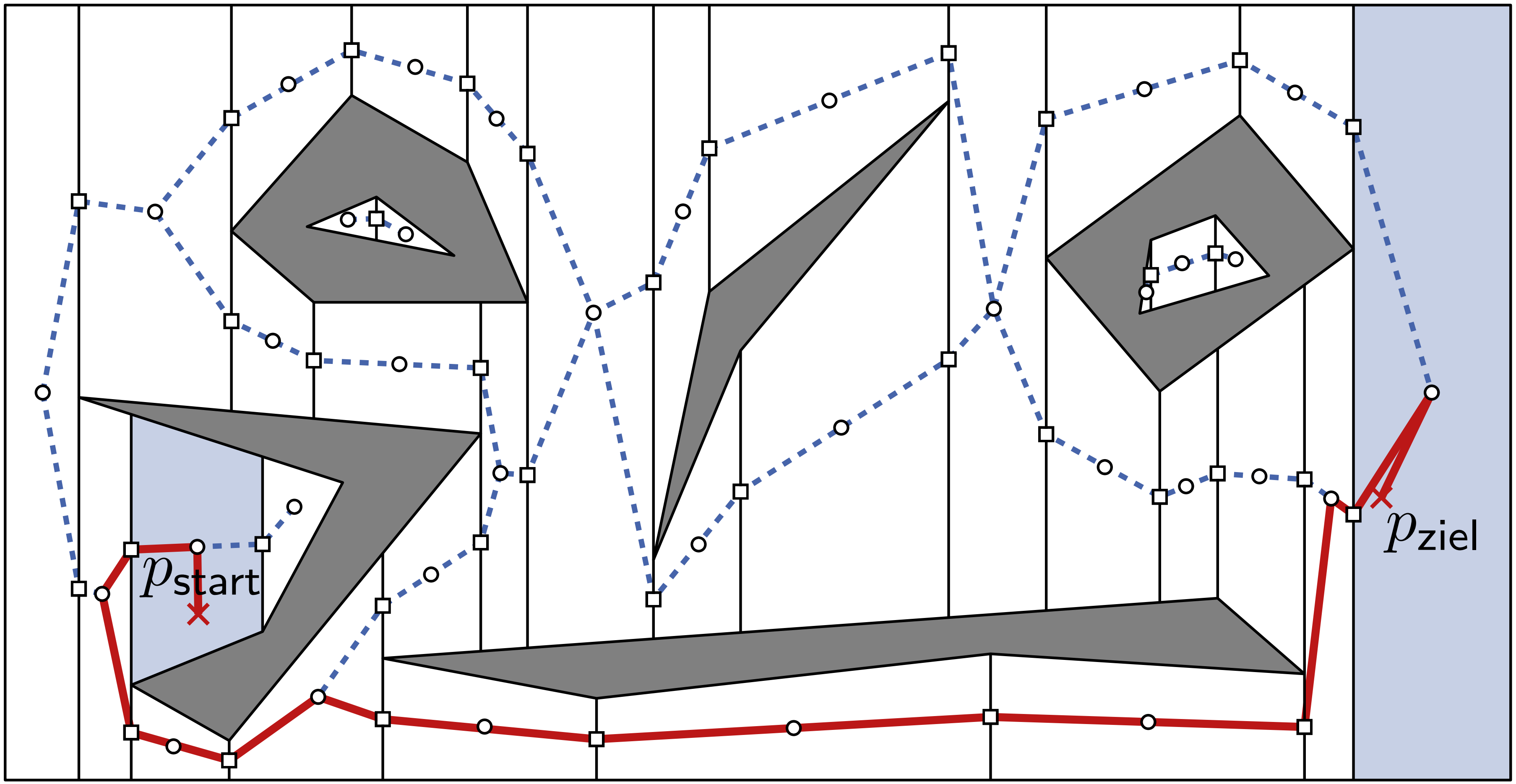
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel

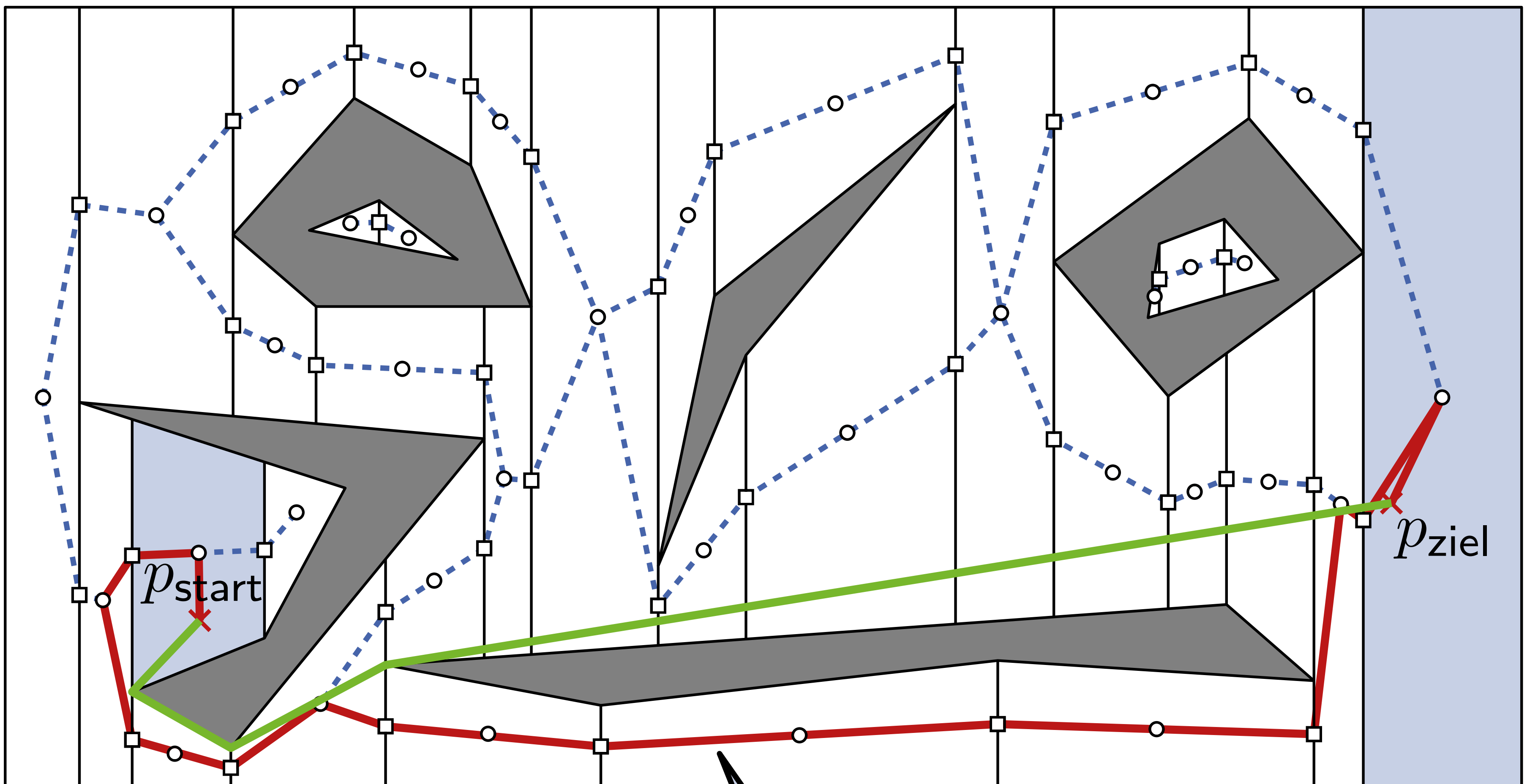
Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen



- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen
- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in G

Erste Idee: Kürzeste Wege in Graphen

Karlsruhe Institute of Technology



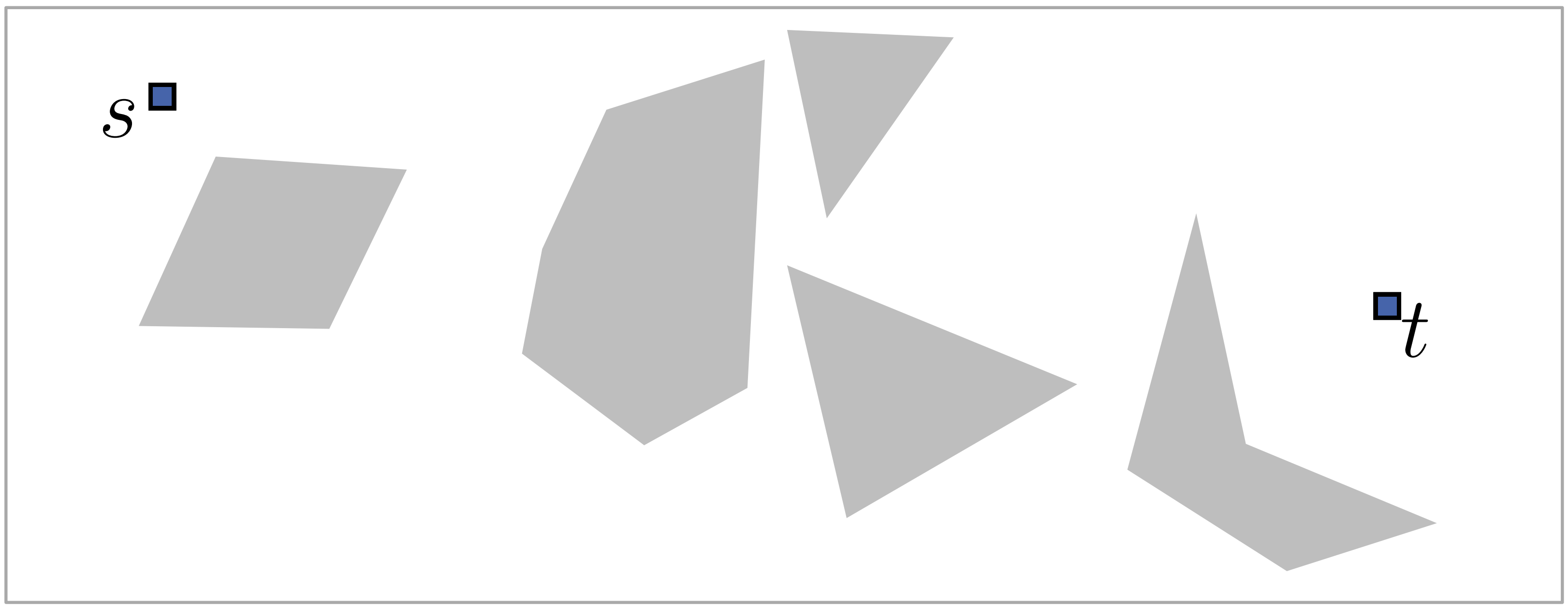
- erstelle Trapezzerlegung
- entferne Segmente in Hindernissen
- Knoten in Trapezen und Vertikalen
- euklidisch gewichteter „Dualgraph“ G mit Viaknoten auf Vertikalen

kein kürzester Weg!

- Lokalisiere Start und Ziel
- kürzester Weg mit Dijkstra in G

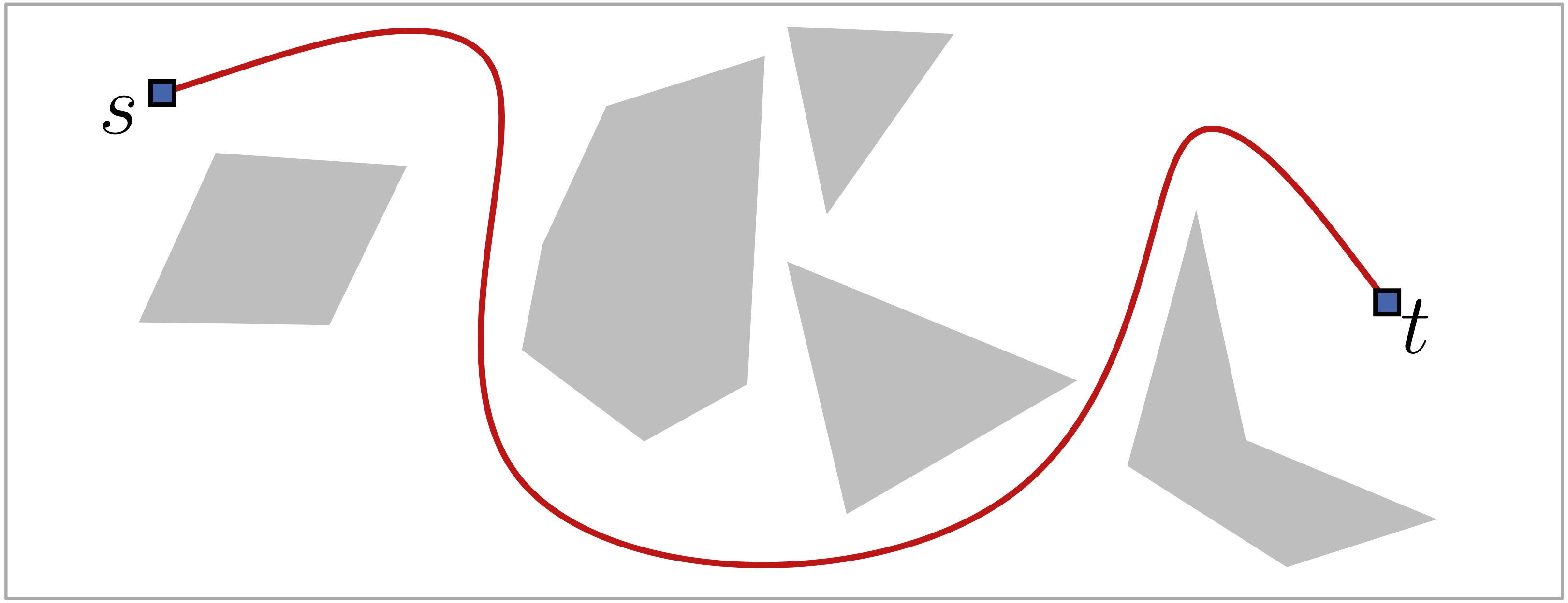
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S



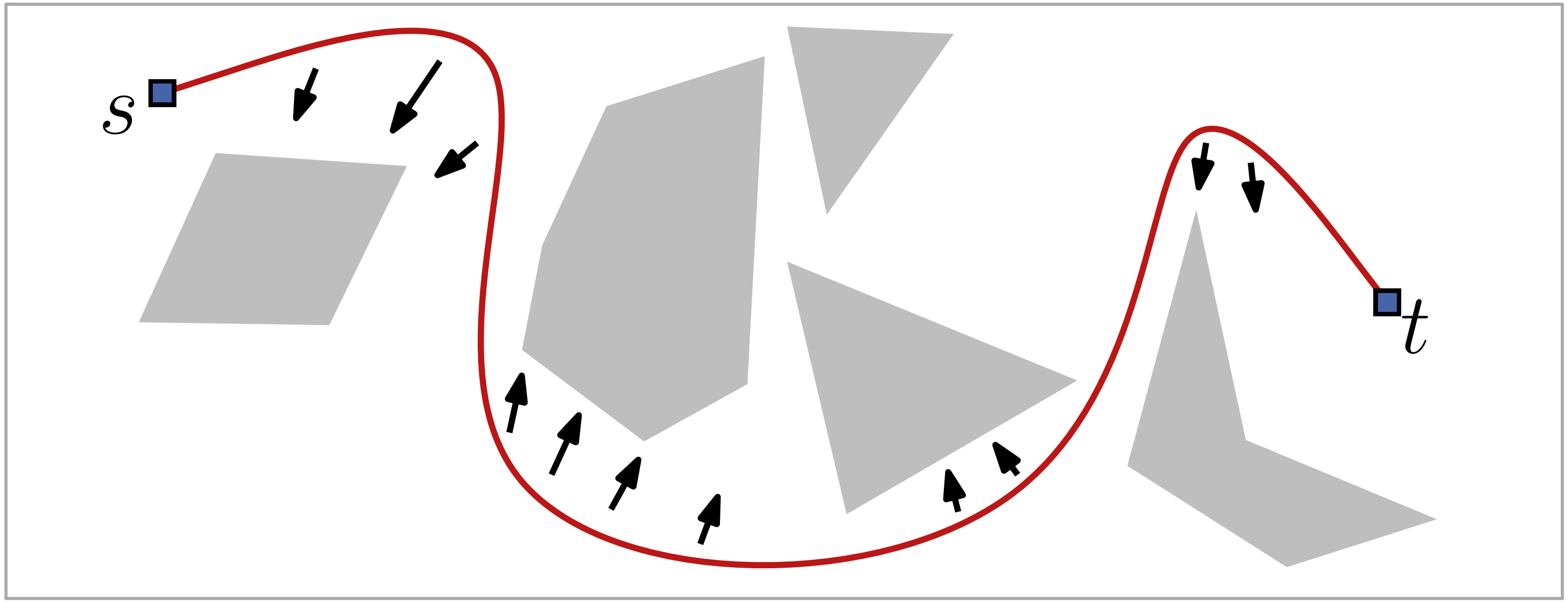
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



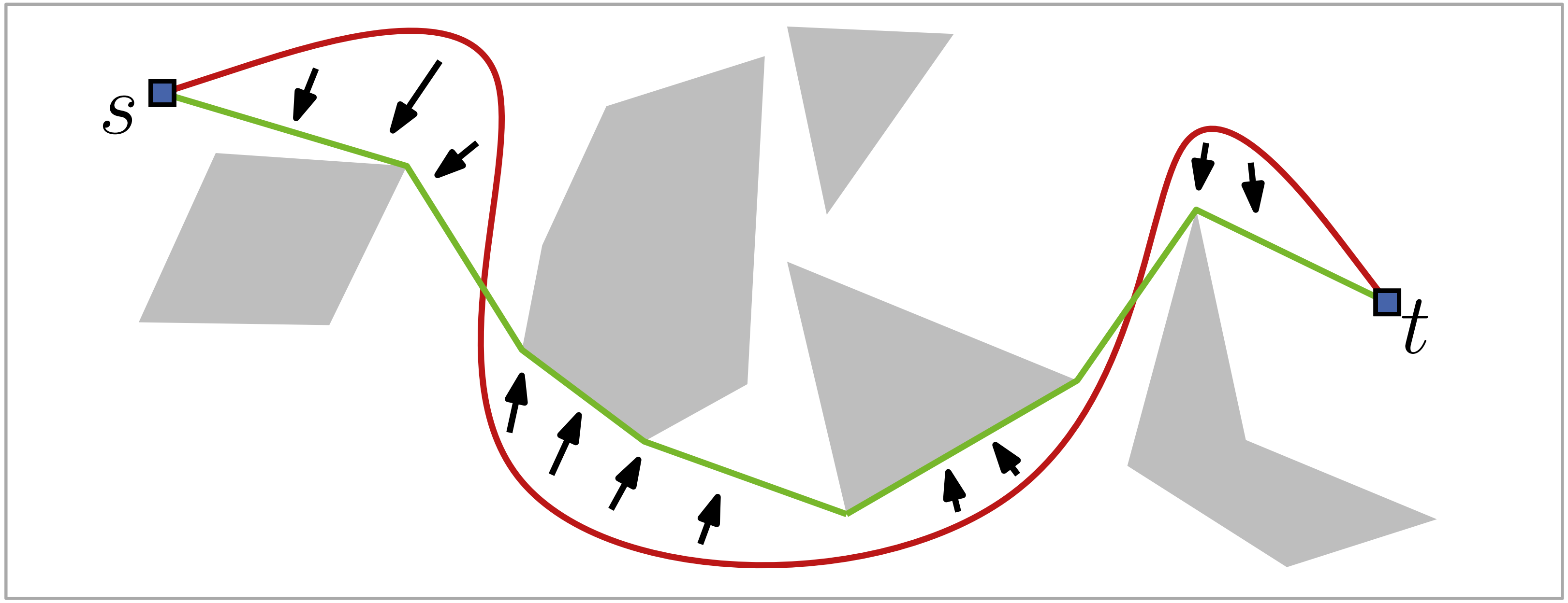
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



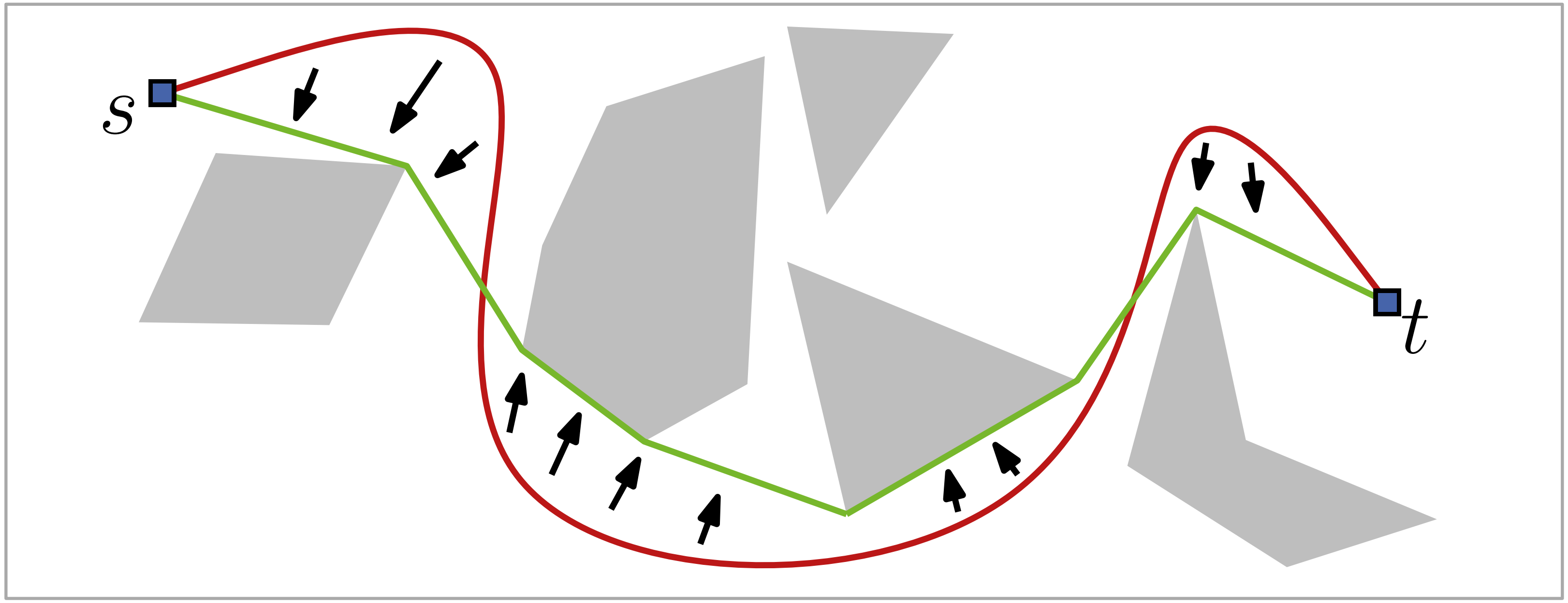
Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



Kürzeste Wege in Polygongebieten

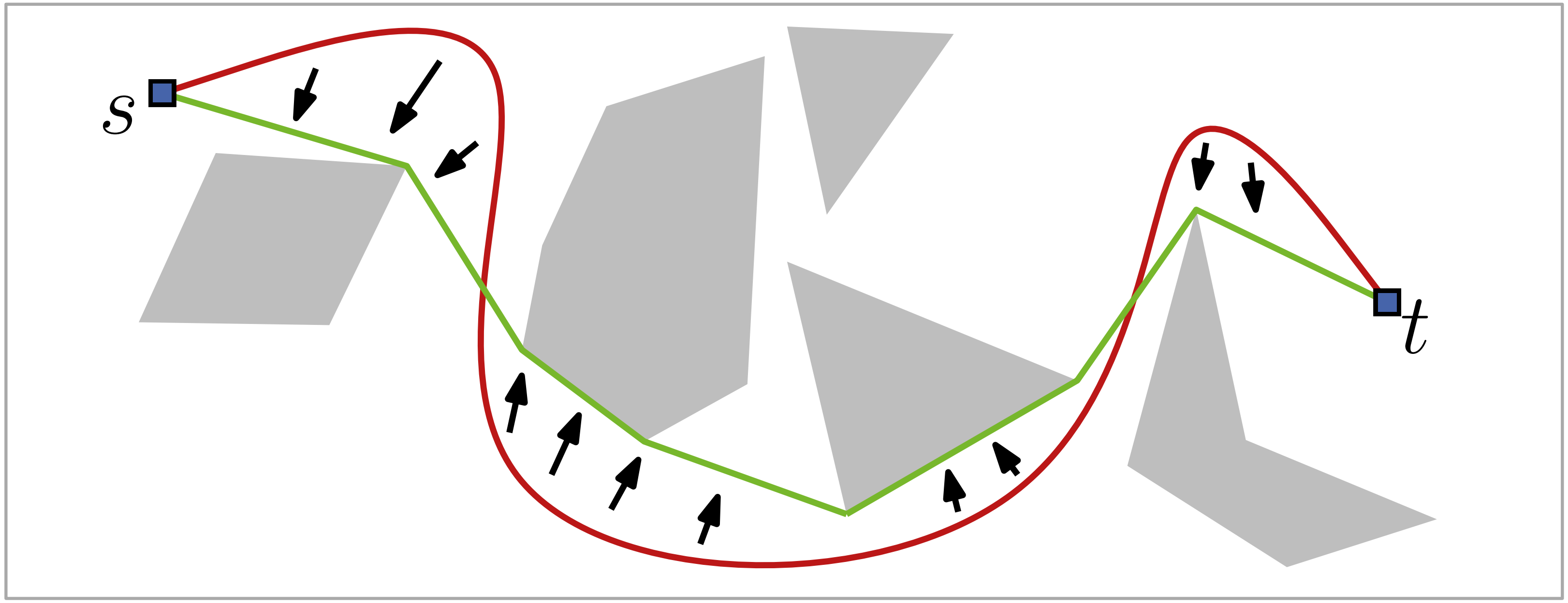
Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



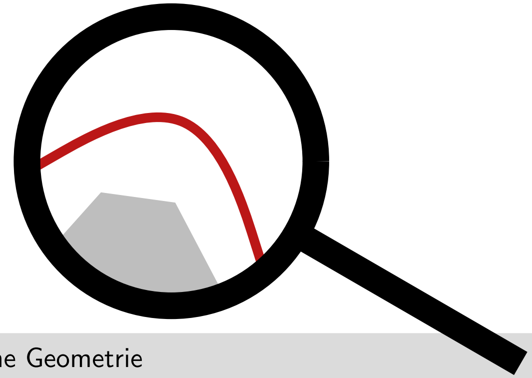
Beweisskizze:

Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

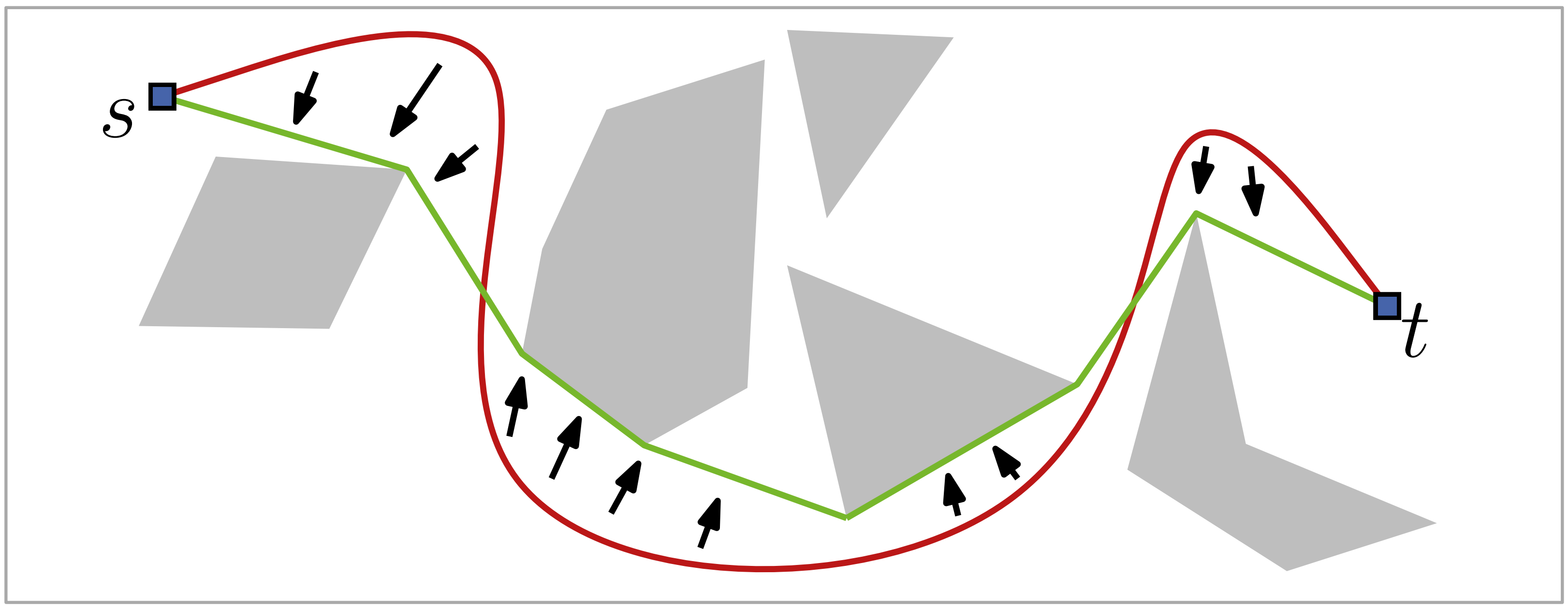


Beweisskizze:



Kürzeste Wege in Polygongebieten

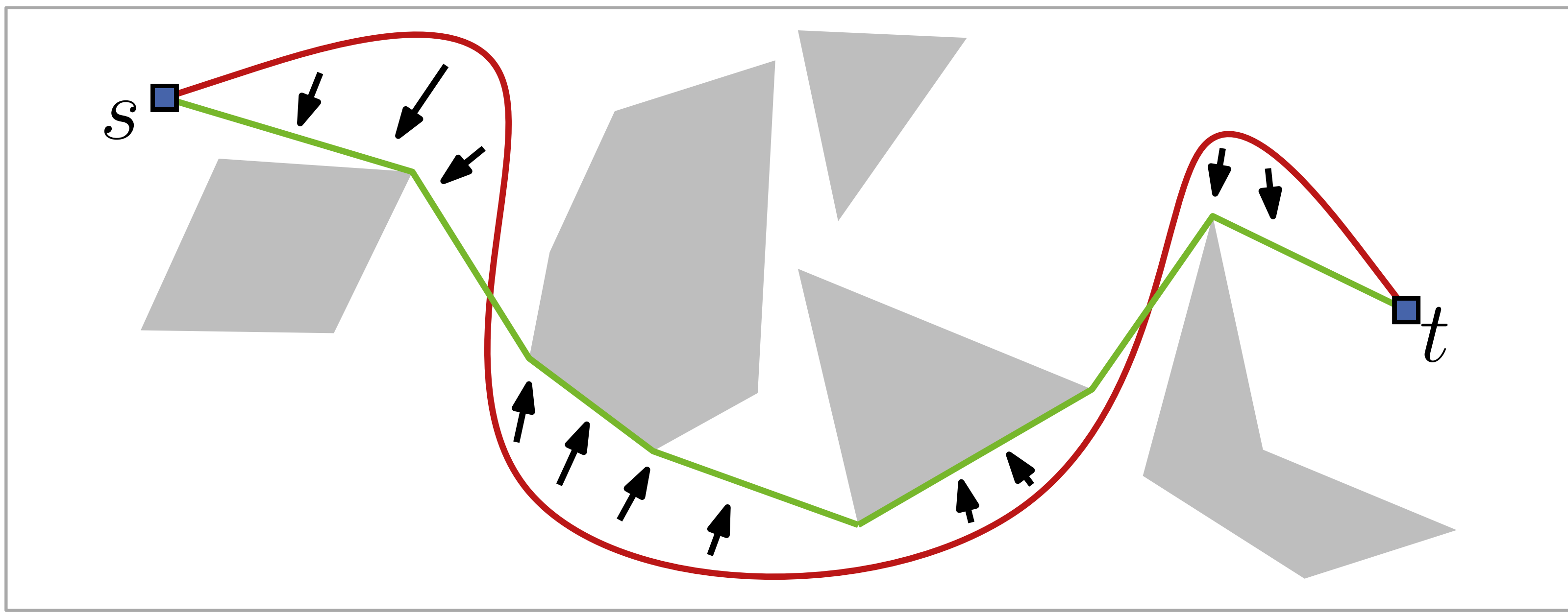
Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



Beweisskizze:

Kürzeste Wege in Polygongebieten

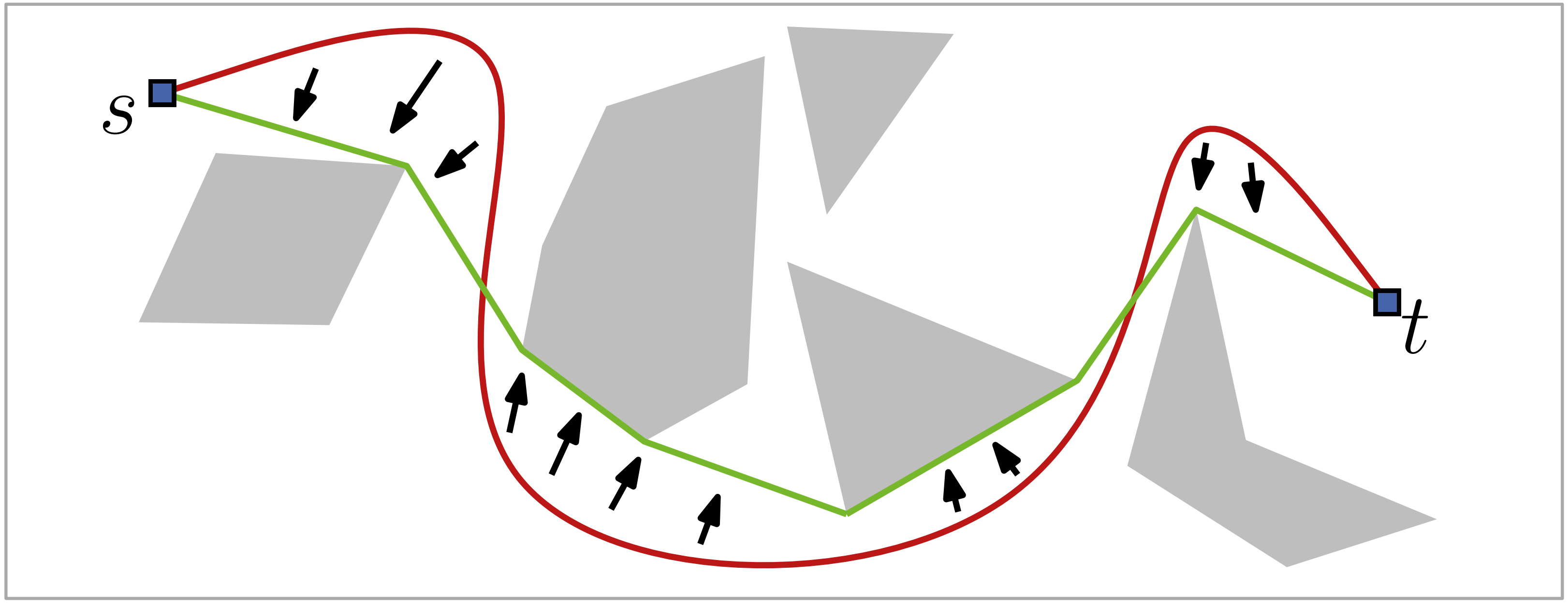
Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



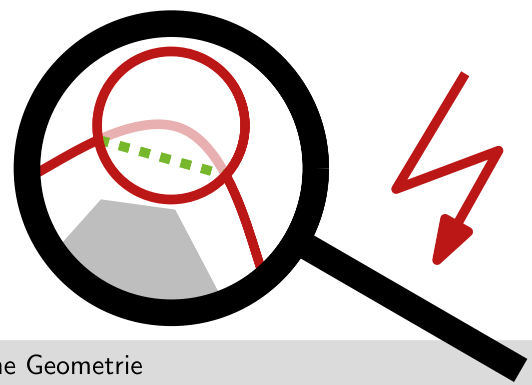
Beweisskizze:

Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

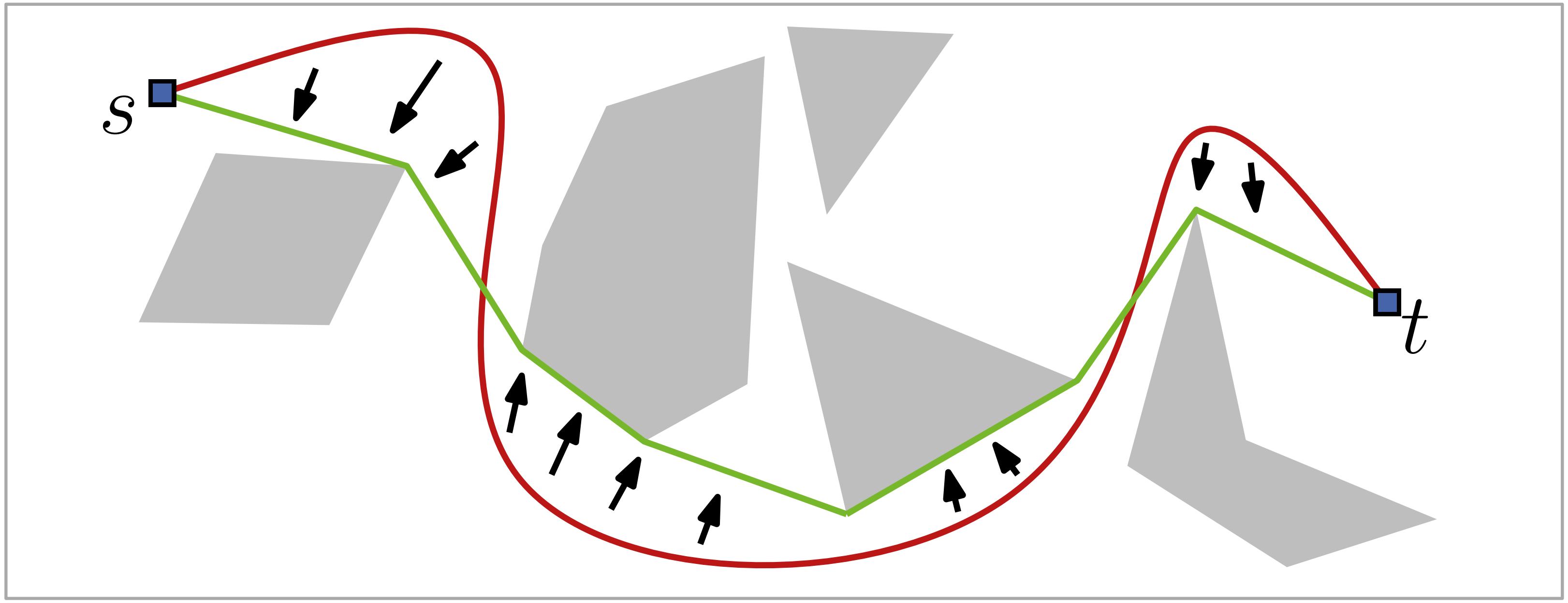


Beweisskizze:

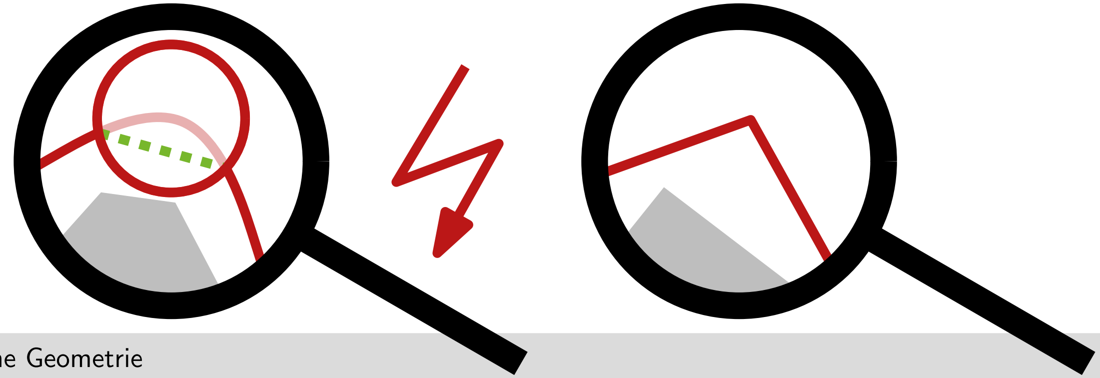


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

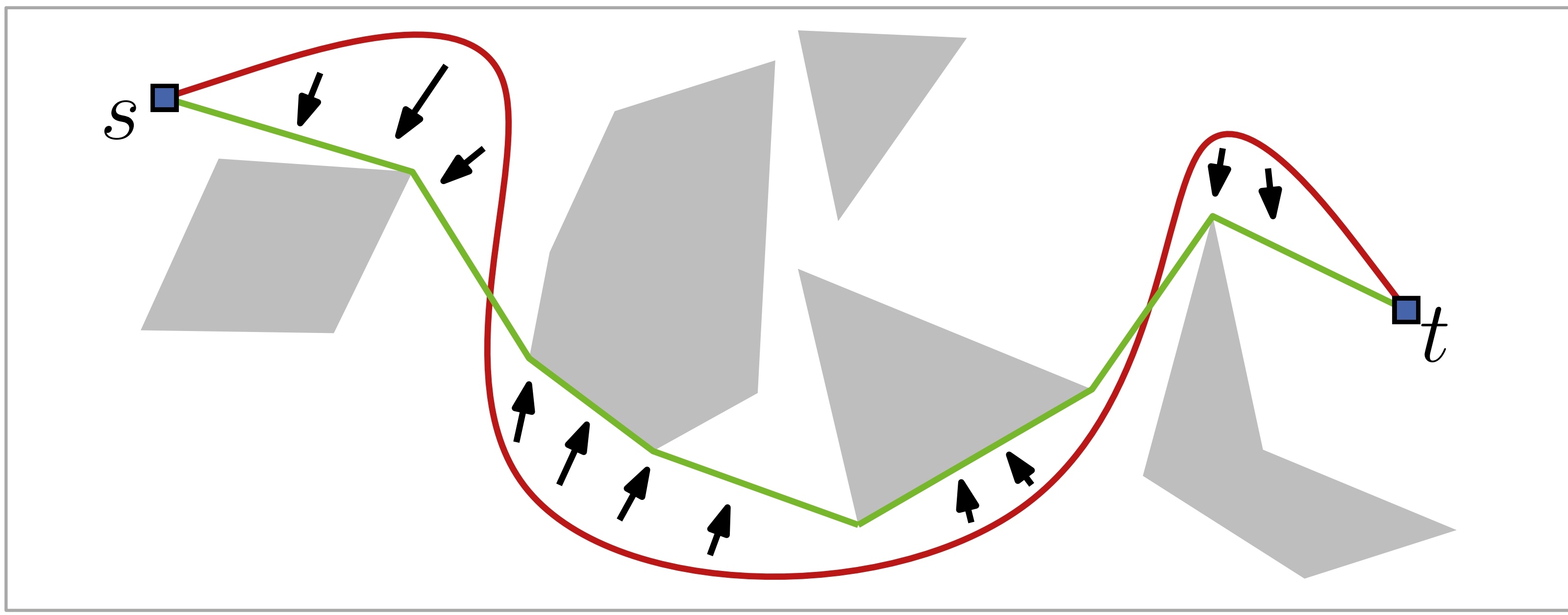


Beweisskizze:

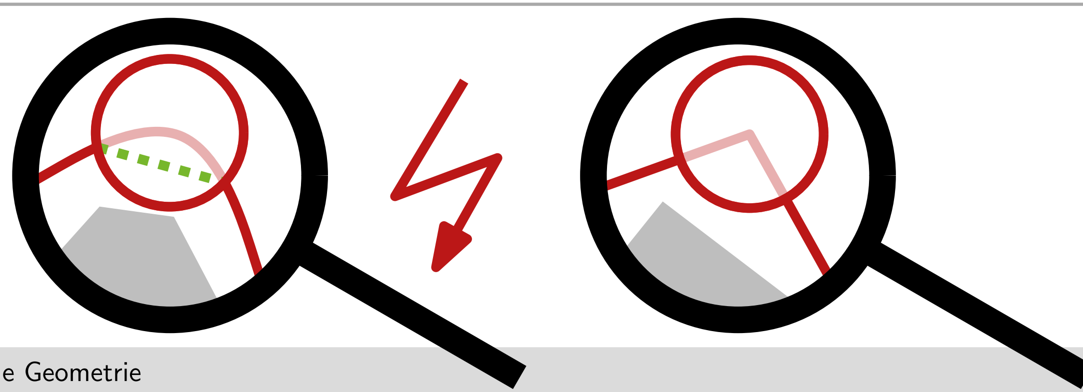


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

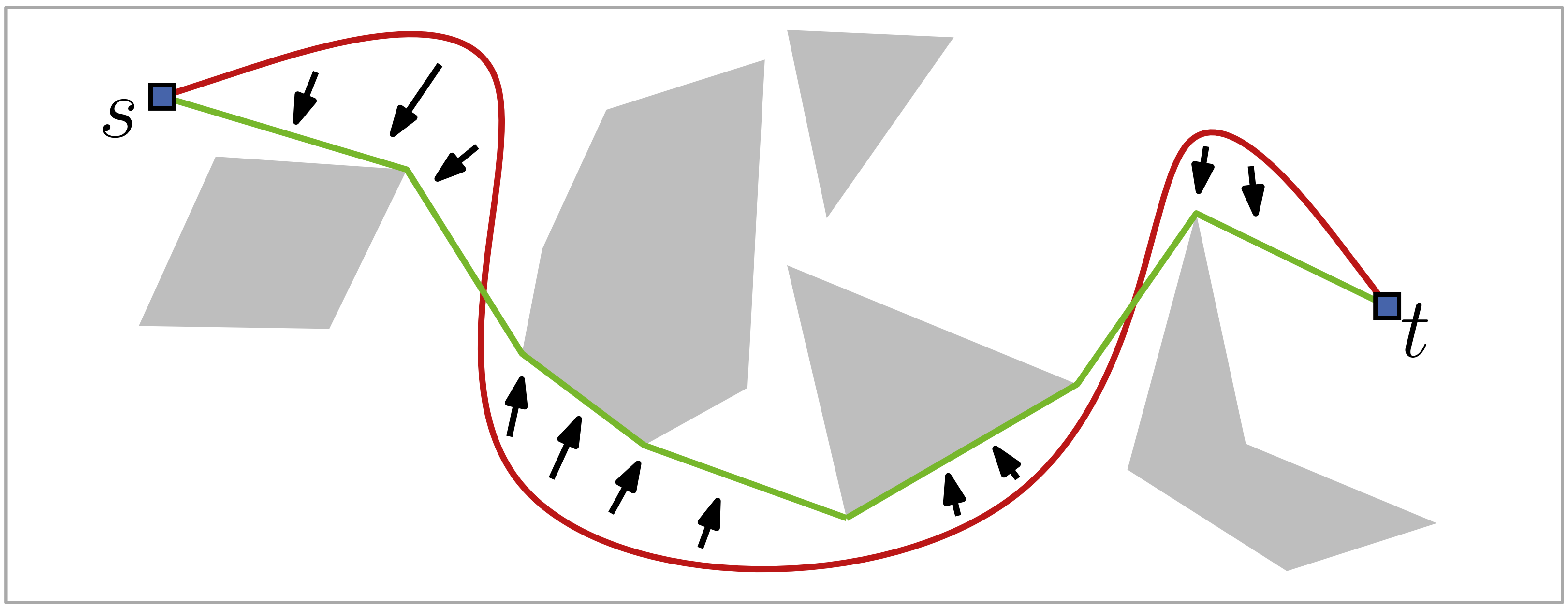


Beweisskizze:

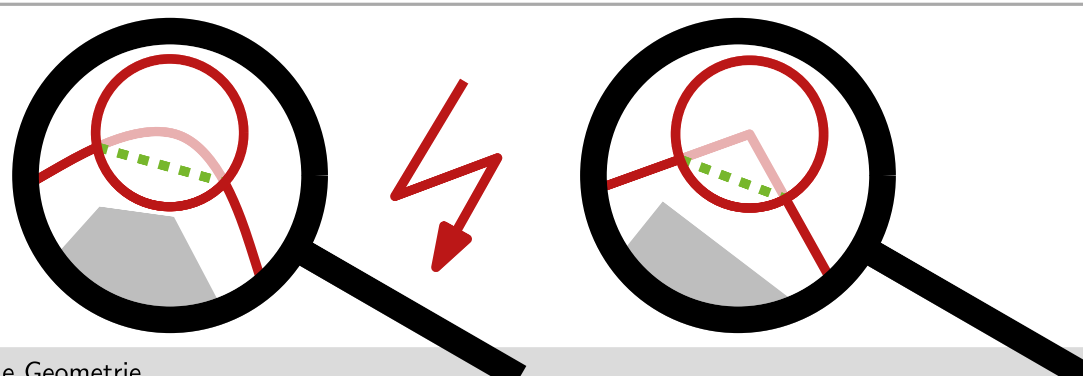


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

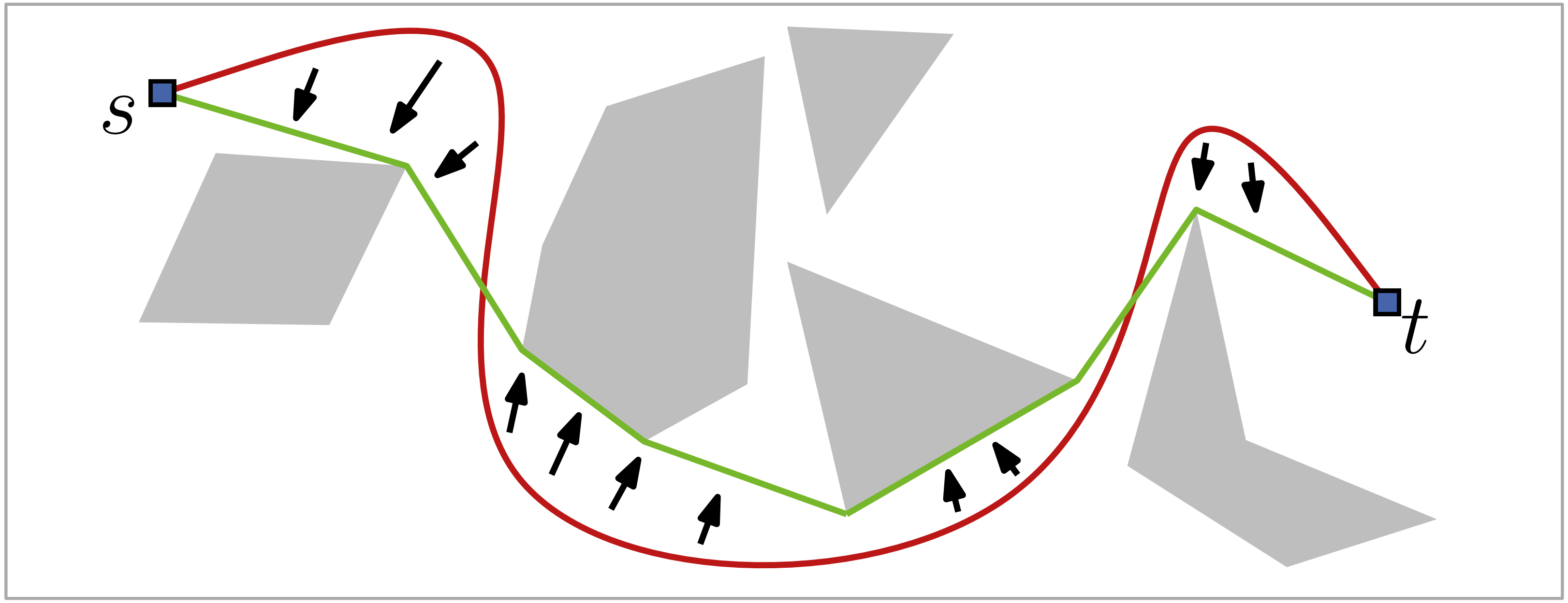


Beweisskizze:

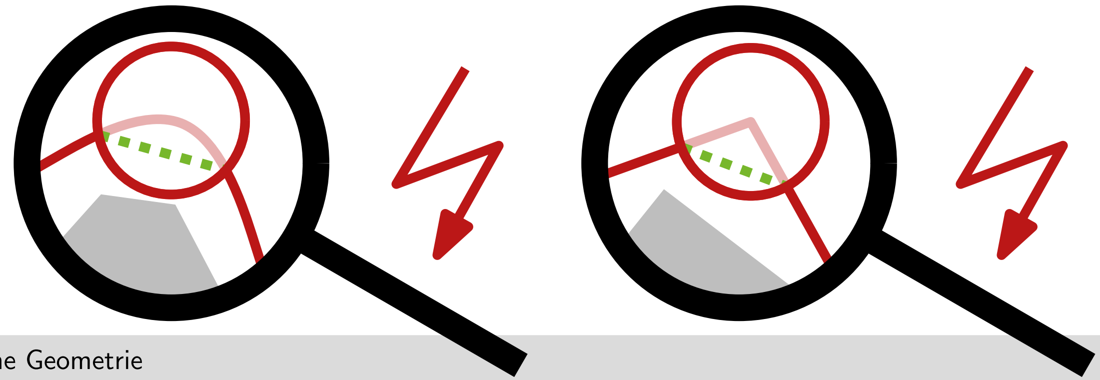


Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

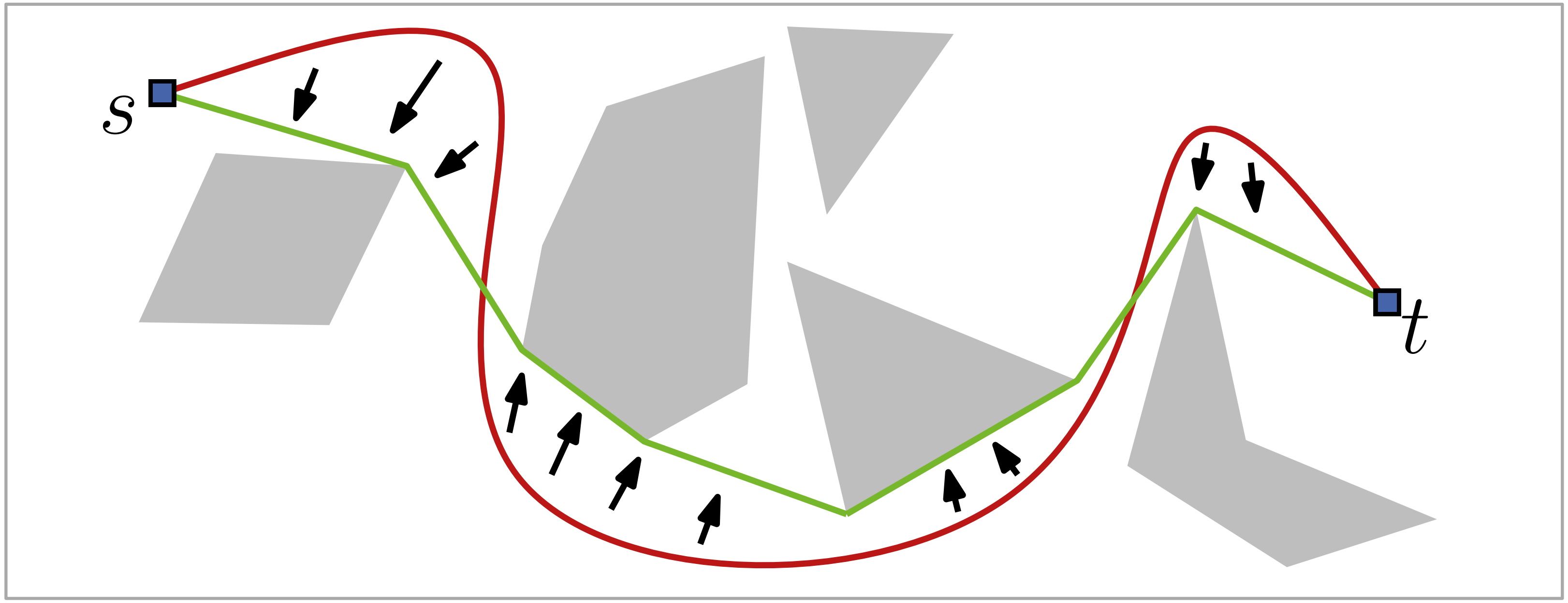


Beweisskizze:



Kürzeste Wege in Polygongebieten

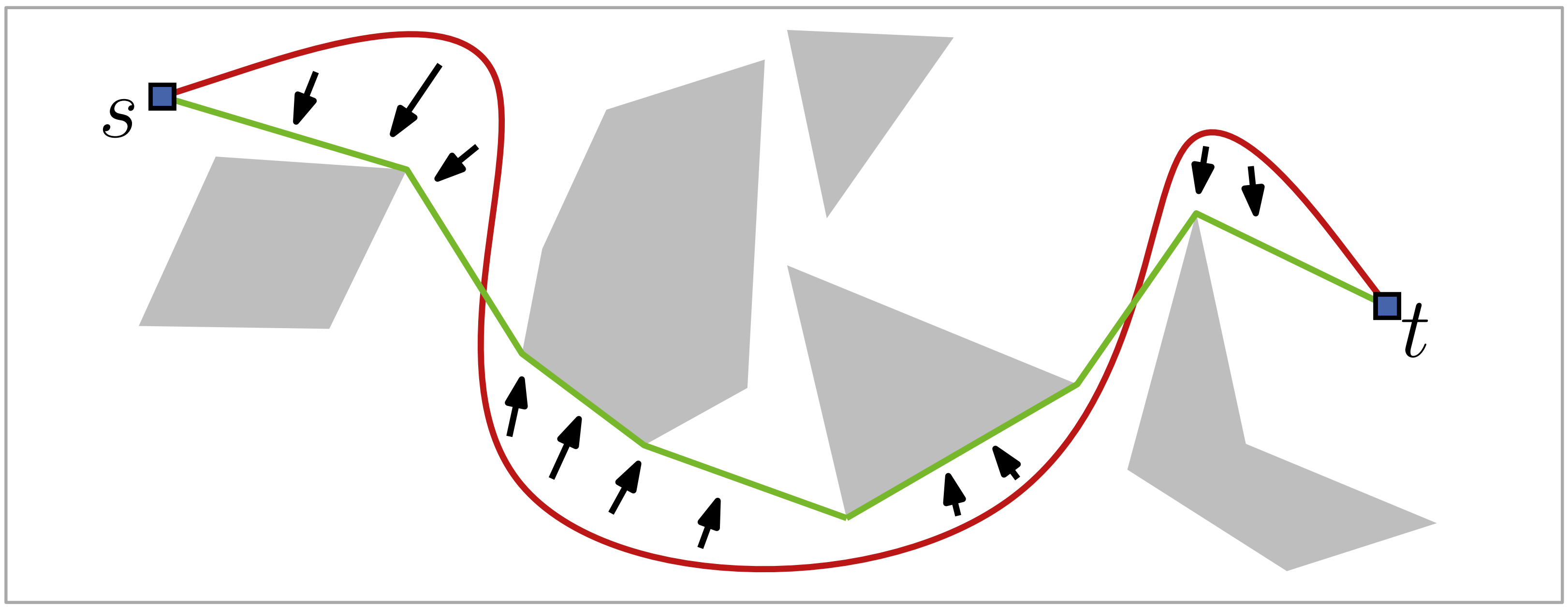
Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



Beweisskizze:

Kürzeste Wege in Polygongebieten

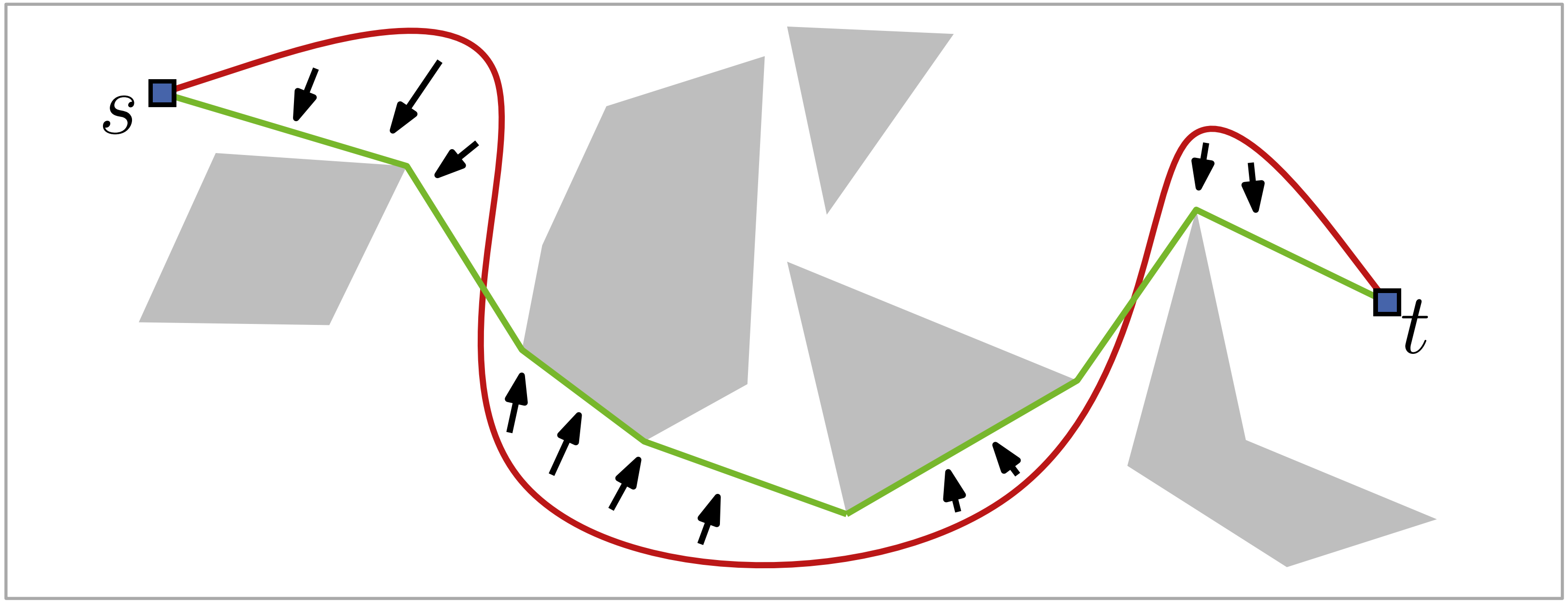
Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



Beweisskizze:

Kürzeste Wege in Polygongebieten

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten offenen Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.



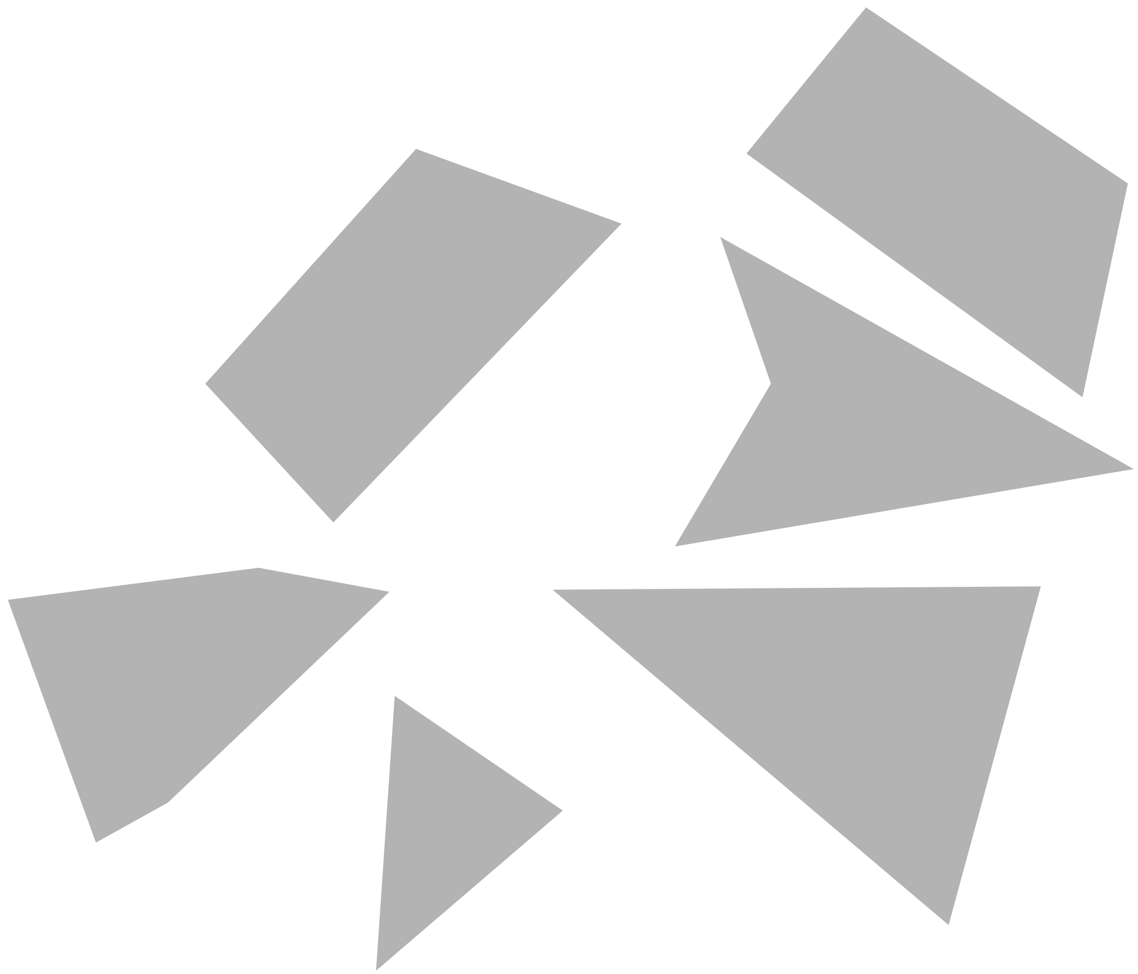
Beweisskizze:

Aufgabe 1

Gegeben: Menge S von Polygonen mit insgesamt n Knoten.

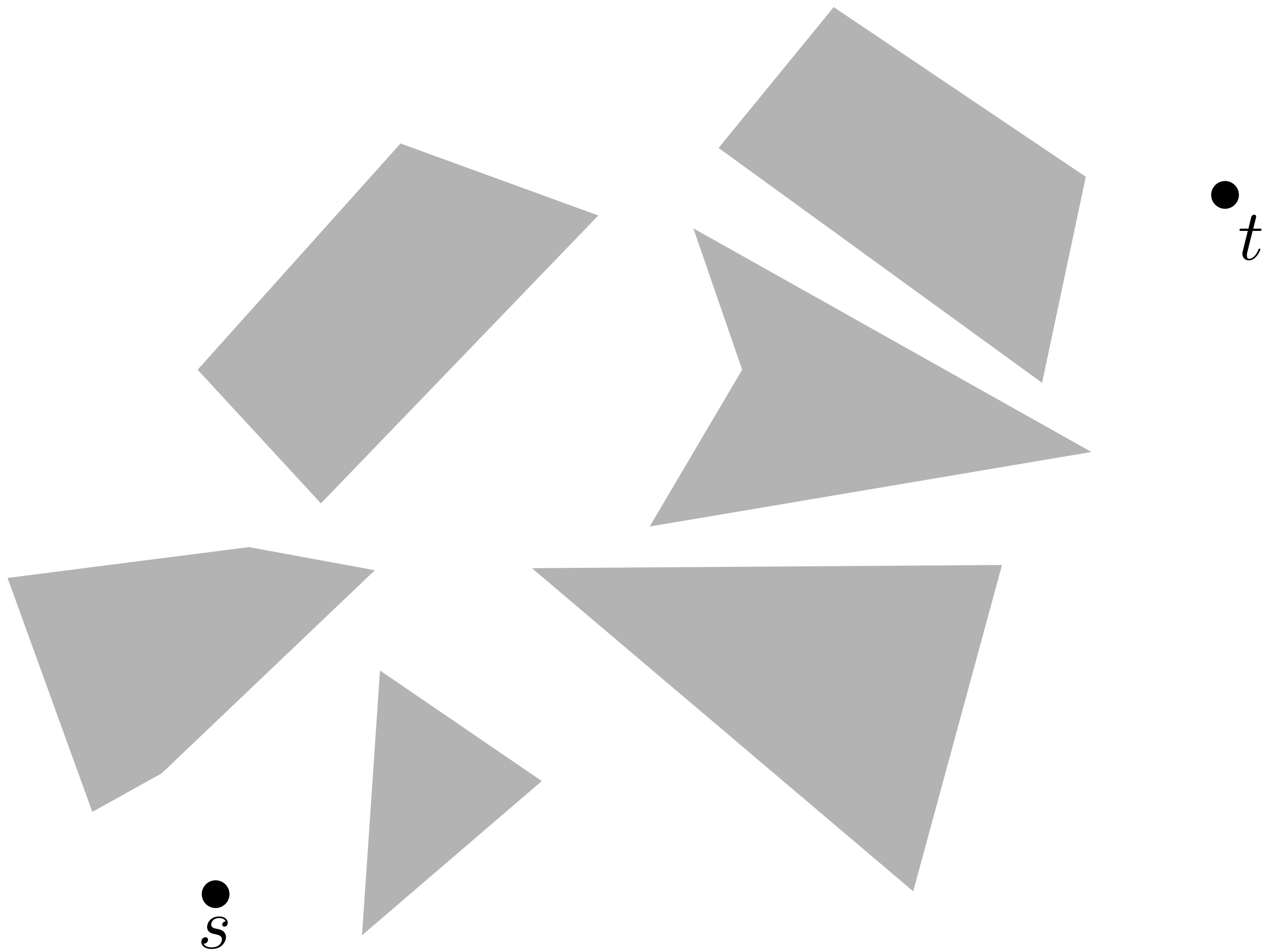
Aufgabe 1

Gegeben: Menge S von Polygonen mit insgesamt n Knoten.



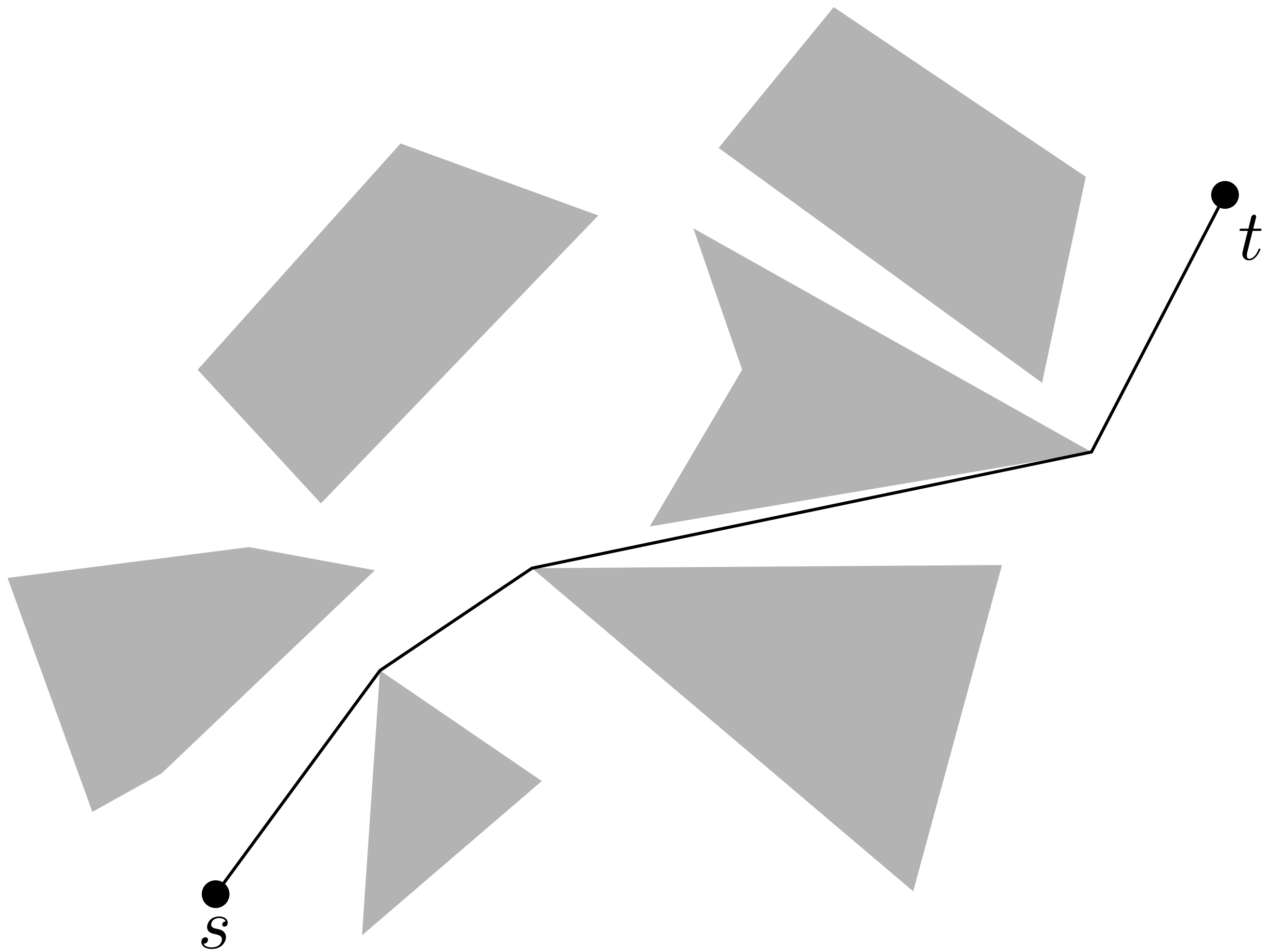
Aufgabe 1

Gegeben: Menge S von Polygonen mit insgesamt n Knoten.



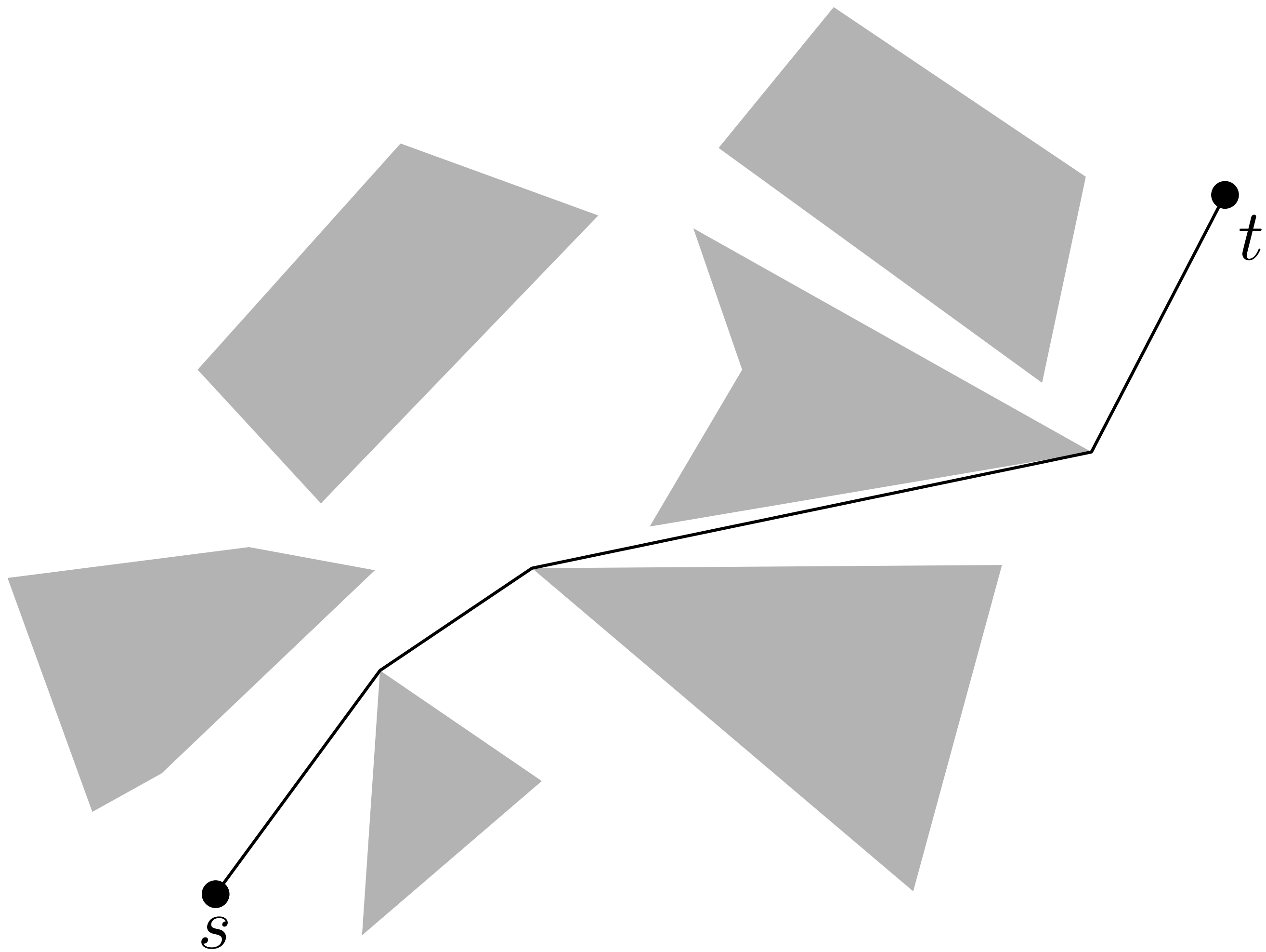
Aufgabe 1

Gegeben: Menge S von Polygonen mit insgesamt n Knoten.



Aufgabe 1

Gegeben: Menge S von Polygonen mit insgesamt n Knoten.

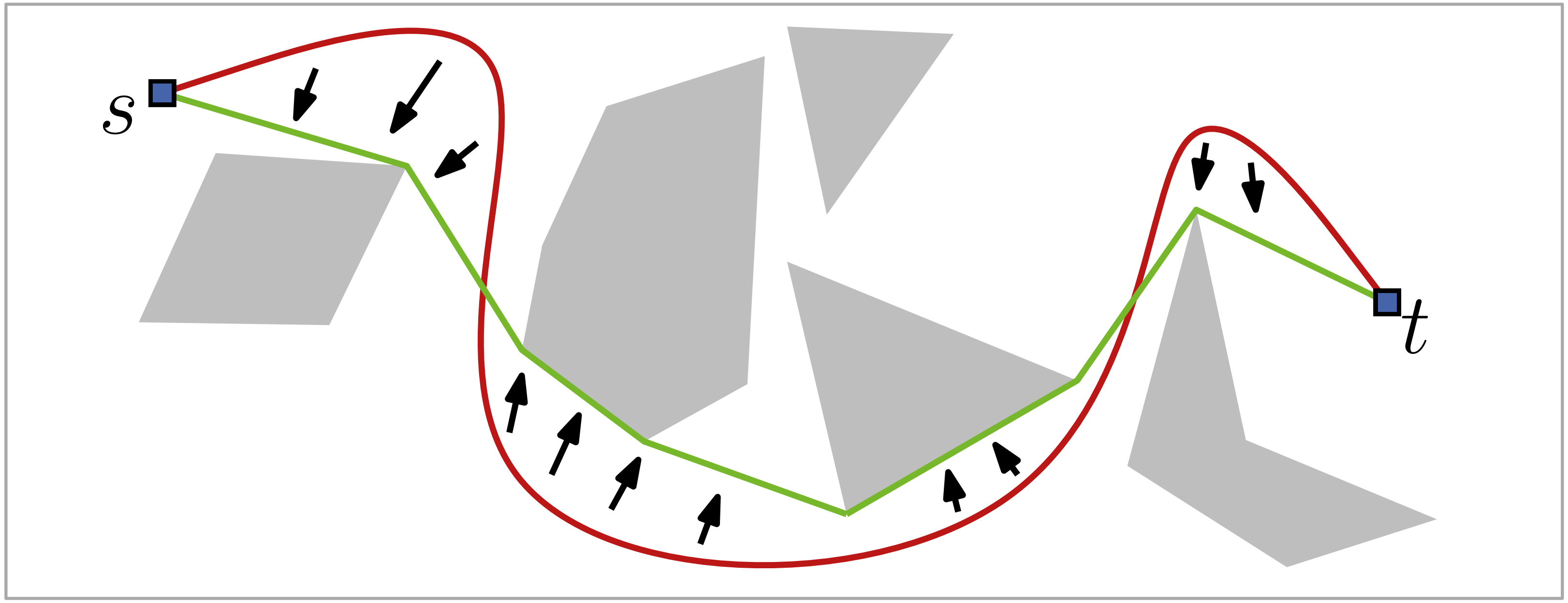


a) Zeige, dass #Segmente eines kürzesten Wegs in $O(n)$ ist.

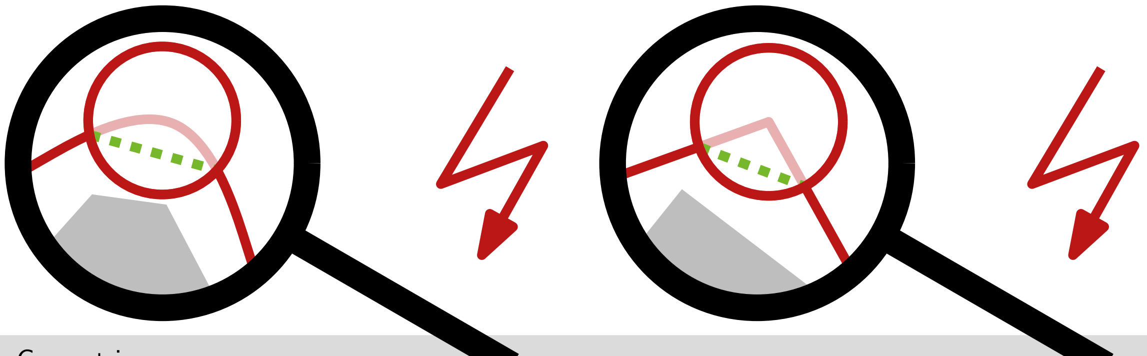
b) Beispiel für $\Theta(n)$

Aufgabe 1

Lemma 1: Für eine Menge S von disjunkten Polygonen in $\mathbb{R}^2$ und zwei Punkte s und t außerhalb S ist jeder kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$ ein Polygonzug dessen innere Knoten Knoten von S sind.

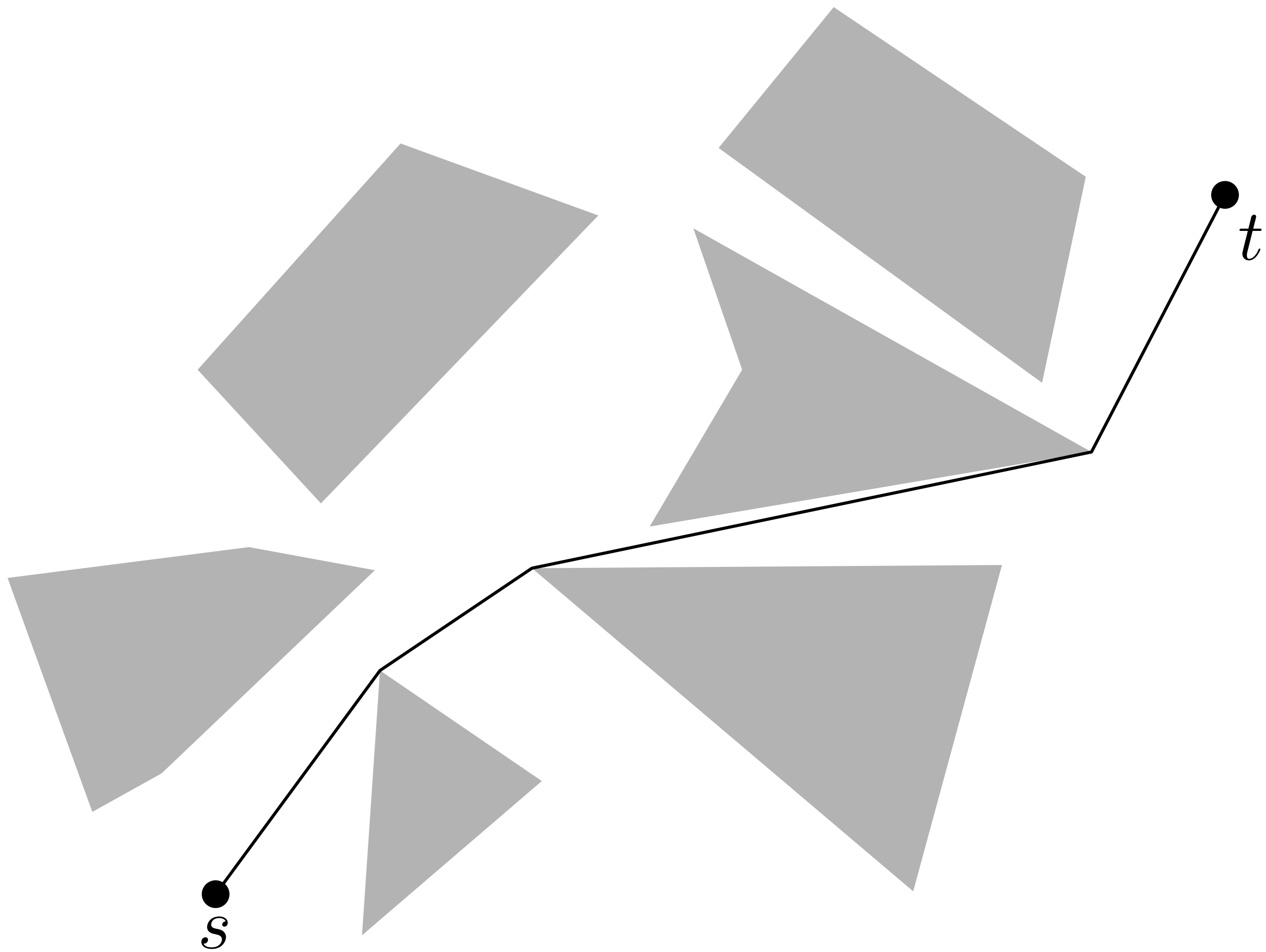


Beweisskizze:



Aufgabe 1

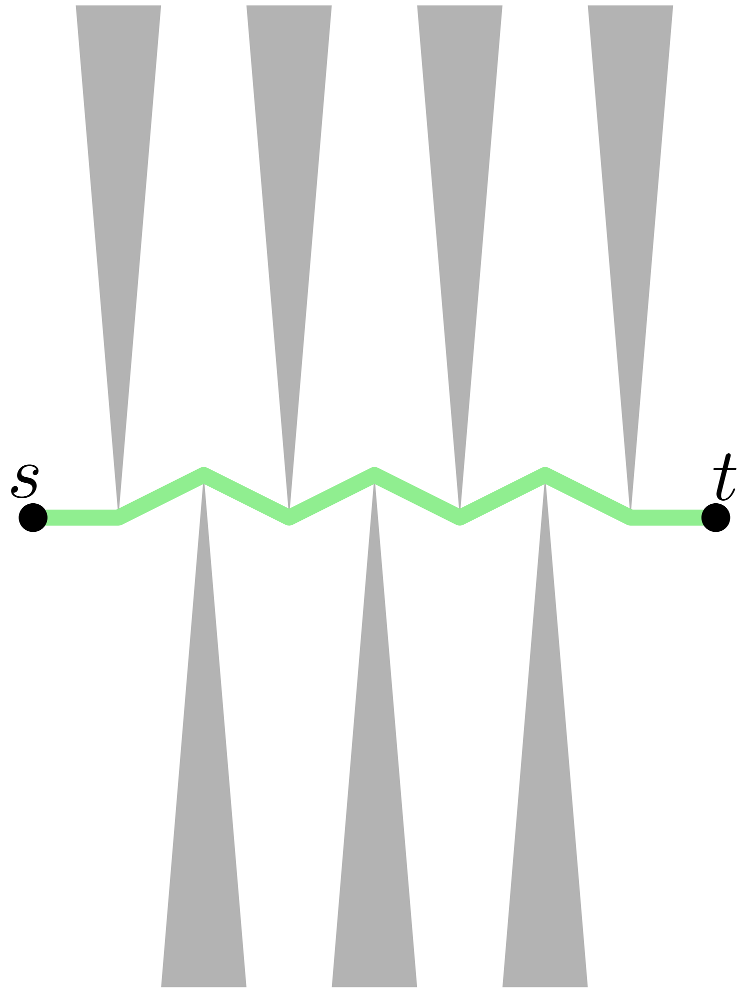
Gegeben: Menge S von Polygonen mit insgesamt n Knoten.



a) Zeige, dass #Segmente eines kürzesten Wegs in $O(n)$ ist.

b) Beispiel für $\Theta(n)$

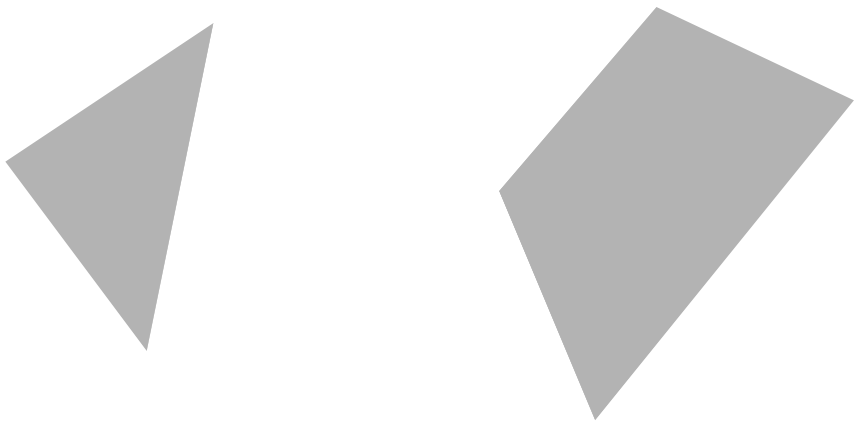
Aufgabe 1



b) Beispiel für $\Theta(n)$

Sichtbarkeitsgraph

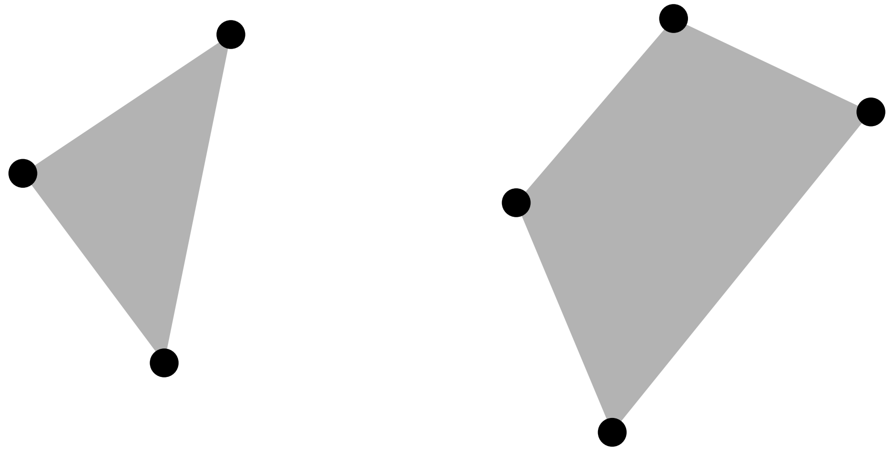
Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...



Sichtbarkeitsgraph

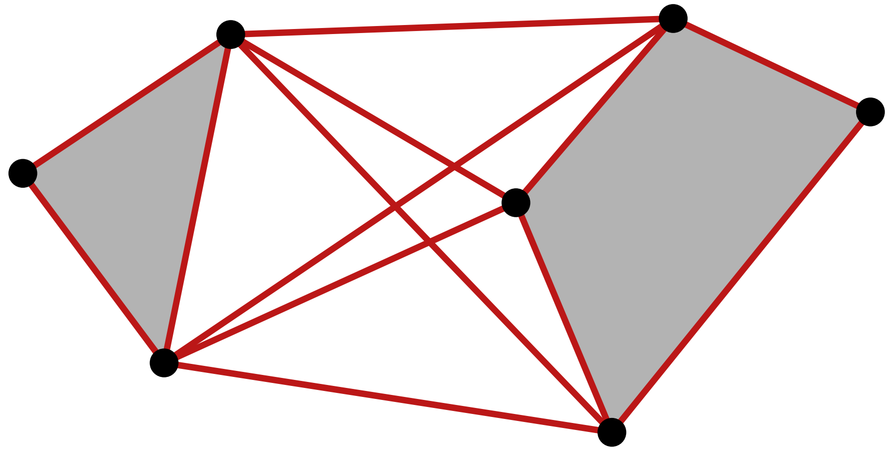
Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...

...mit Knotenmenge $V(S)$.



Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...

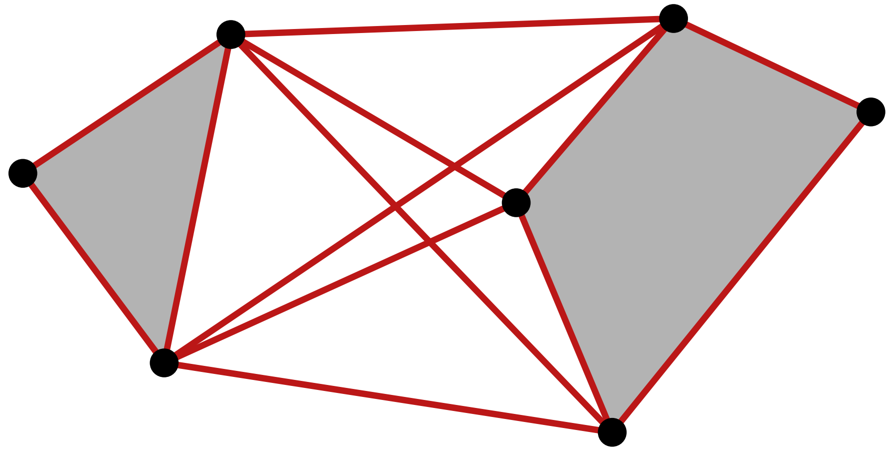


...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\mathsf{vis}}(S) = (V(S), E_{\mathsf{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\mathsf{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S)$ und u *sieht* $v\}$ und $w(uv) = |uv|$.

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...

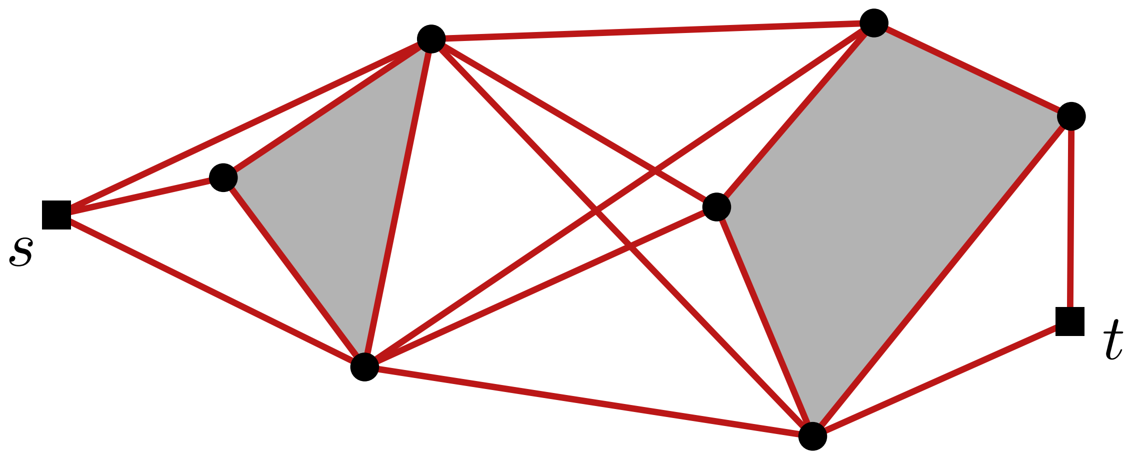


...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\mathrm{vis}}(S) = (V(S), E_{\mathrm{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\mathrm{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S)$ und u *sieht* $v\}$ und $w(uv) = |uv|$. Dabei gilt u **sieht** $v :\Leftrightarrow \overline{uv} \cap \bigcup S = \emptyset$

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...



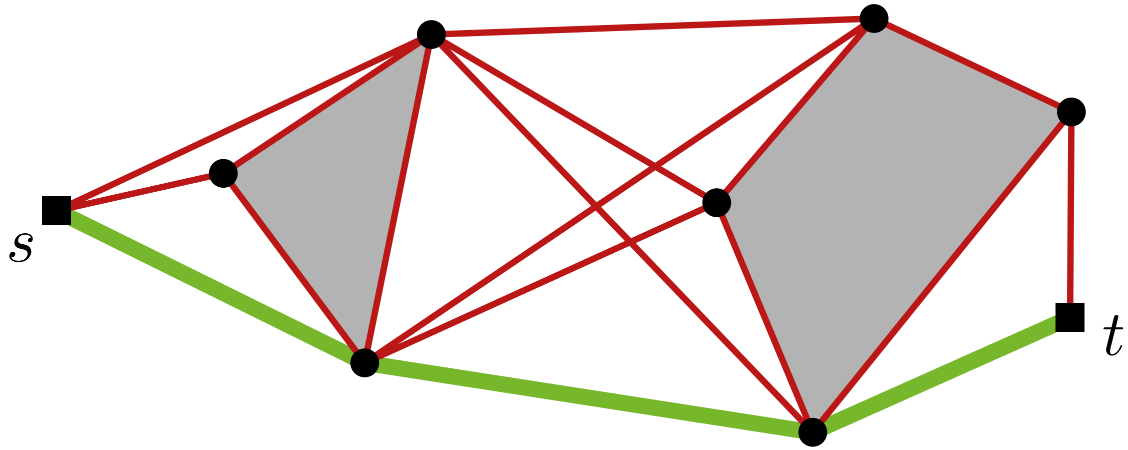
...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S) \text{ und } u \textit{ sieht } v\}$ und $w(uv) = |uv|$.
Dabei gilt u **sieht** v $:\Leftrightarrow \overline{uv} \cap \bigcup S = \emptyset$

Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\text{vis}}(S^\star)$ analog.

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...



...mit Knotenmenge $V(S)$.

Def.: Dann ist $G_{\mathsf{vis}}(S) = (V(S), E_{\mathsf{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\mathsf{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S)$ und u *sieht* $v\}$ und $w(uv) = |uv|$.
Dabei gilt u **sieht** v $:\Leftrightarrow \overline{uv} \cap \bigcup S = \emptyset$

Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\mathsf{vis}}(S^\star)$ analog.

Lemma 1
$\Rightarrow$ Der kürzeste st-Weg in $\mathbb{R}^2$, der die Hindernisse in S vermeidet, entspricht einem kürzesten st-Weg in $G_{\mathsf{vis}}(S^\star)$.

Aufgabe 2

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

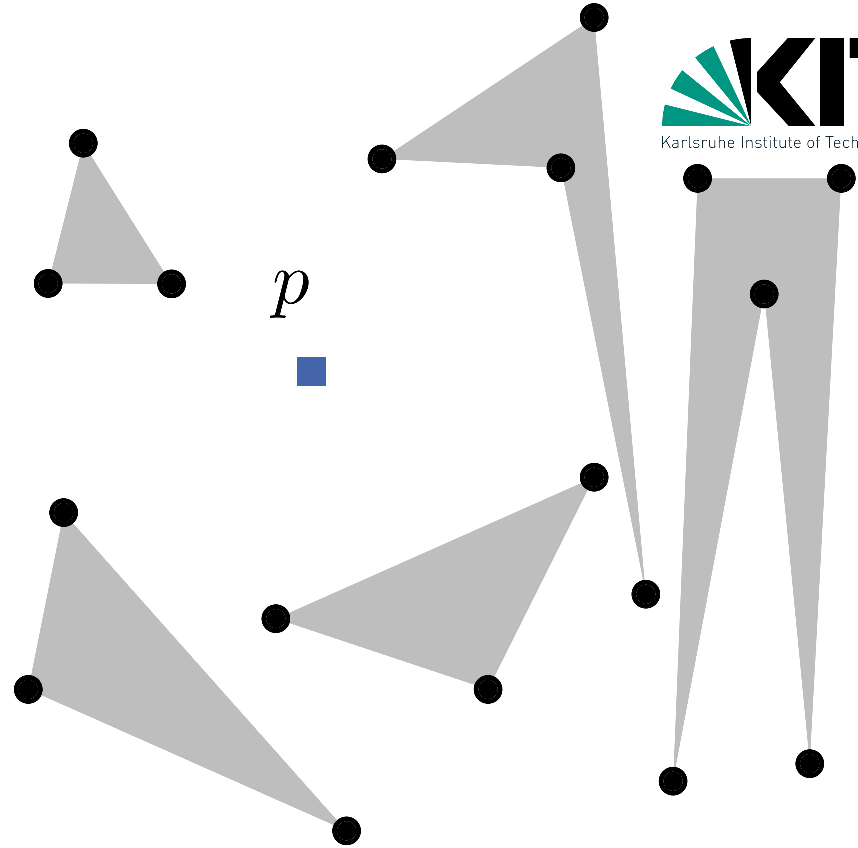
Input: Menge disjunkter Polygone S

Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

```
E ← ∅
foreach v ∈ V(S) do
    W ← VisibleVertices(v, S)
    E ← E ∪ {vw | w ∈ W}
return E
```

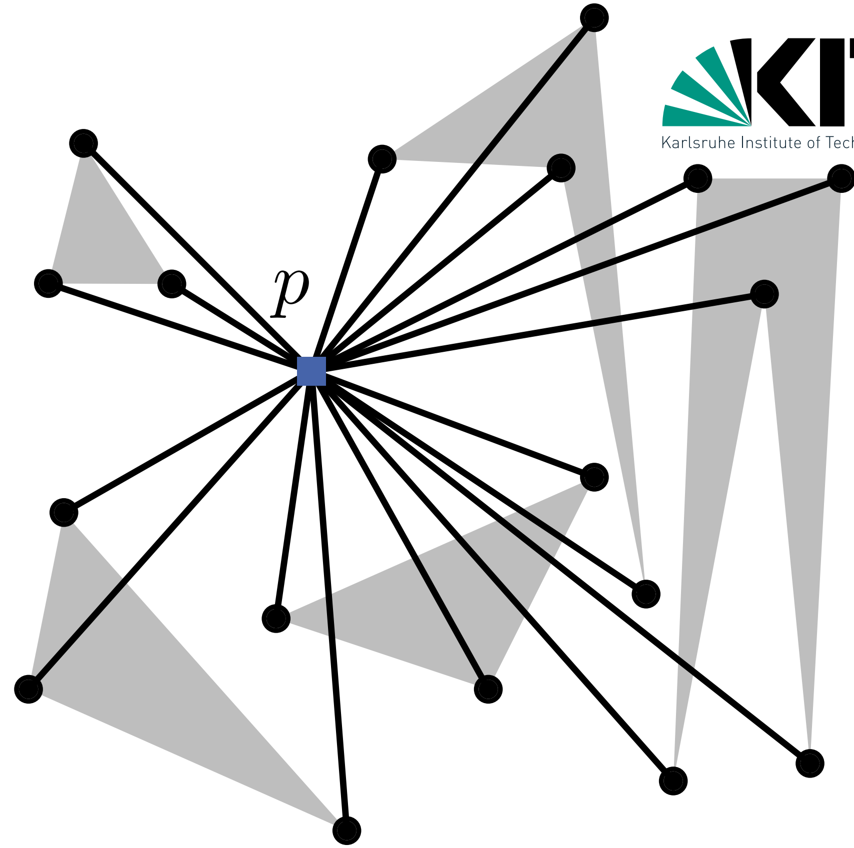
Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)



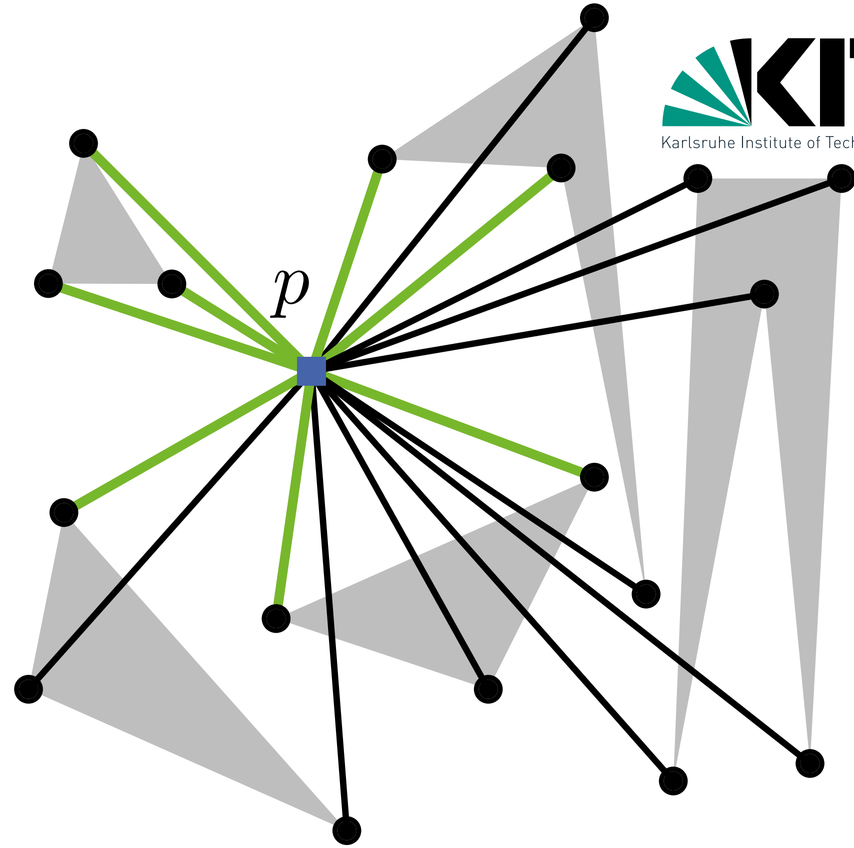
Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)



Sichtbare Knoten berechnen

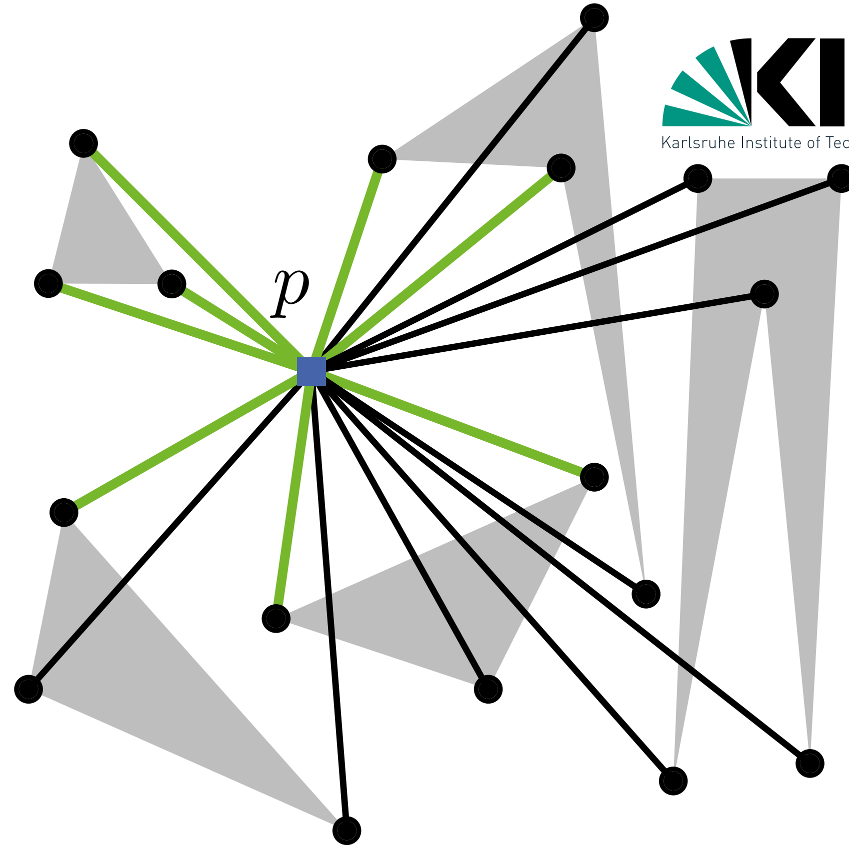
VisibleVertices(p, S)



Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)

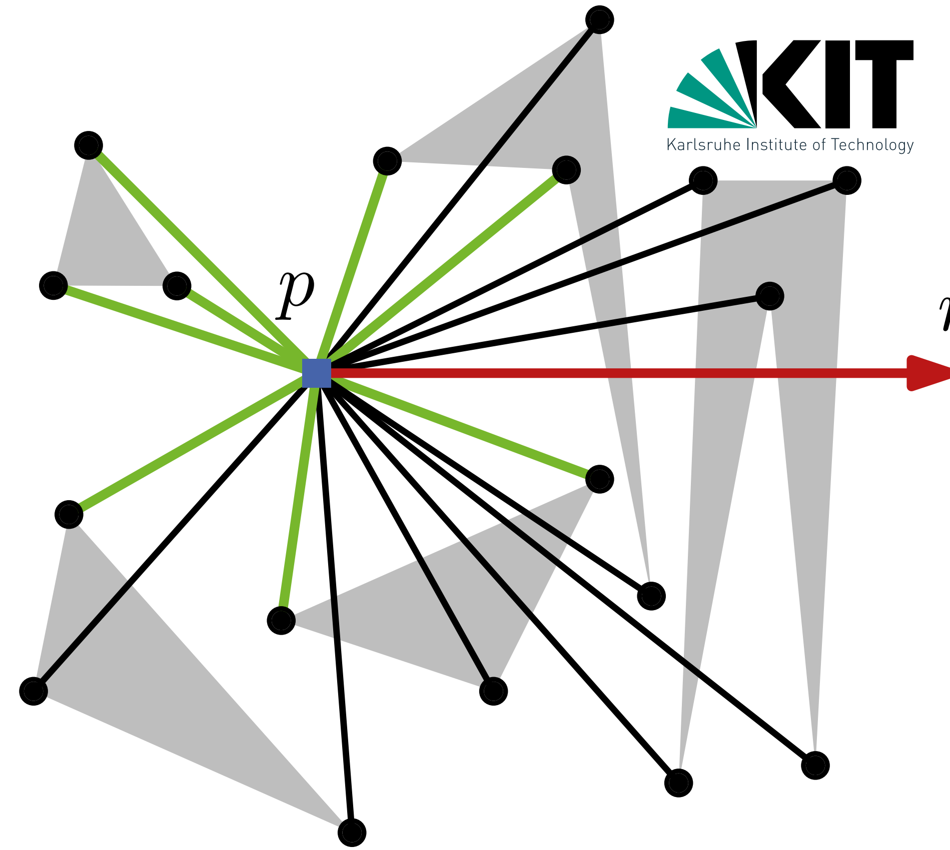
Aufgabe: Gegeben p und S finde in $O(n \log n)$ Zeit alle von p aus sichtbaren Knoten in $V(S)$!



Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)

$$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$$

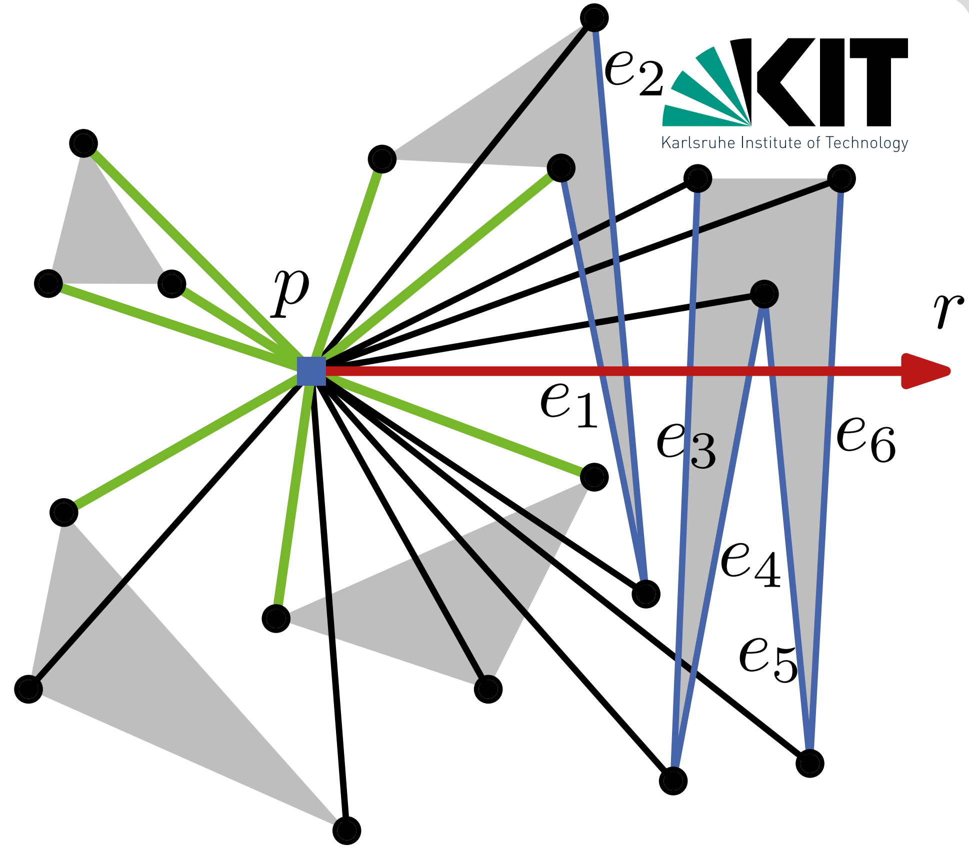


Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)

$$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$$

$$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$$



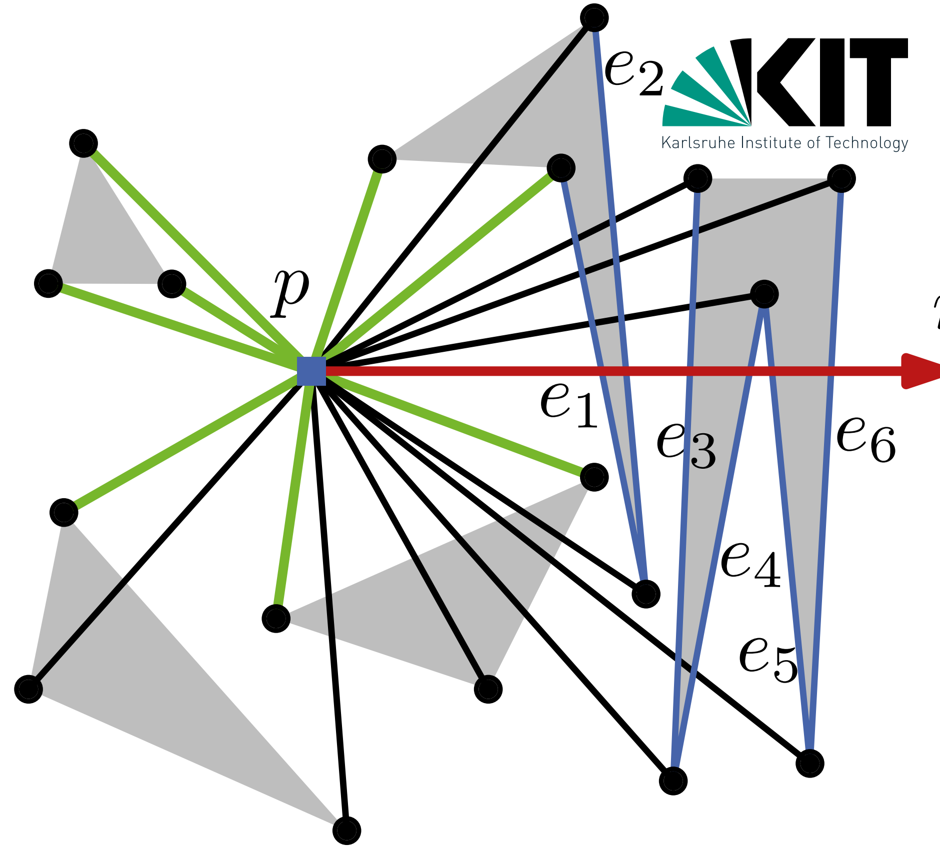
Sichtbare Knoten berechnen

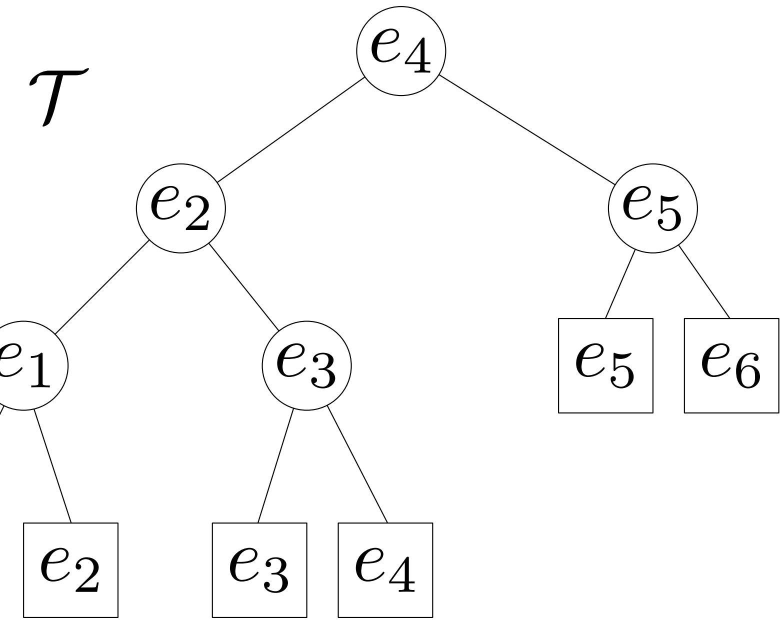
VisibleVertices(p, S)

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)





Sichtbare Knoten berechnen

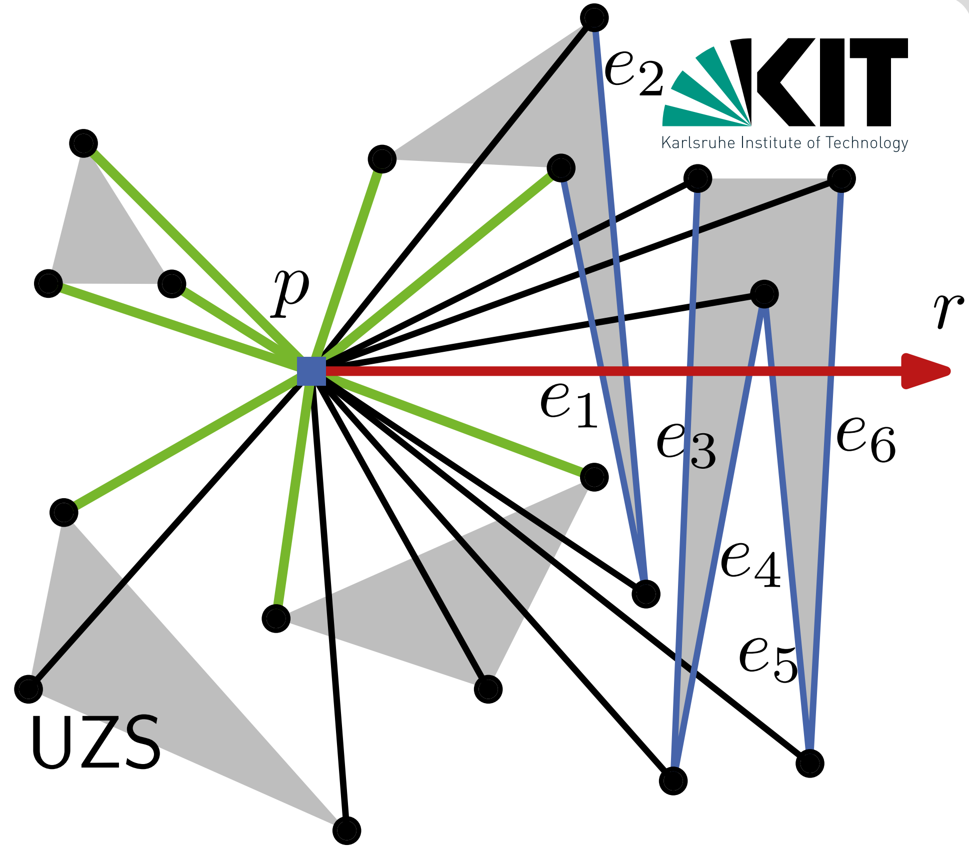
VisibleVertices(p, S)

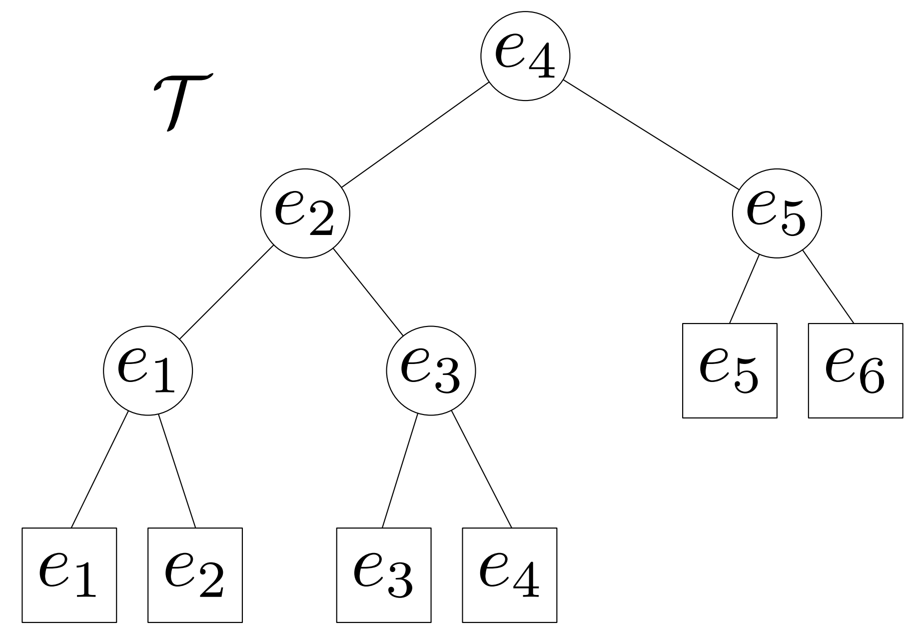
$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS





Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

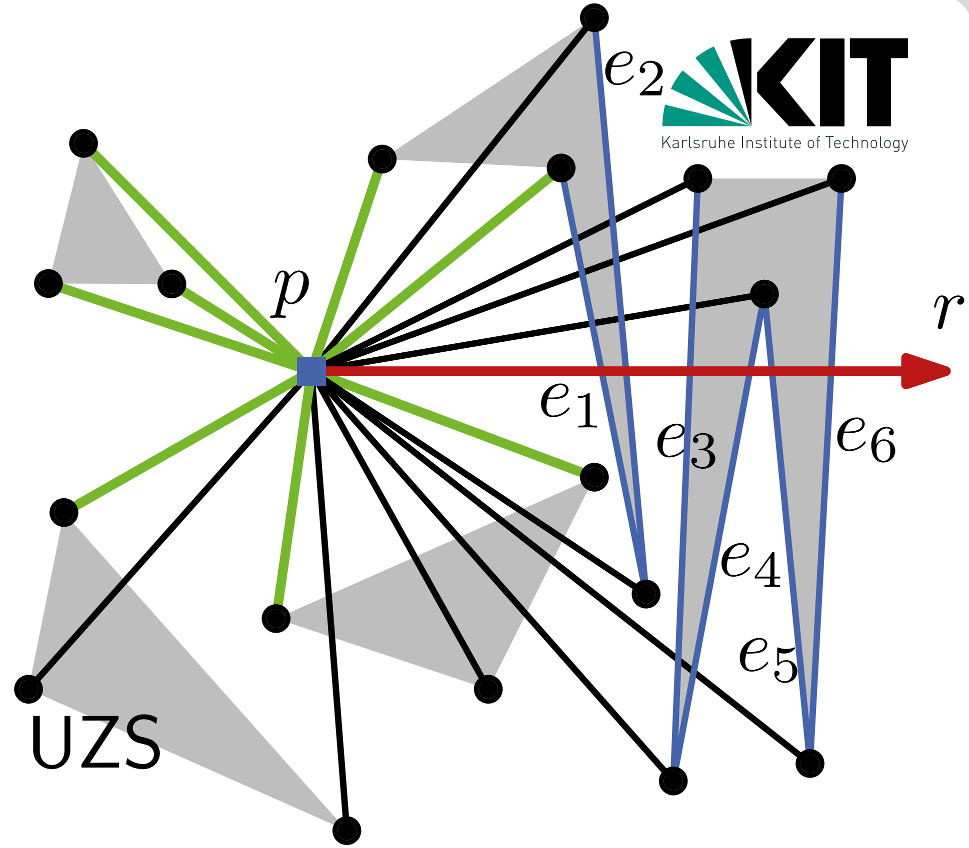
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

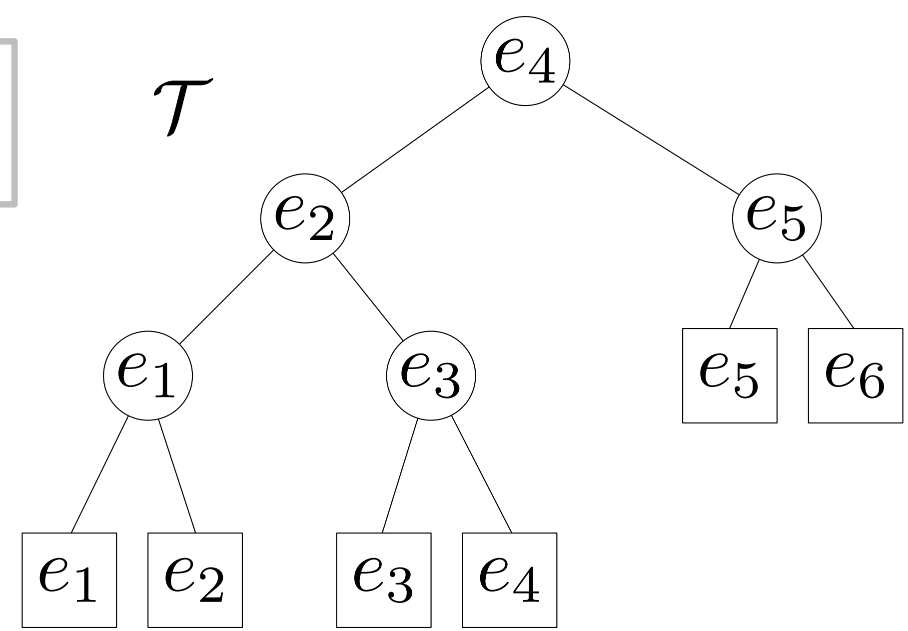
$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$v \prec v' :\Leftrightarrow$

$\angle v < \angle v'$ or
$(\angle v = \angle v'$ and $|pv| < |pv'|)$





Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

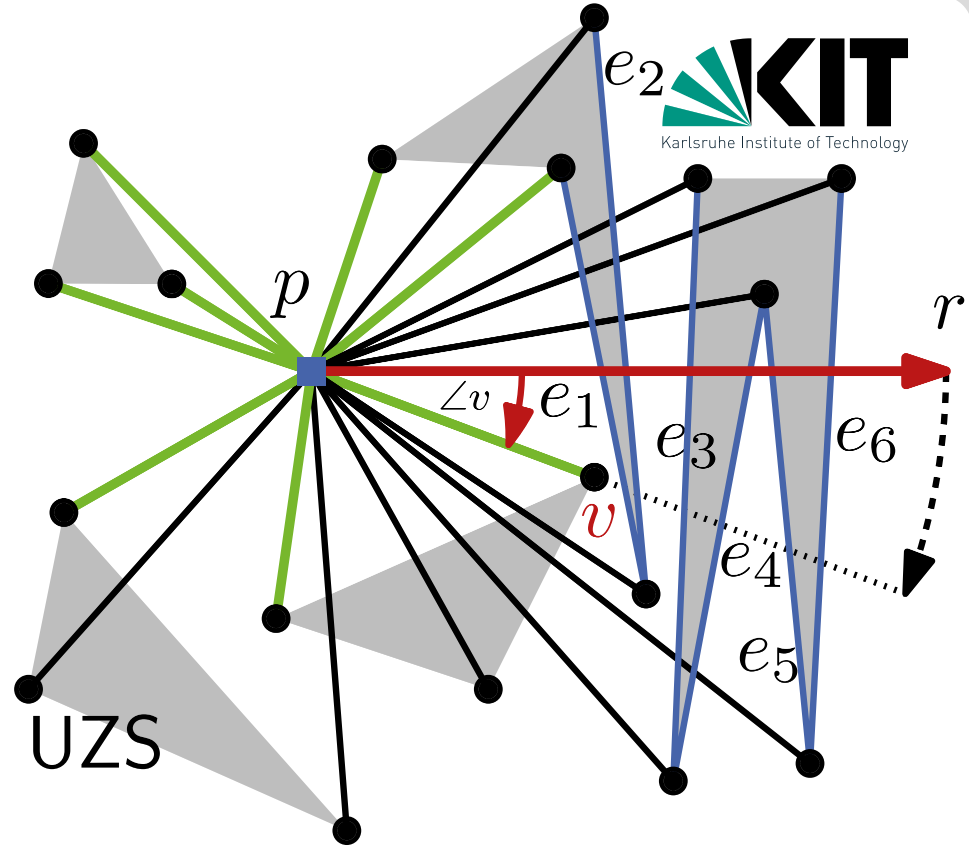
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

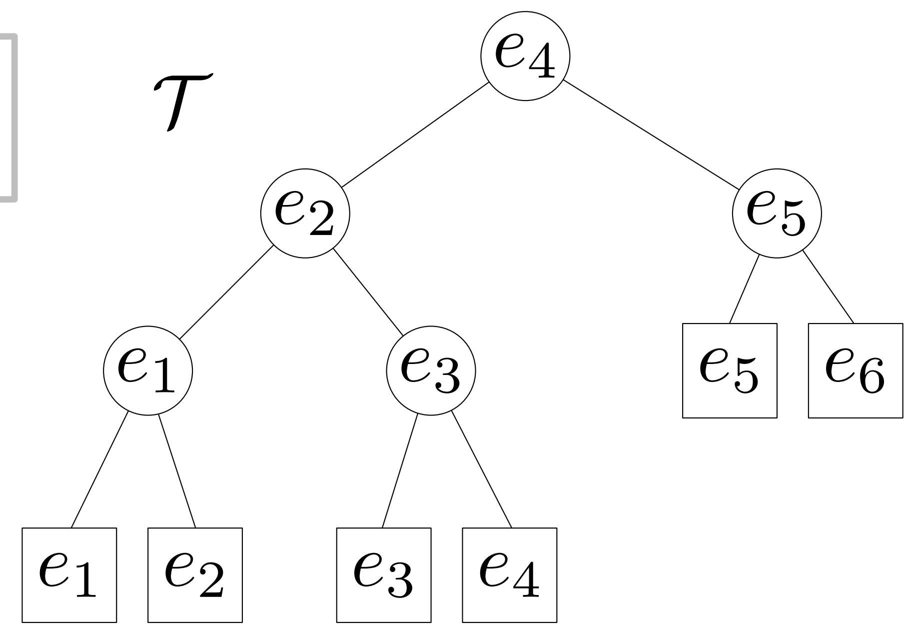
$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$v \prec v' :\Leftrightarrow$

$\angle v < \angle v'$ or
$(\angle v = \angle v'$ and $|pv| < |pv'|)$





Sichtbare Knoten berechnen

VisibleVertices(p, S)

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

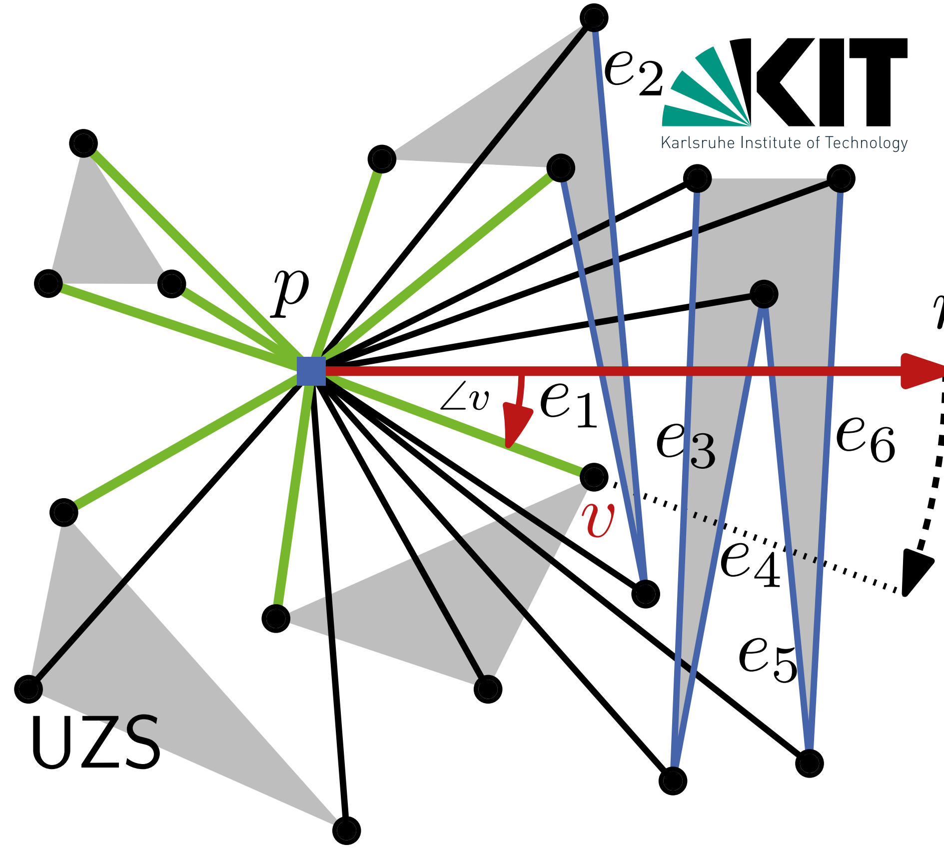
$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow$ balancedBinaryTree(I)

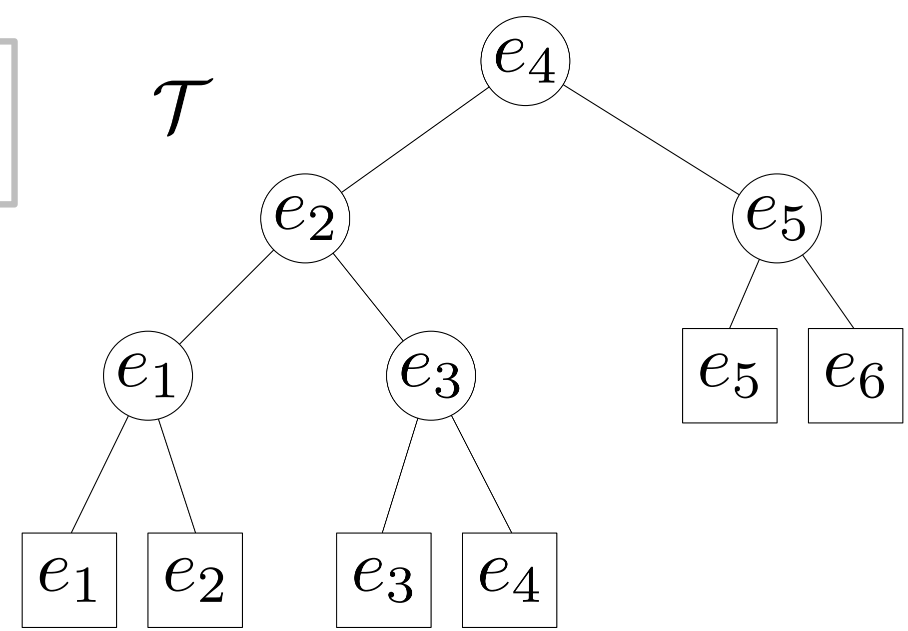
$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$v \prec v' :\Leftrightarrow$

$\angle v < \angle v'$ or
$(\angle v = \angle v'$ and $|pv| < |pv'|)$



$\mathcal{T}$



Sweep-Verfahren mit Rotation

Aufgabe 2

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

Input: Menge disjunkter Polygone S

Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

$E \leftarrow \emptyset$

foreach $v \in V(S)$ **do**

  $W \leftarrow \textsc{VisibleVertices}(v, S)$

  $E \leftarrow E \cup \{vw \mid w \in W\}$

return E

Aufgabe 2

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

Input: Menge disjunkter Polygone S
Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

```
1 E ← ∅
2 foreach v ∈ V(S) do
3     W ← VisibleVertices(v, S)
4     E ← E ∪ {vw | w ∈ W}
5 return E
```

Beobachtung: $\textsc{VisibleVertices}$ wird n mal aufgerufen

Aufgabe 2

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

Input: Menge disjunkter Polygone S
Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

$E \leftarrow \emptyset$
foreach $v \in V(S)$ **do**
    $W \leftarrow \textsc{VisibleVertices}(v, S)$
    $E \leftarrow E \cup \{vw \mid w \in W\}$
return E

Beobachtung: $\textsc{VisibleVertices}$ wird n mal aufgerufen
$\textsc{VisibleVertices}$ in $O(n \log n)$

Aufgabe 2

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

Input: Menge disjunkter Polygone S
Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

$E \leftarrow \emptyset$
foreach $v \in V(S)$ **do**
    $W \leftarrow \textsc{VisibleVertices}(v, S)$
    $E \leftarrow E \cup \{vw \mid w \in W\}$
return E

Beobachtung: $\textsc{VisibleVertices}$ wird n mal aufgerufen
$\textsc{VisibleVertices}$ in $O(n \log n)$
Gesamtlaufzeit: $O(n^2 \log n)$

Aufgabe 2

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

Input: Menge disjunkter Polygone S
Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

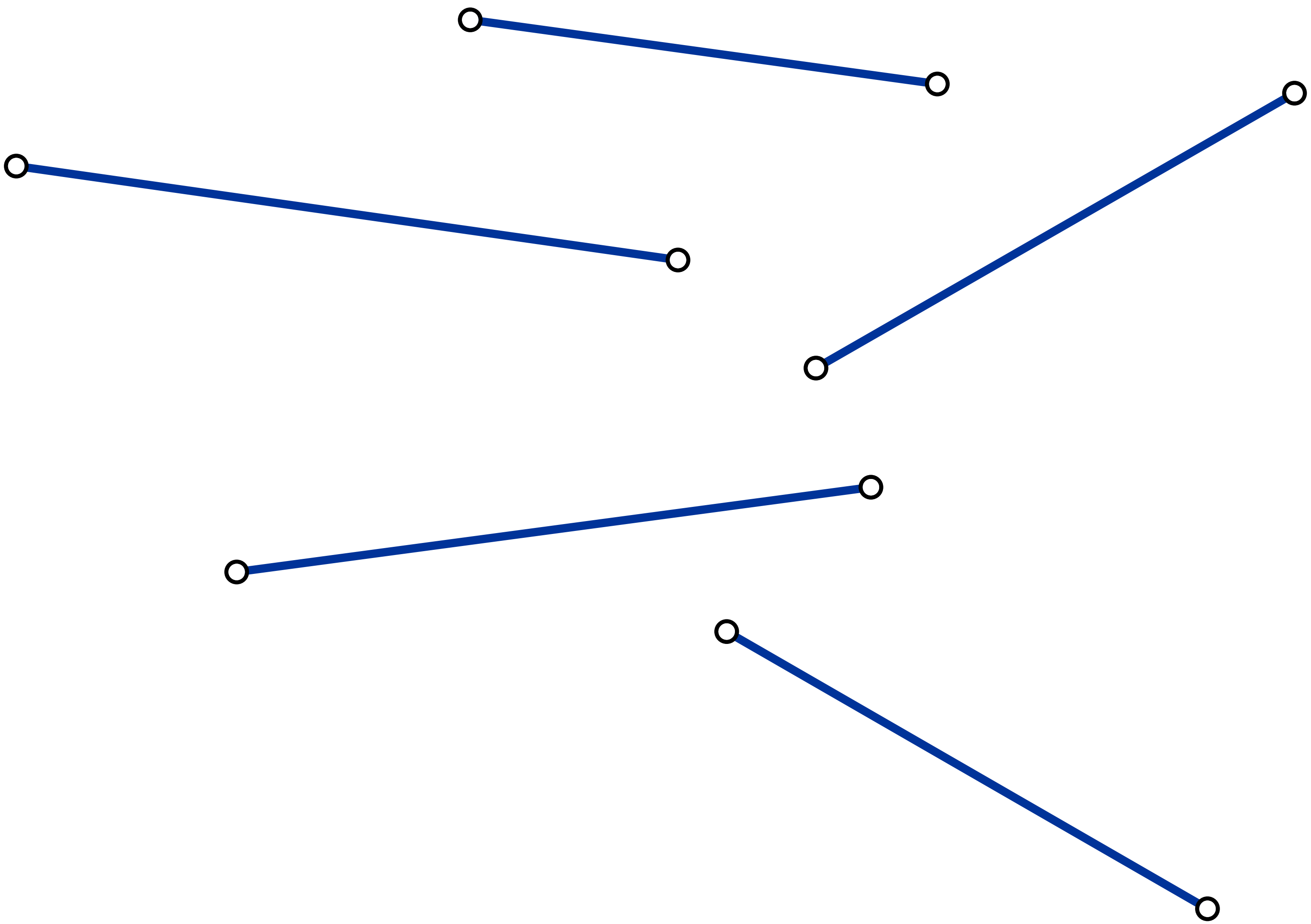
$E \leftarrow \emptyset$
foreach $v \in V(S)$ **do**
  $W \leftarrow \textsc{VisibleVertices}(v, S)$
  $E \leftarrow E \cup \{vw \mid w \in W\}$
return E

Beobachtung: $\textsc{VisibleVertices}$ wird n mal aufgerufen
$\textsc{VisibleVertices}$ in $O(n \log n)$
Gesamtlaufzeit: $O(n^2 \log n)$

Q: Wie $\textsc{VisibiltyGraph}$ in $O(n^2)$?
Hinweis: Nutze Dualität

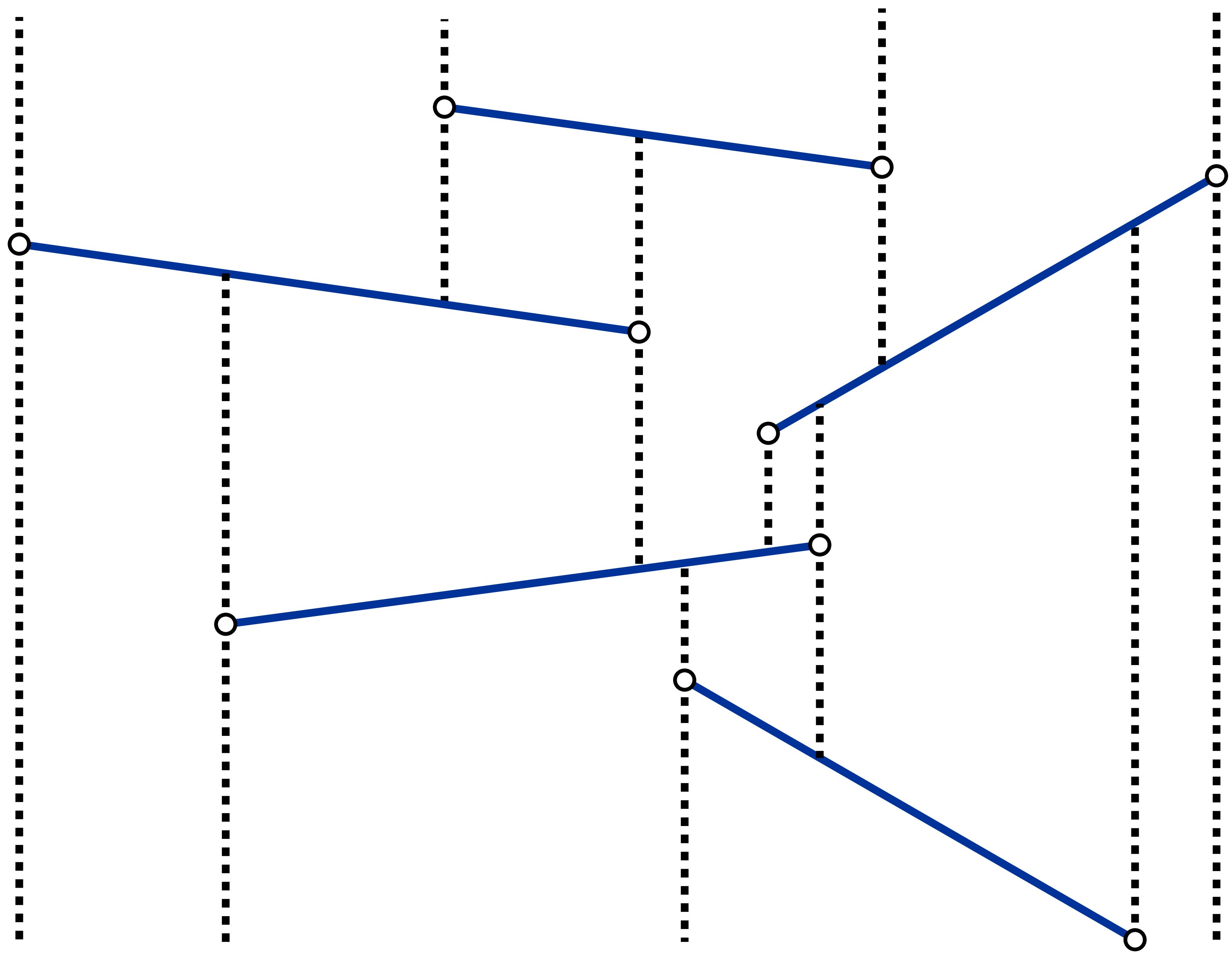
Aufgabe 2

Trapezzerlegung



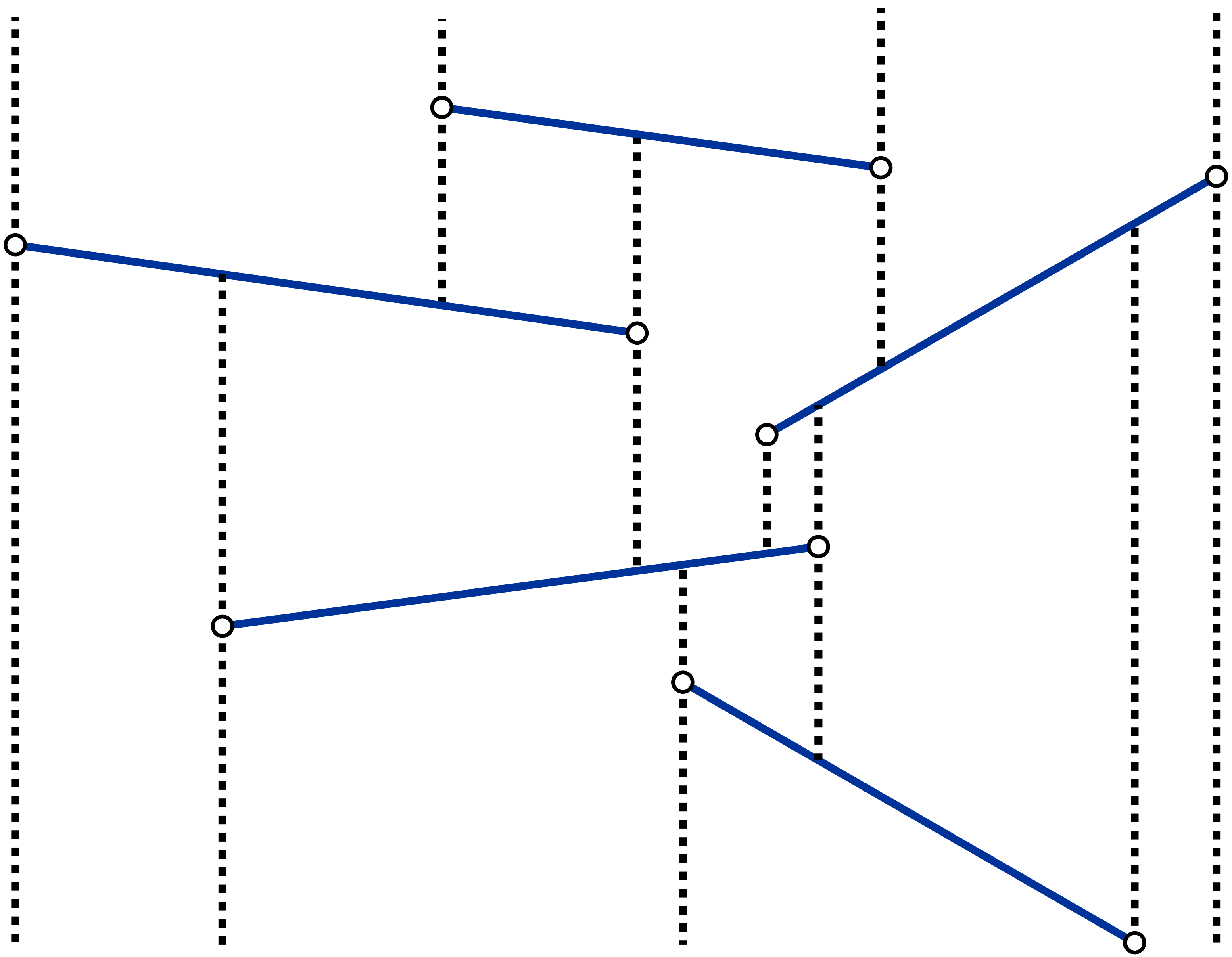
Aufgabe 2

Trapezzerlegung



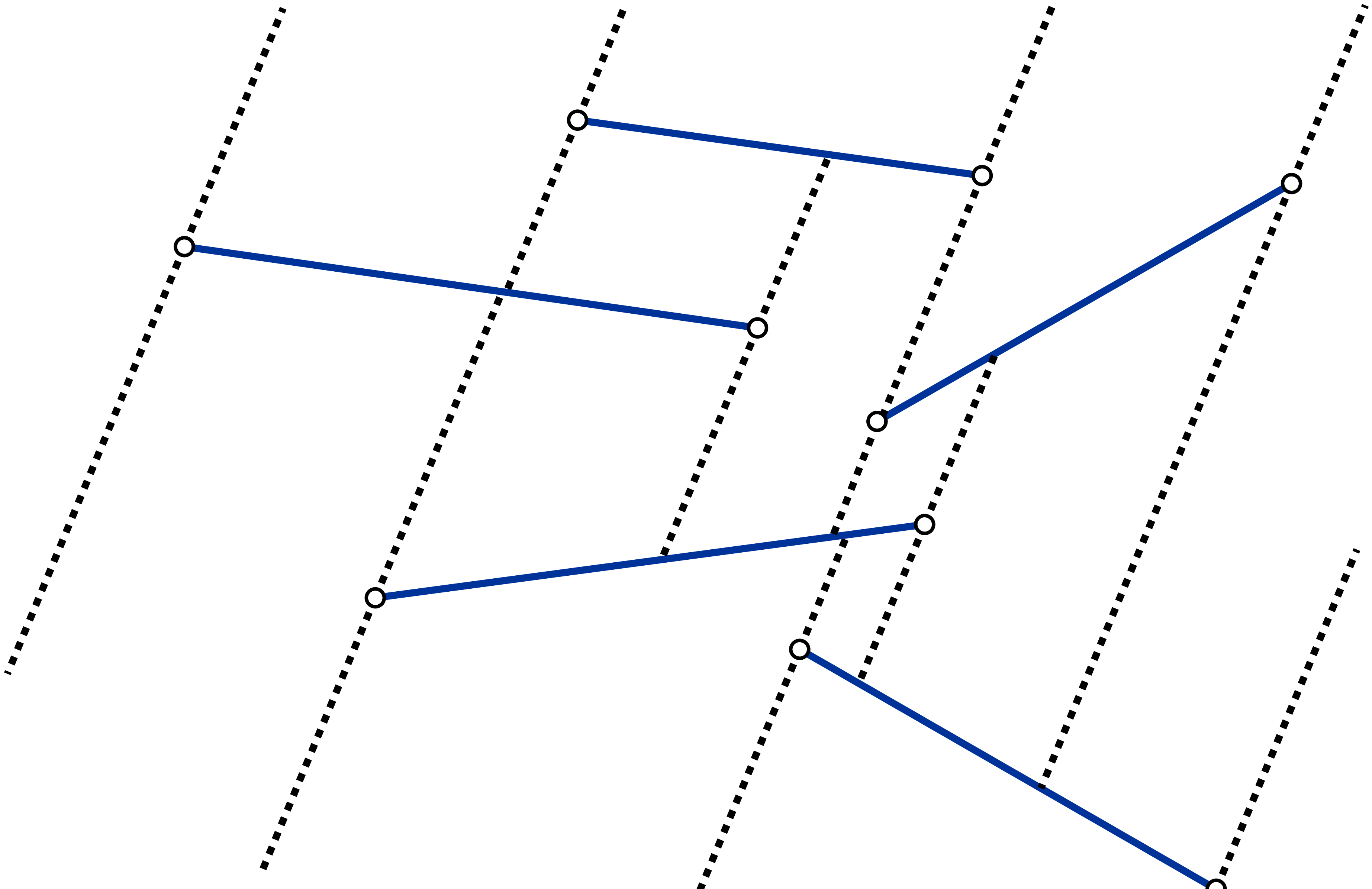
Aufgabe 2

Trapezzerlegung $\rightsquigarrow$ Sichtbarkeit Punkte zu Segmente



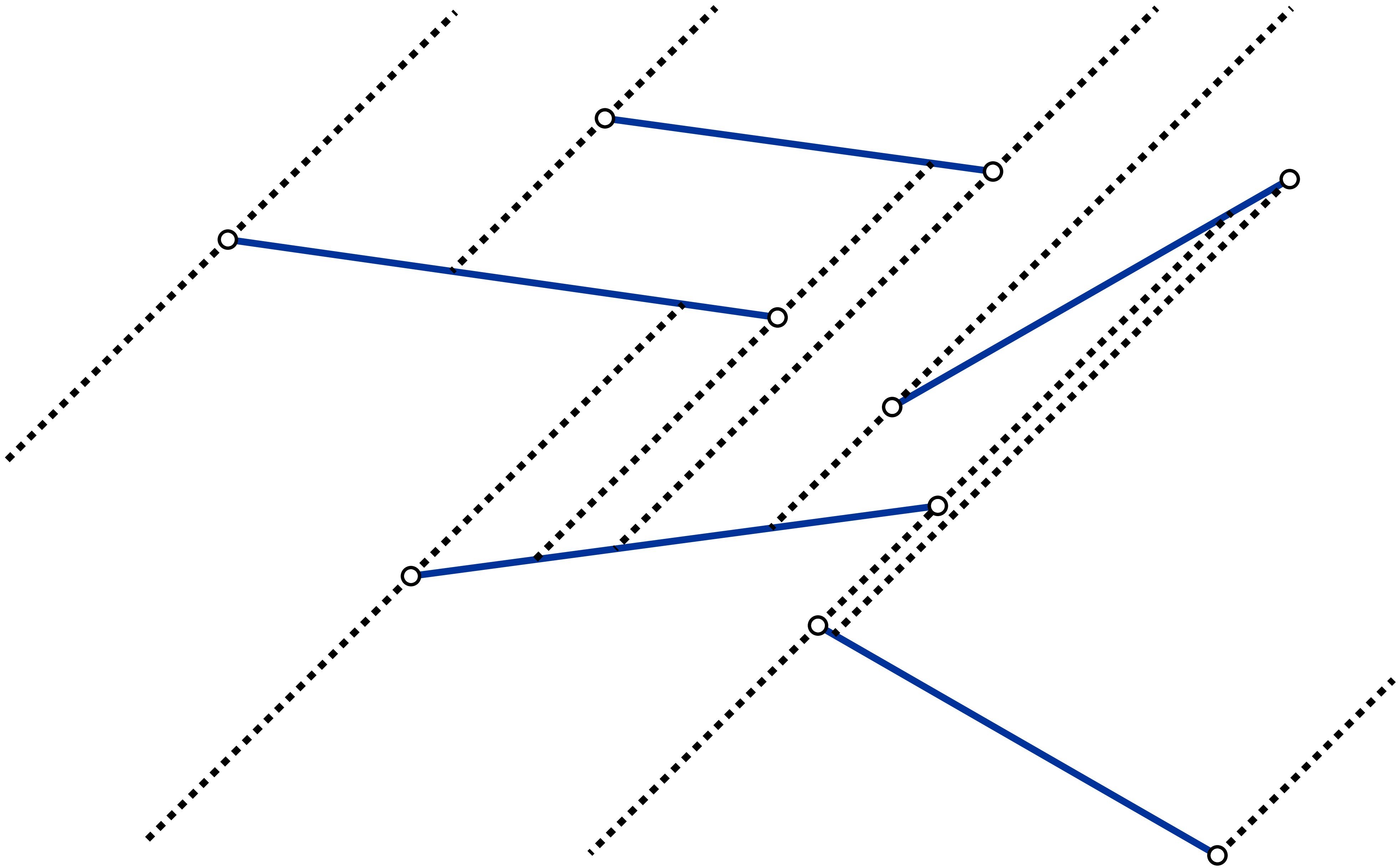
Aufgabe 2

Trapezzerlegung $\rightsquigarrow$ Sichtbarkeit Punkte zu Segmente



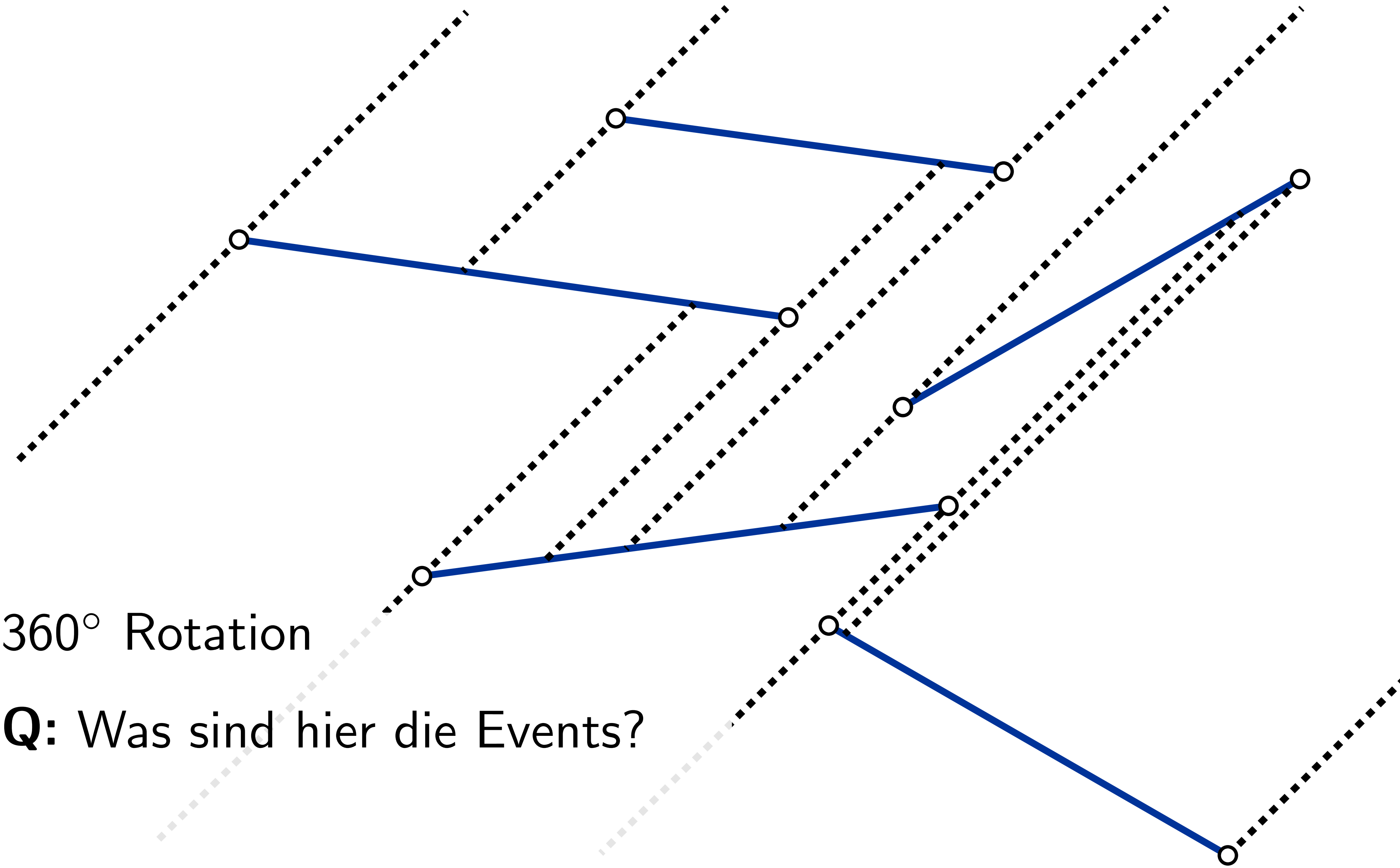
Aufgabe 2

Trapezzerlegung $\rightsquigarrow$ Sichtbarkeit Punkte zu Segmente



Aufgabe 2

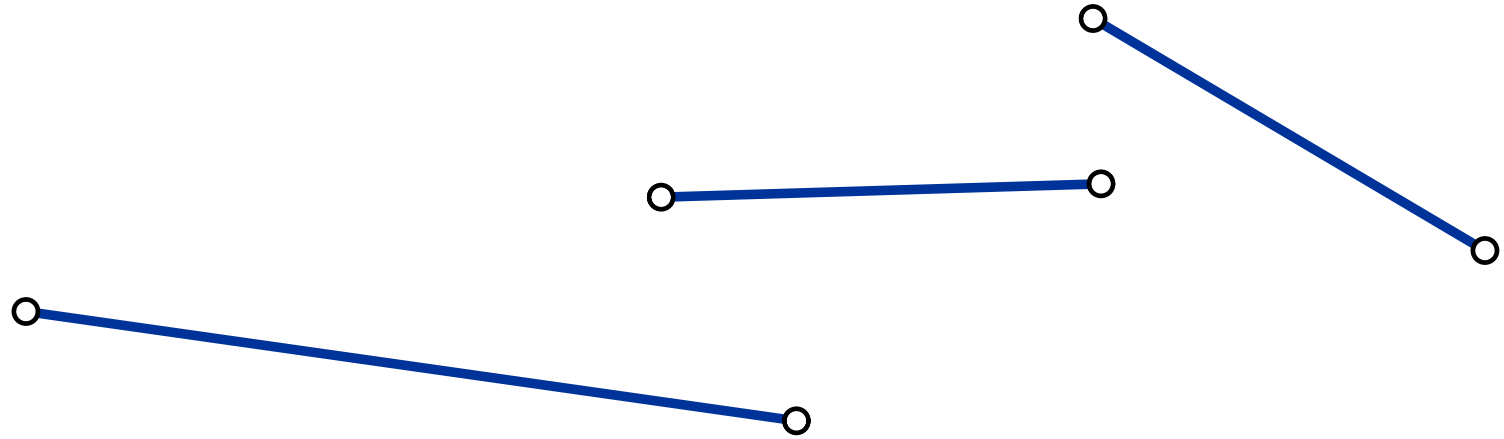
Trapezzerlegung $\rightsquigarrow$ Sichtbarkeit Punkte zu Segmente



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

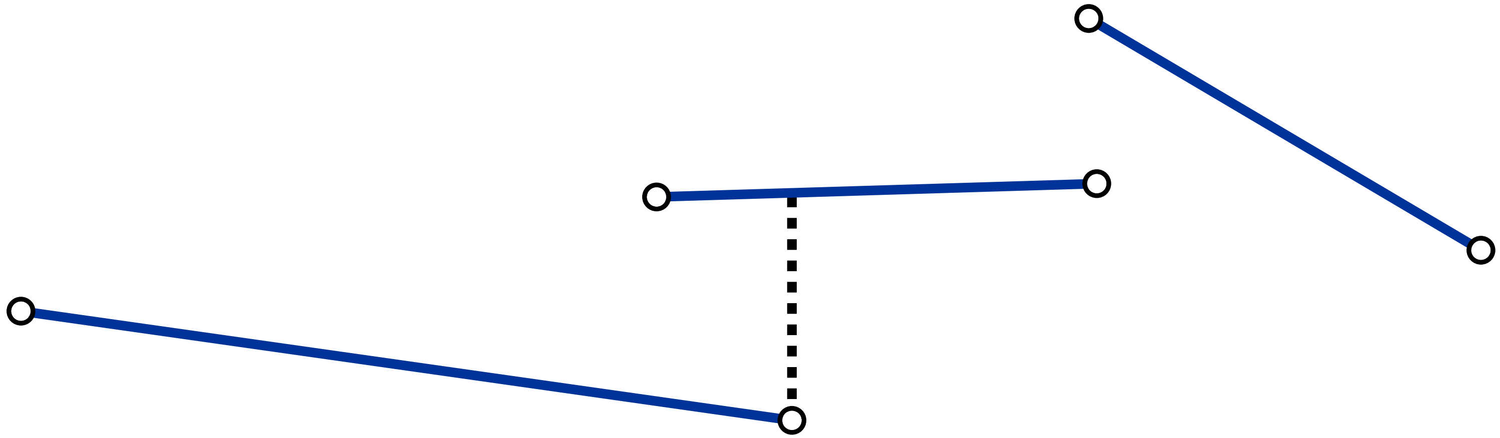
Aufgabe 2



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

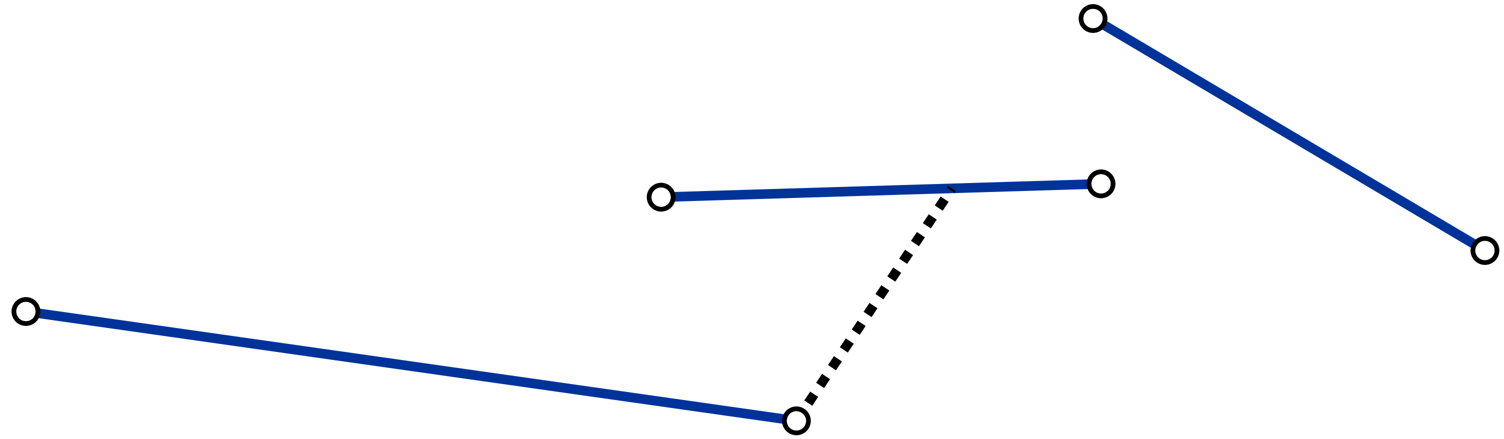
Aufgabe 2



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

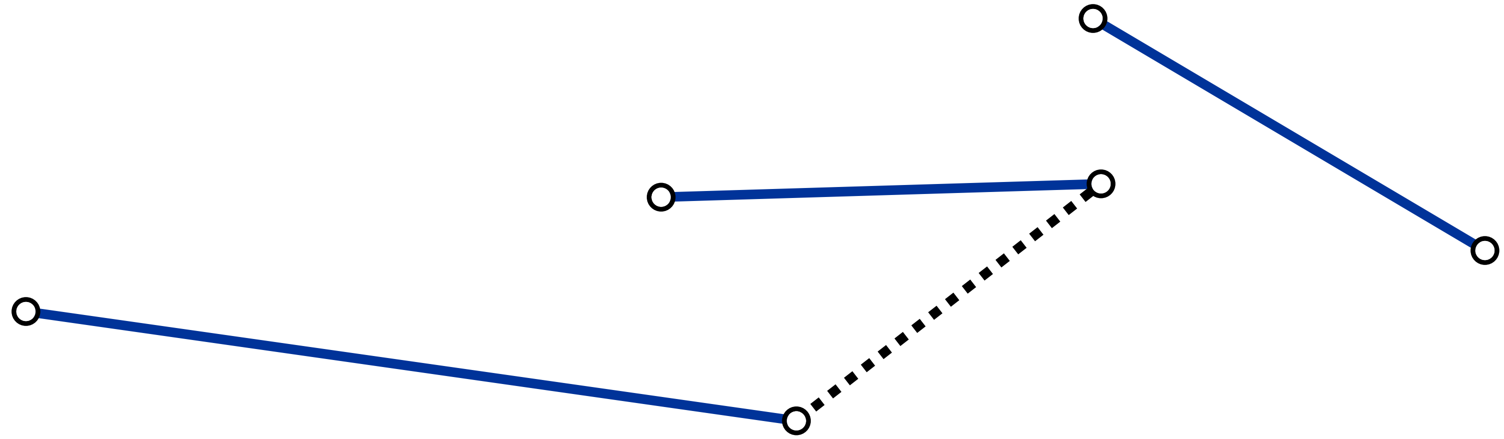
Aufgabe 2



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

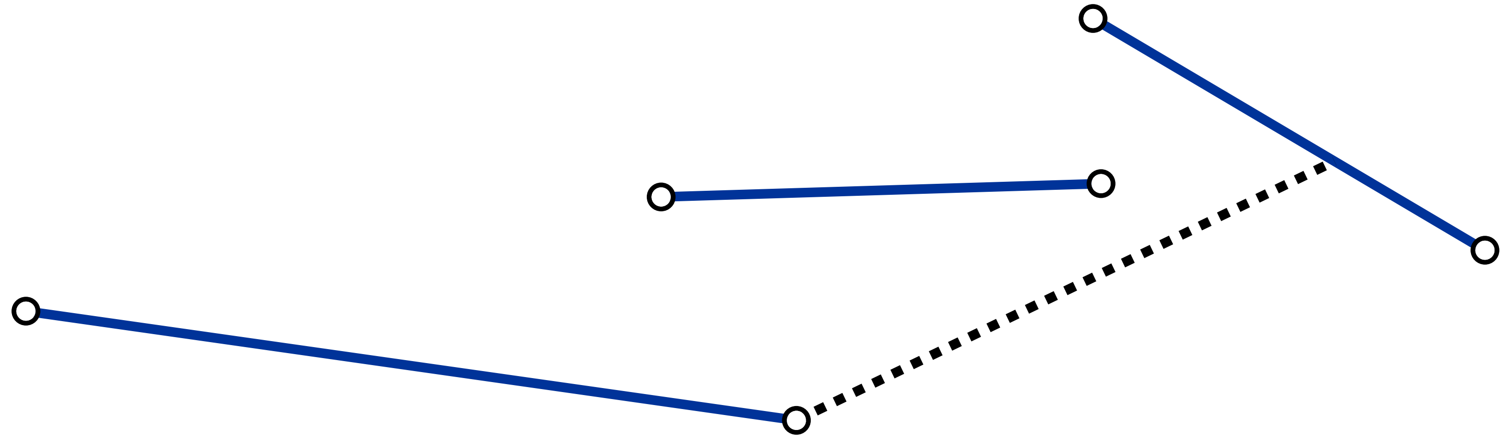
Aufgabe 2



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

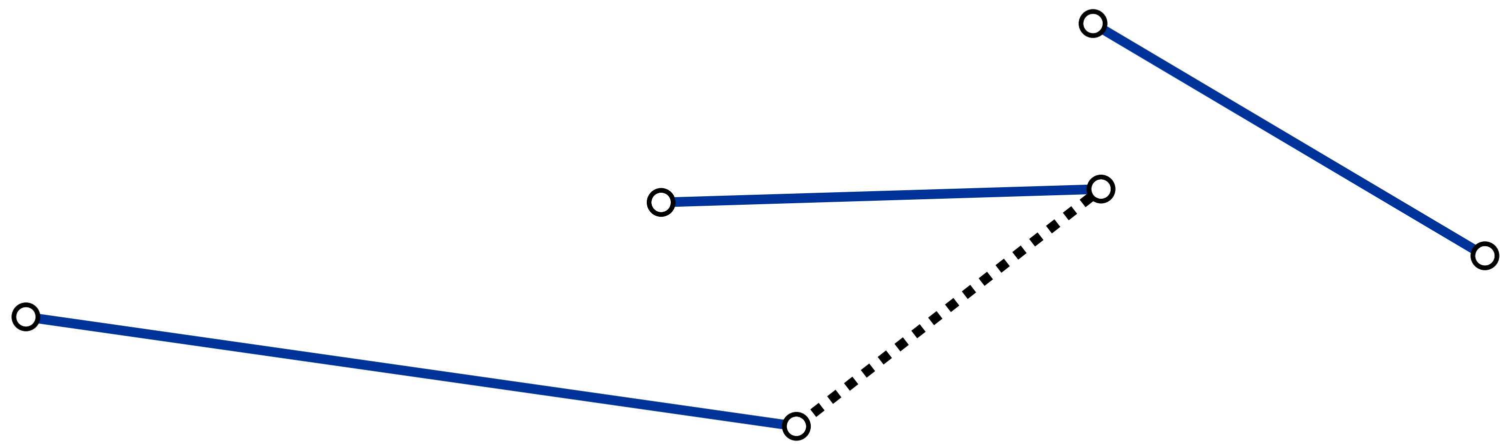
Aufgabe 2



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

Aufgabe 2

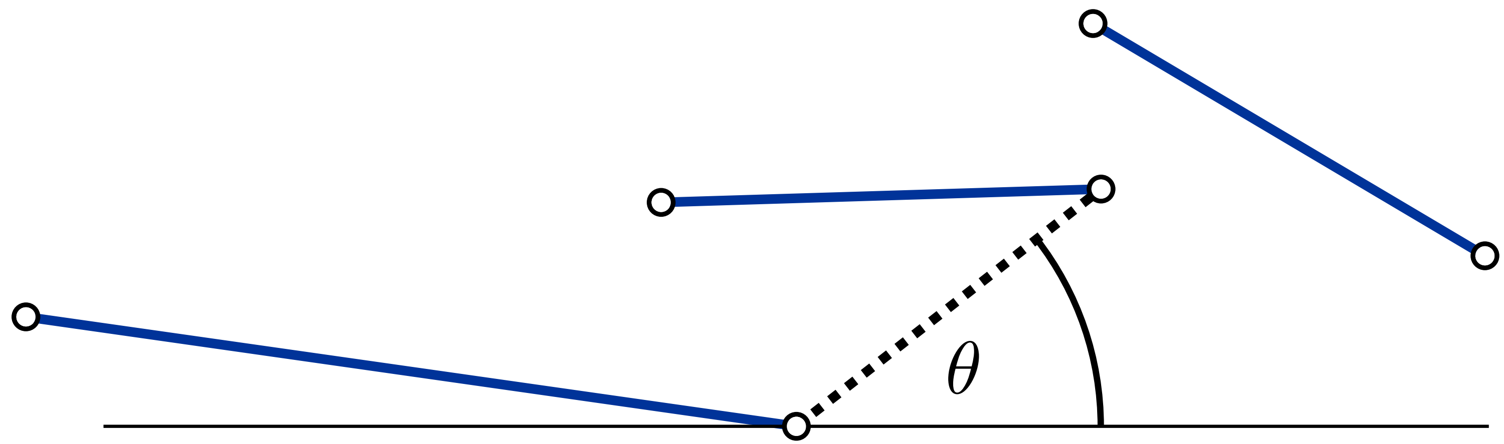


360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

A: Strahl trifft Knoten

Aufgabe 2

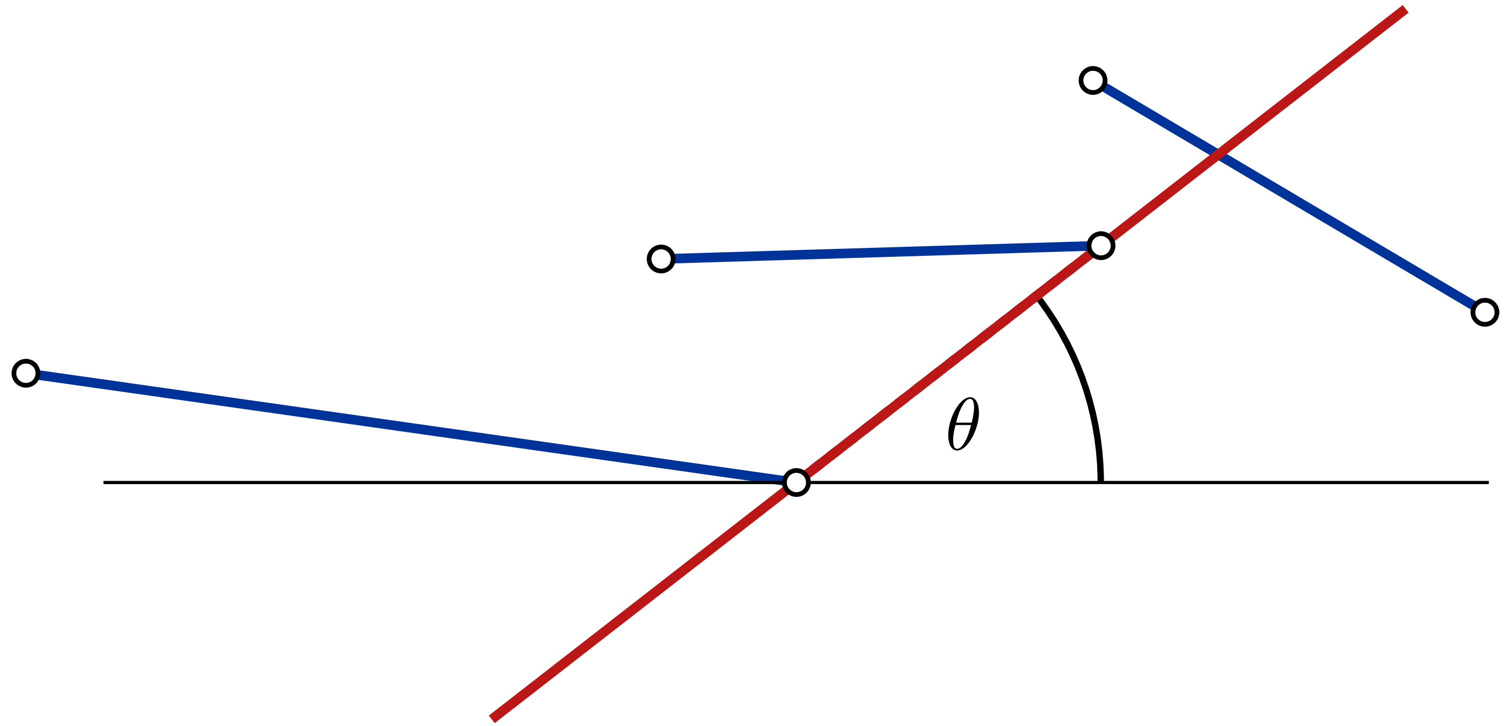


360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

A: Strahl trifft Knoten

Aufgabe 2

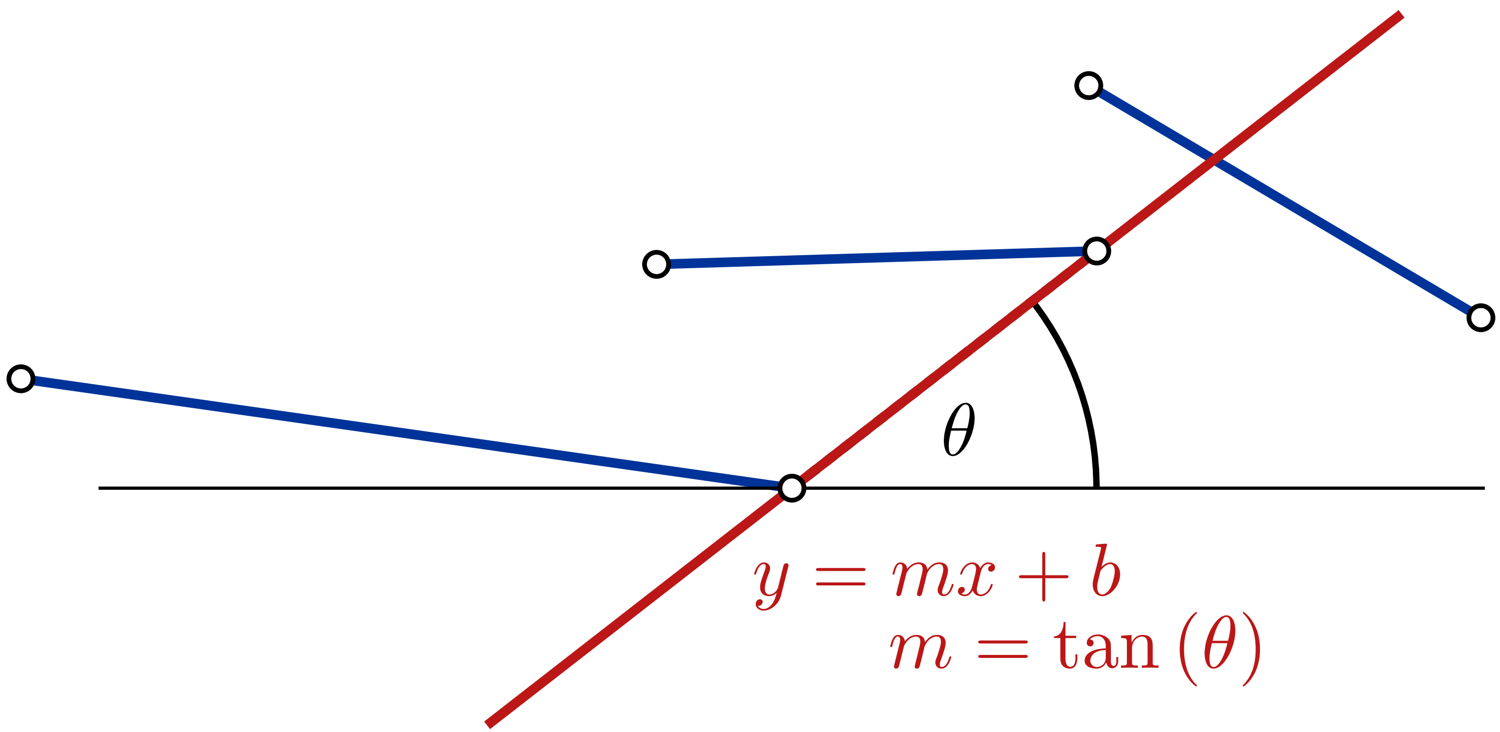


360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

A: Strahl trifft Knoten

Aufgabe 2



360° Rotation

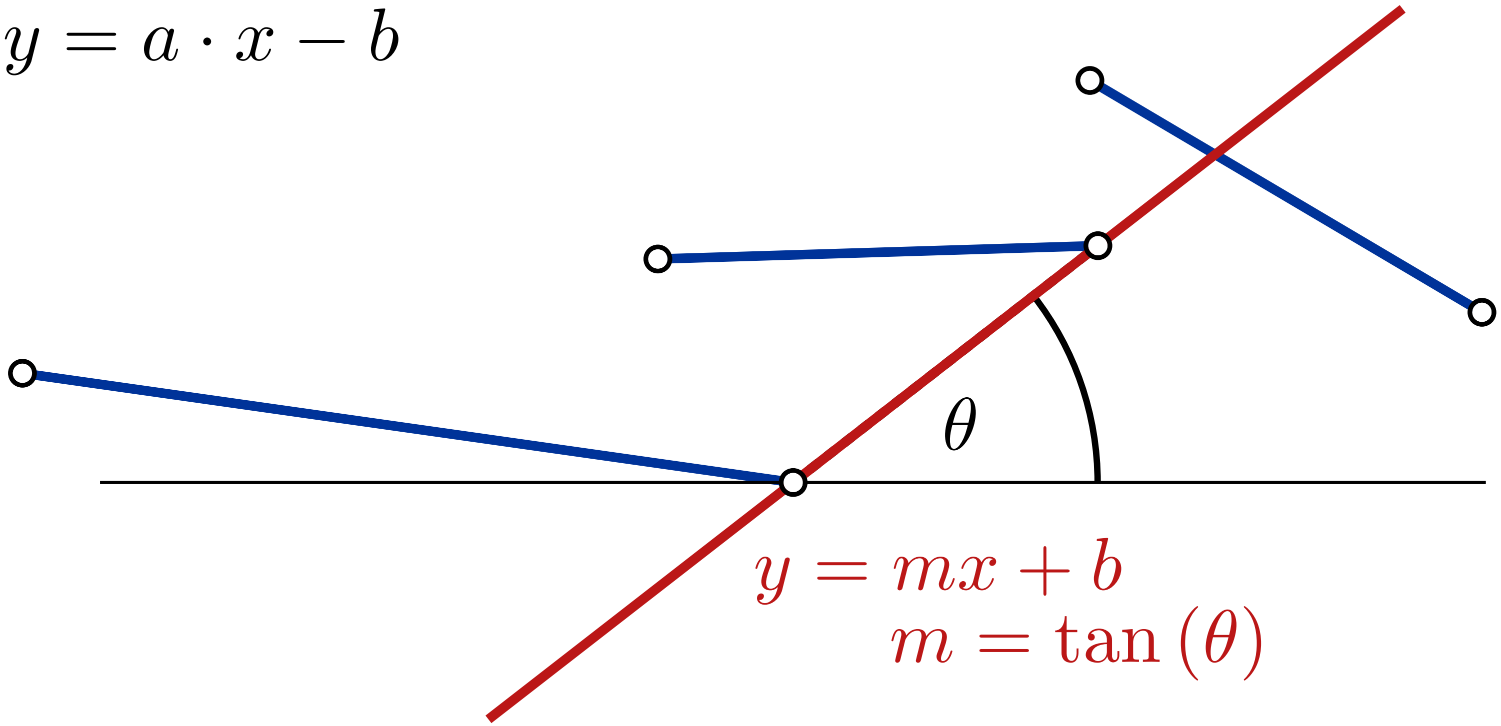
Q: Was sind hier die Events?

A: Strahl trifft Knoten

Aufgabe 2

Dualität:

$(a, b) \leftrightsquigarrow y = a \cdot x - b$



360° Rotation

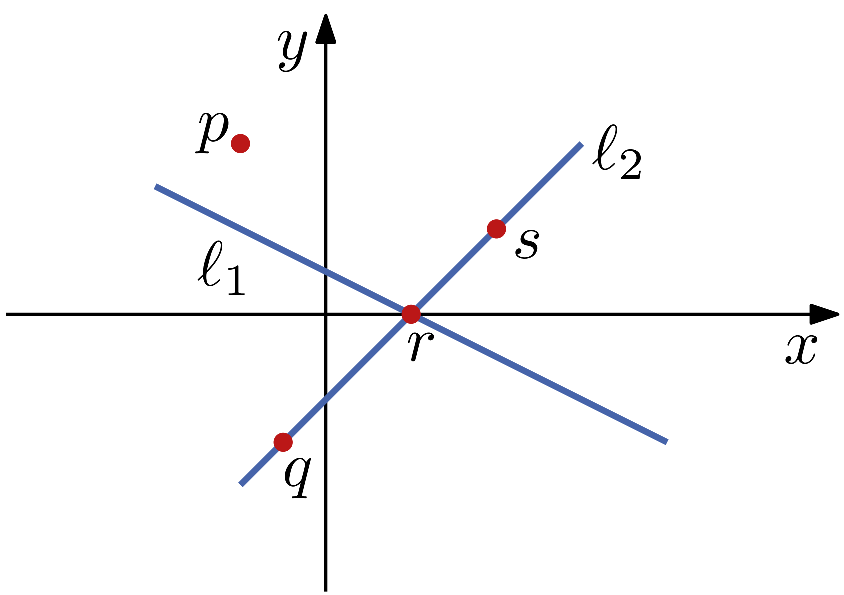
Q: Was sind hier die Events?

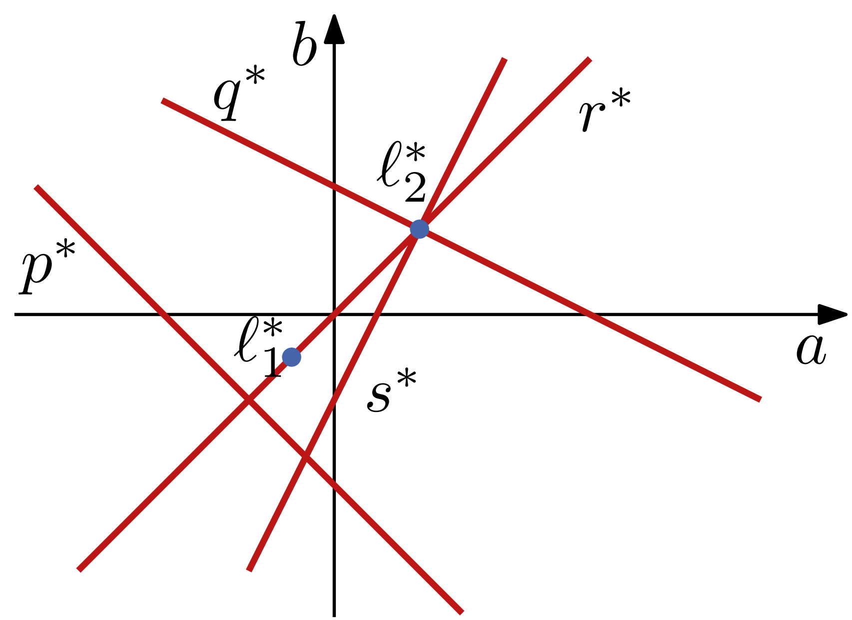
A: Strahl trifft Knoten

Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

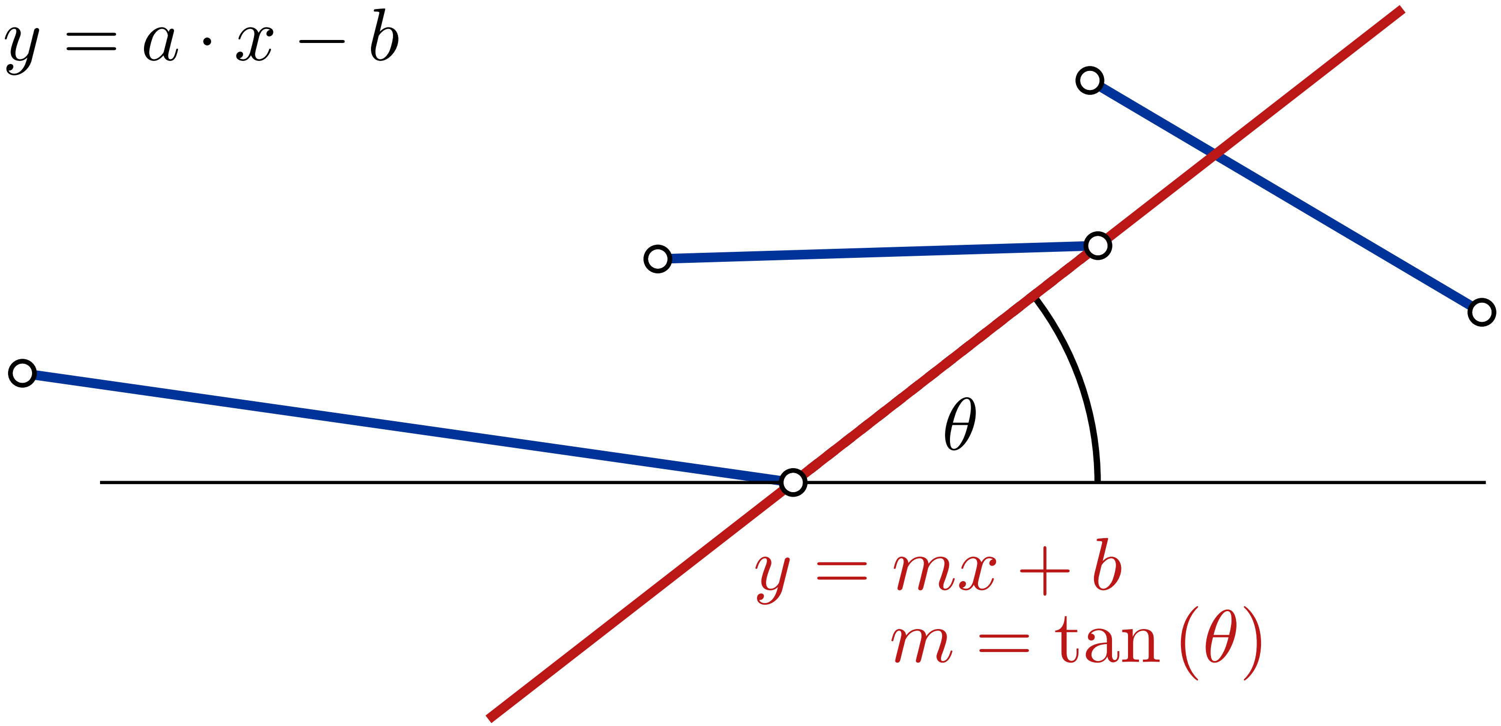




Aufgabe 2

Dualität:

$(a, b) \leftrightsquigarrow y = a \cdot x - b$



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

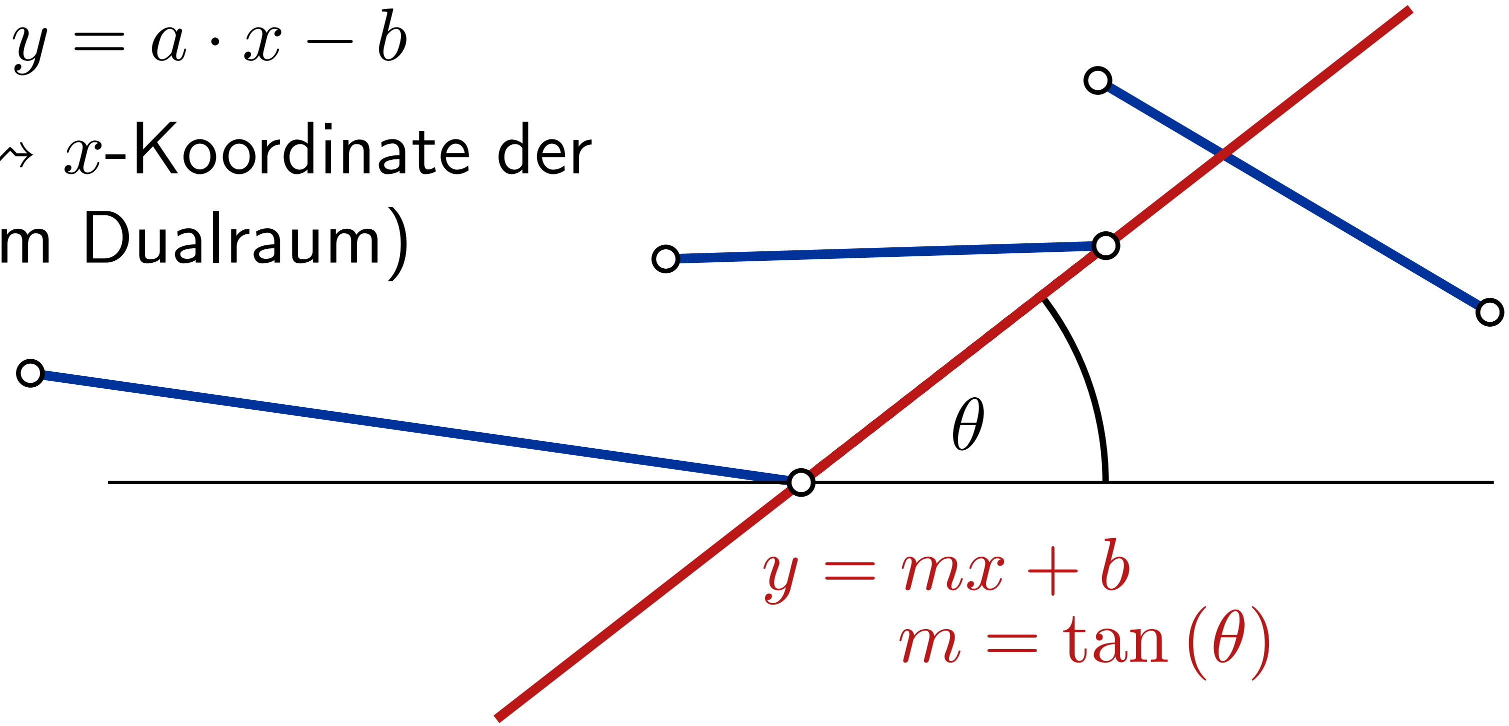
A: Strahl trifft Knoten

Aufgabe 2

Dualität:

$(a, b) \leftrightsquigarrow y = a \cdot x - b$

Events $\leftrightsquigarrow$ x-Koordinate der Punkte (im Dualraum)



360° Rotation

Q: Was sind hier die Events?

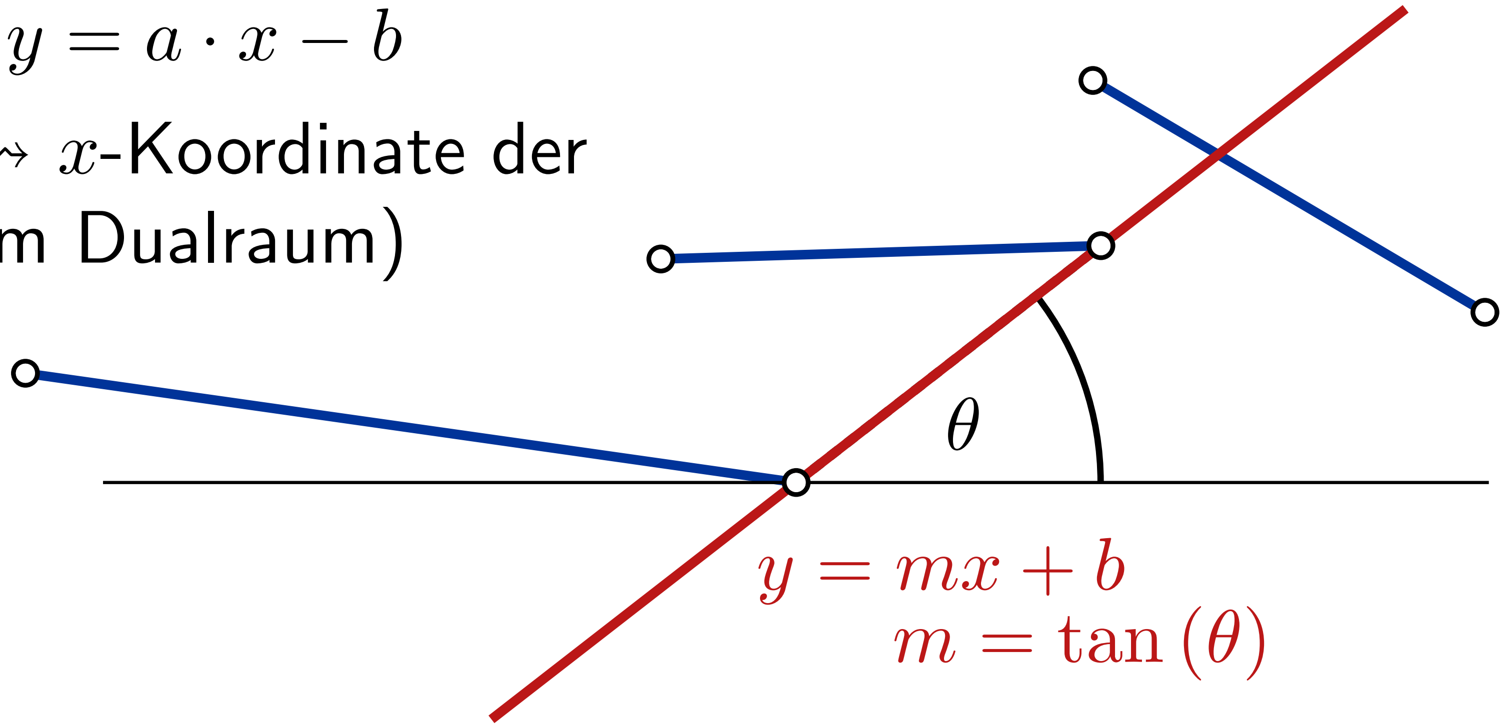
A: Strahl trifft Knoten

Aufgabe 2

Dualität:

$(a, b) \leftrightsquigarrow y = a \cdot x - b$

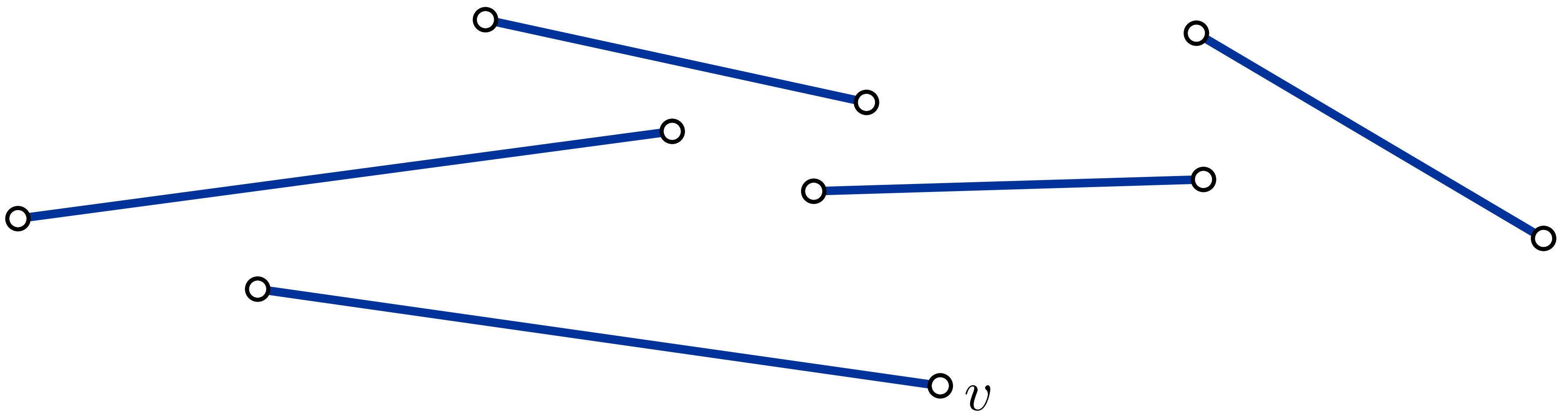
Events $\leftrightsquigarrow$ x-Koordinate der Punkte (im Dualraum)



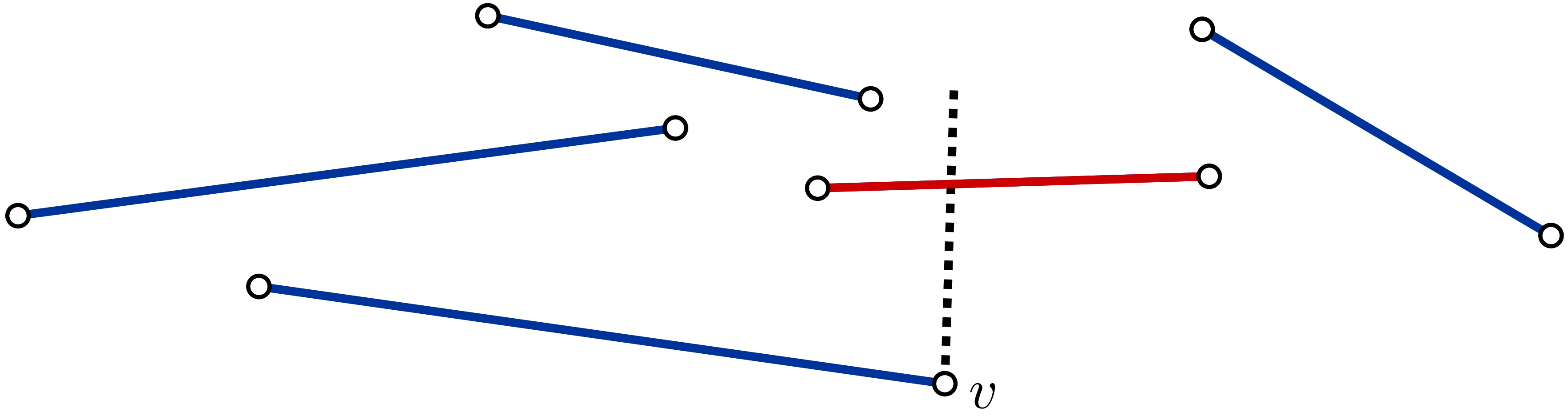
Vorgehen:

- Wandle alle Knoten der Polygone in Geraden um (Dualität)
- Sweepe von links nach rechts durch das Geradenarrangement
- Beim Sweep merke die Schnittpunkte der Geraden
- Sweep liefert Events sortiert nach Winkel in $O(n^2)$

Aufgabe 2

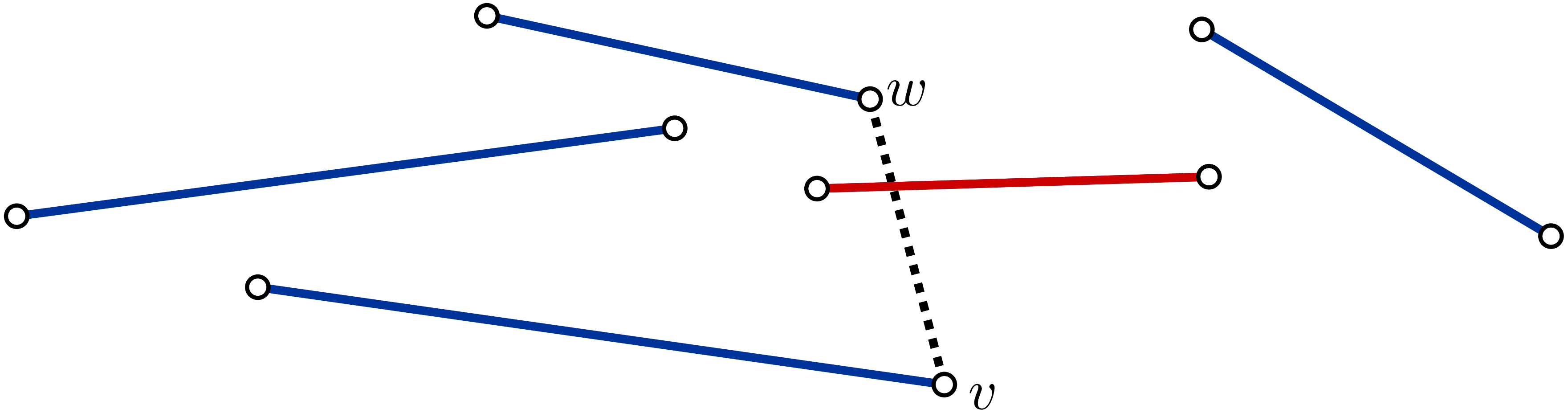


Aufgabe 2



- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Aufgabe 2

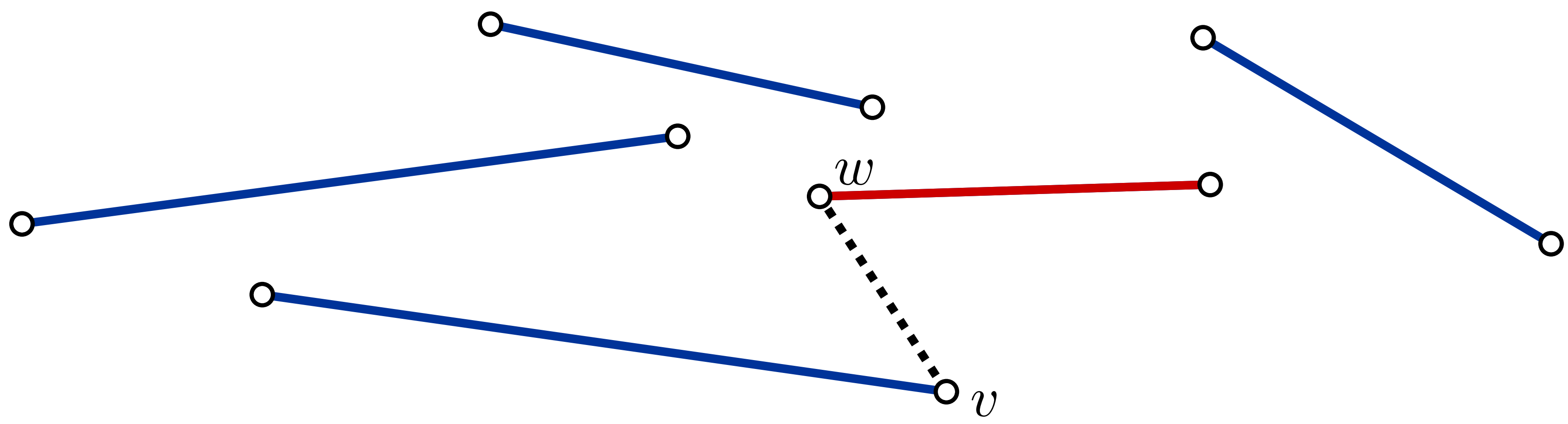


- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar

Aufgabe 2

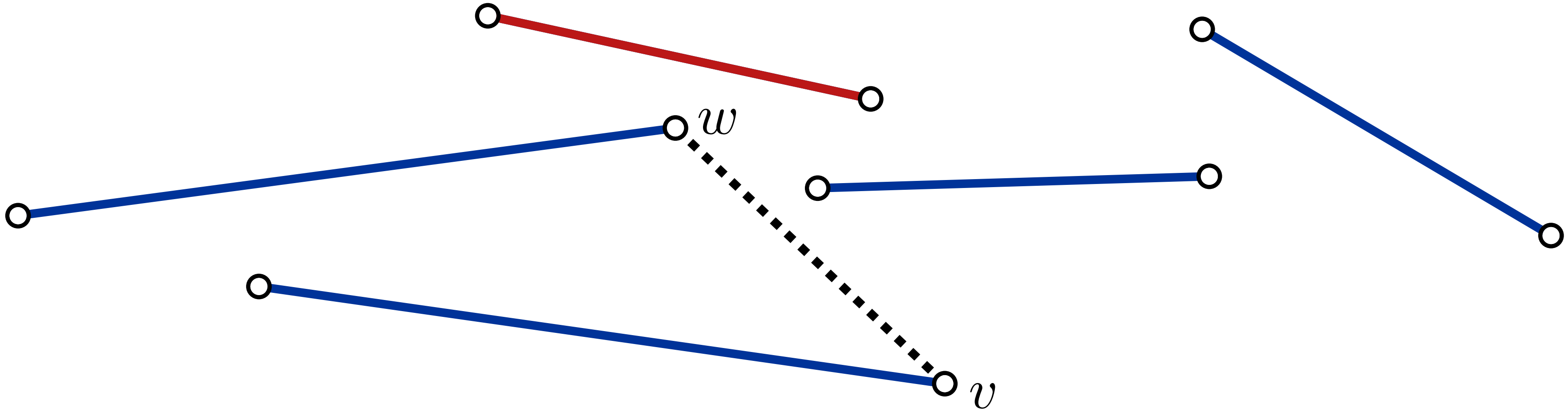


- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar
- Verlassen eines Segments

Aufgabe 2

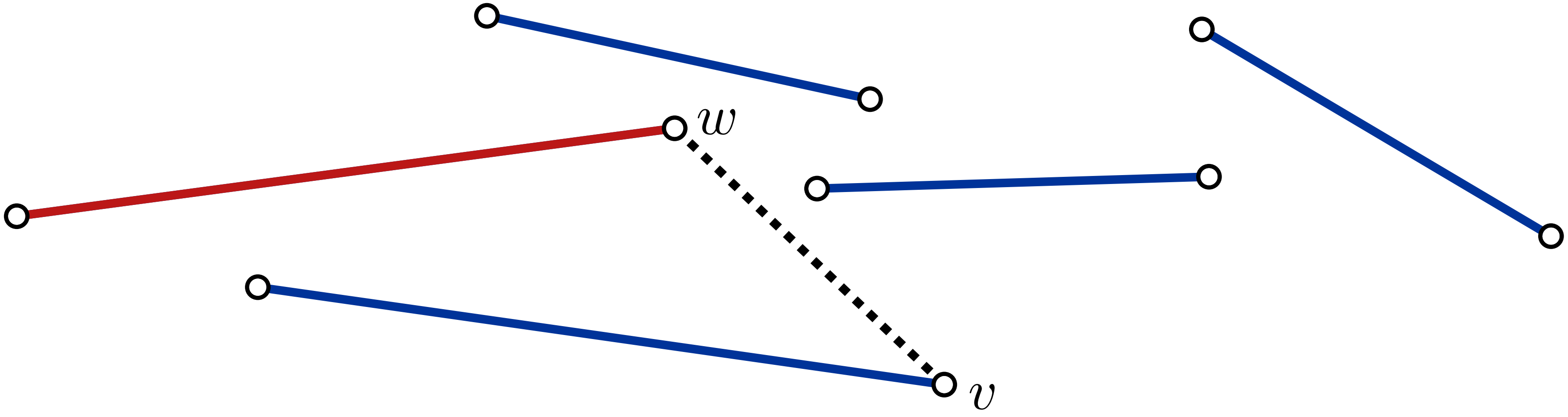


- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar
- Verlassen eines Segments
- Betreten eines Segments

Aufgabe 2

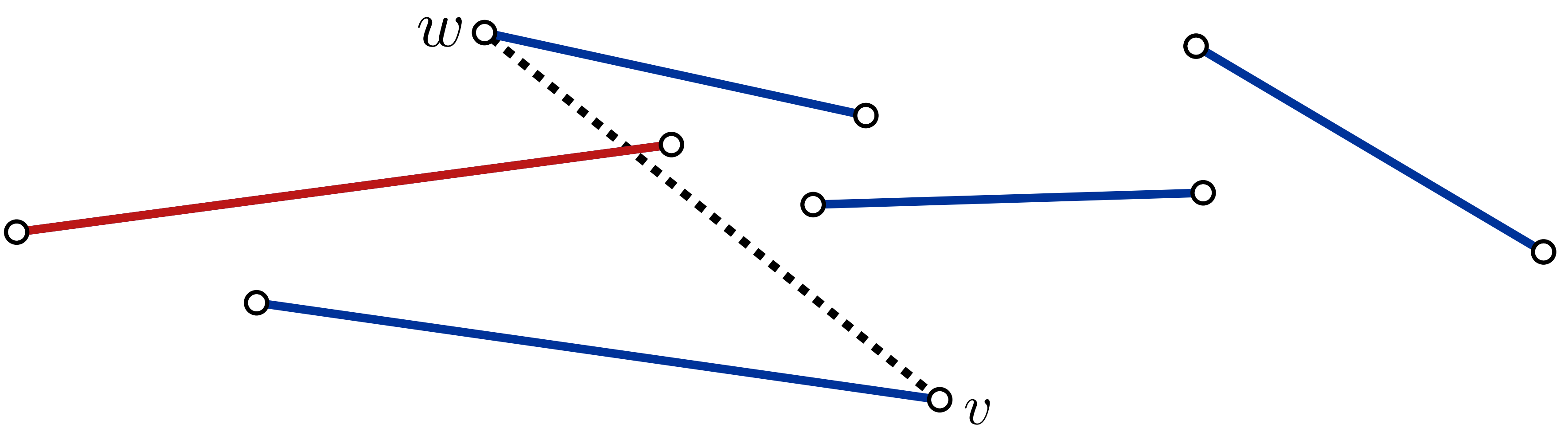


- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar
- Verlassen eines Segments
- Betreten eines Segments

Aufgabe 2

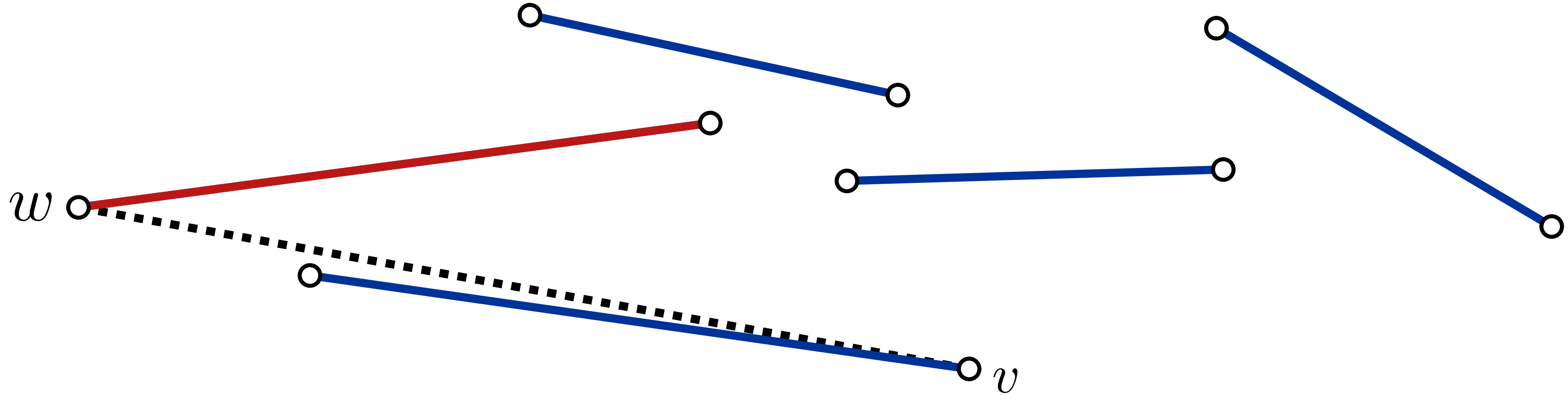


- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar
- Verlassen eines Segments
- Betreten eines Segments

Aufgabe 2

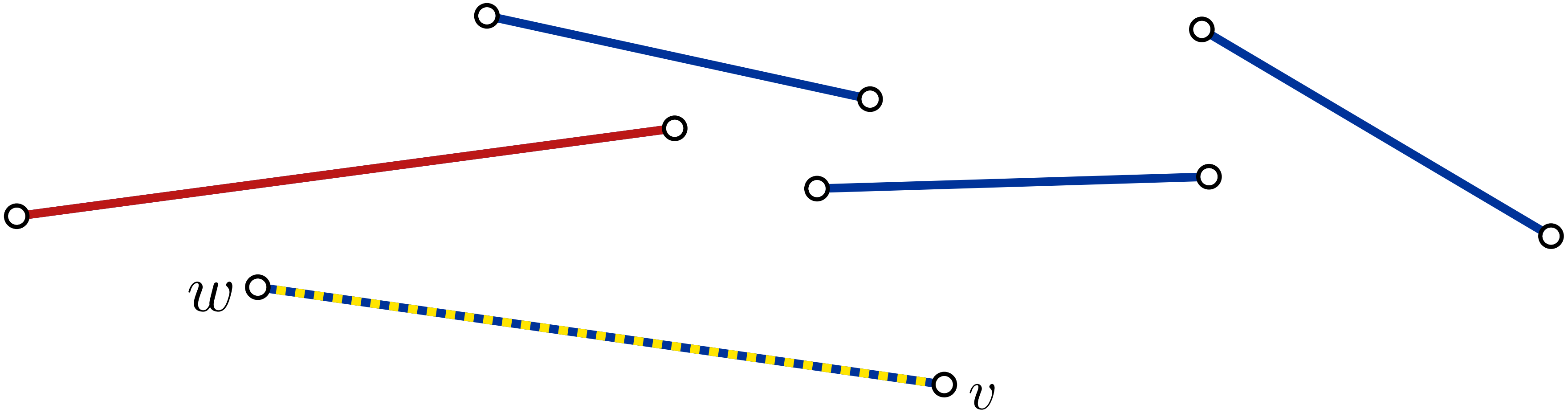


- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar
- Verlassen eines Segments
- Betreten eines Segments

Aufgabe 2

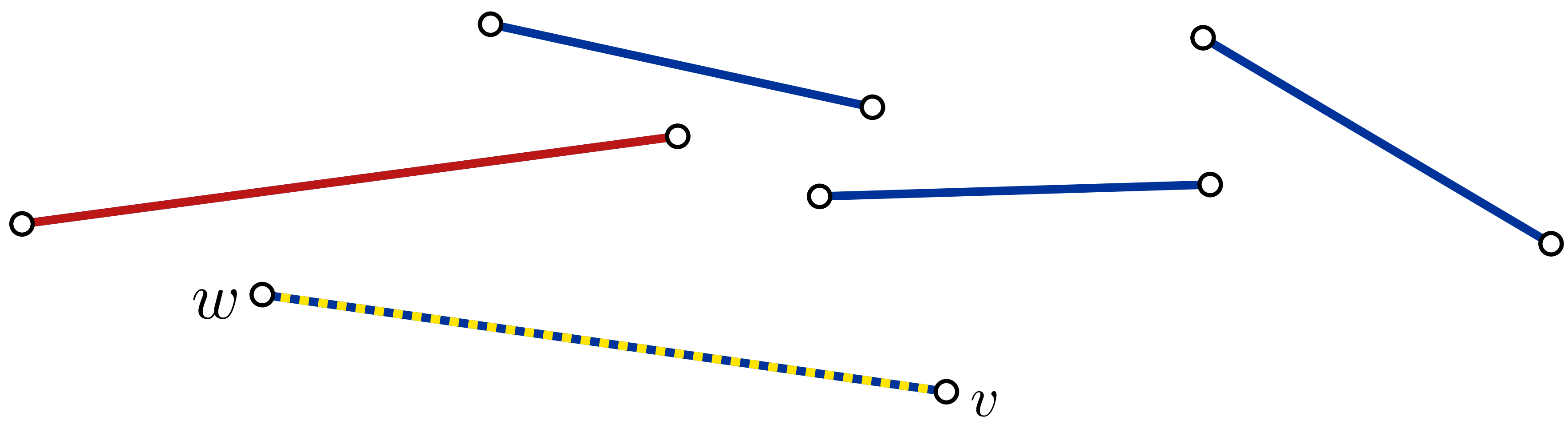


- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar
- Verlassen eines Segments
- Betreten eines Segments
- Gleiches Segment

Aufgabe 2



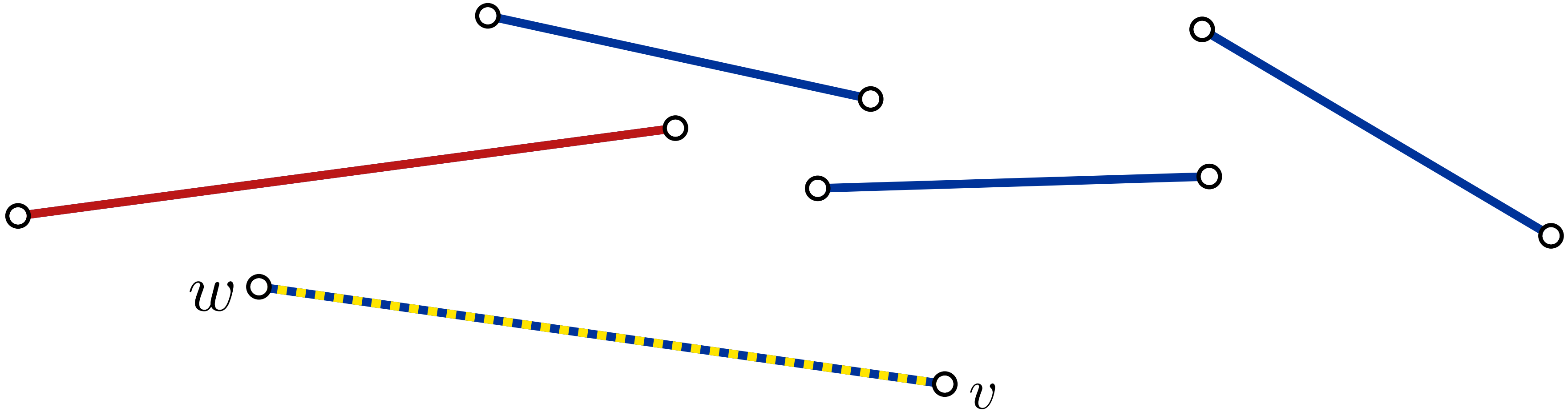
- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

Fälle:

- Unsichtbar
- Verlassen eines Segments
- Betreten eines Segments
- Gleiches Segment

$\left.\right\}$ Füge Kante zum Sichtbarkeitsgraph hinzu

Aufgabe 2



- Bestimme Segment $f(v)$ das als erstes vom Strahl getroffen wird.

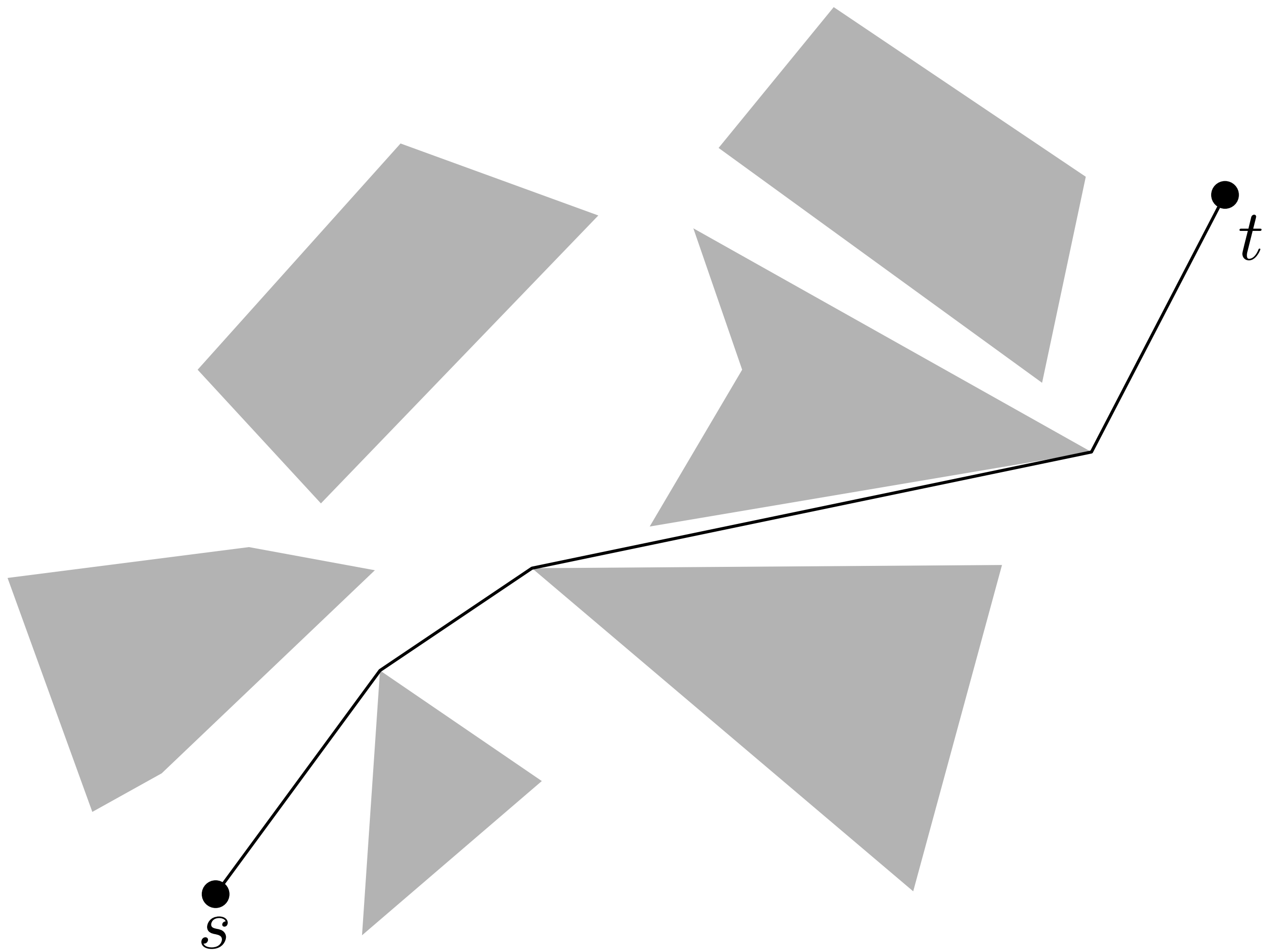
Fälle:

- Unsichtbar $O(1)$
- Verlassen eines Segments $O(1)$
- Betreten eines Segments $O(1)$
- Gleiches Segment $O(1)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Verlassen eines Segments} \\ \text{Betreten eines Segments} \\ \text{Gleiches Segment} \end{array}\right\}$ Füge Kante zum Sichtbarkeitsgraph hinzu

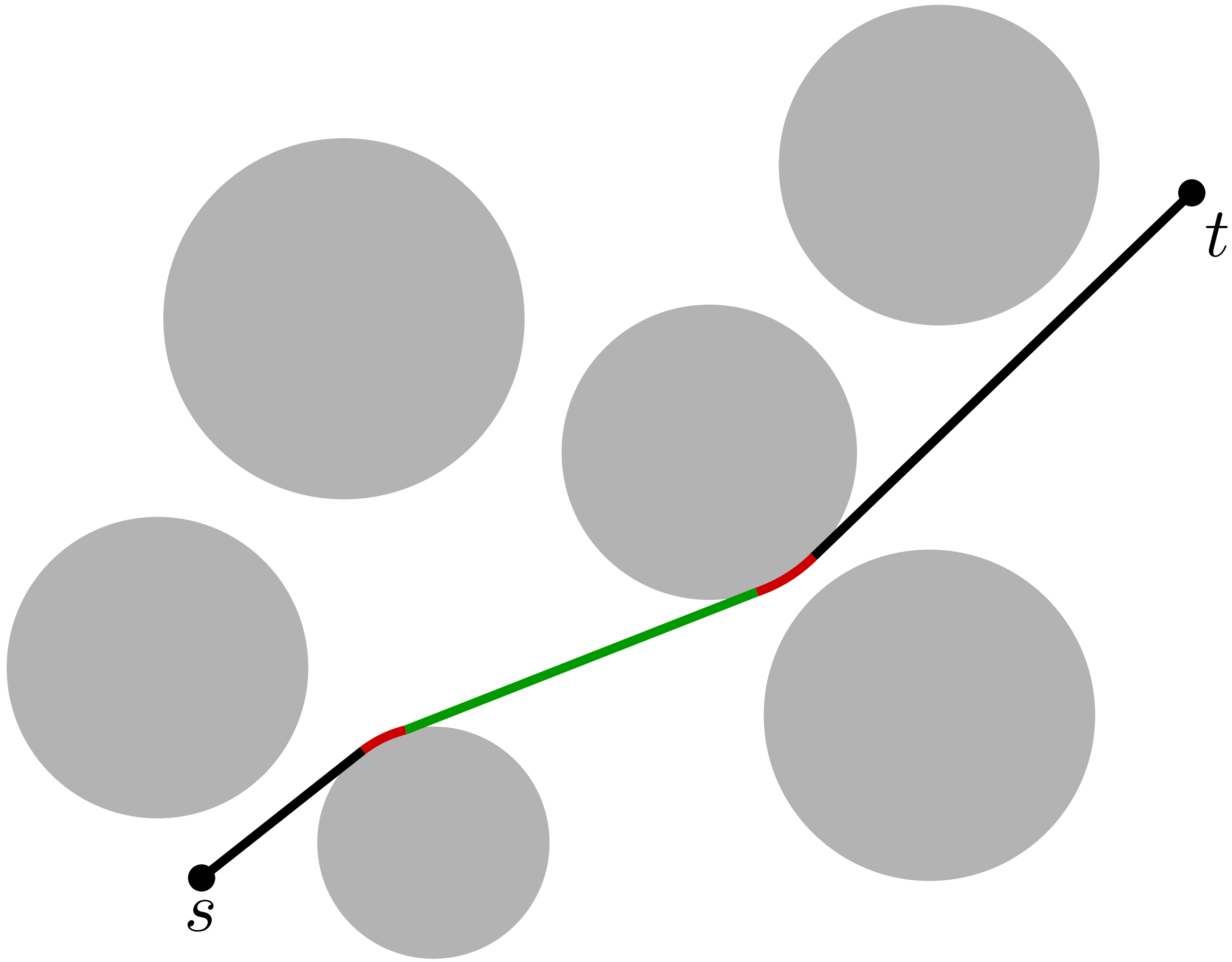
Aufgabe 3

Gegeben: Menge S von Polygonen mit insgesamt n Knoten.



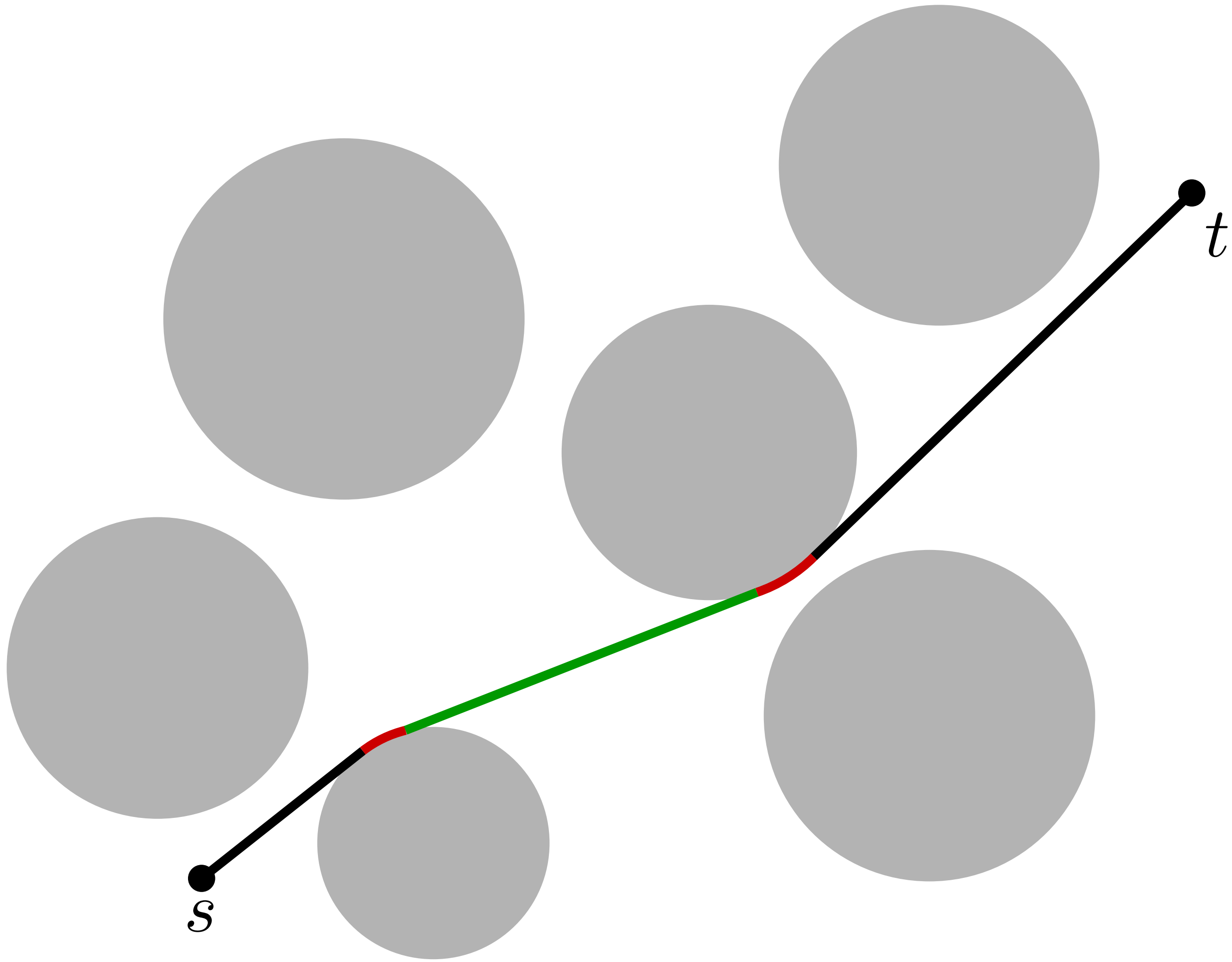
Aufgabe 3

Gegeben: Menge S von n Scheiben



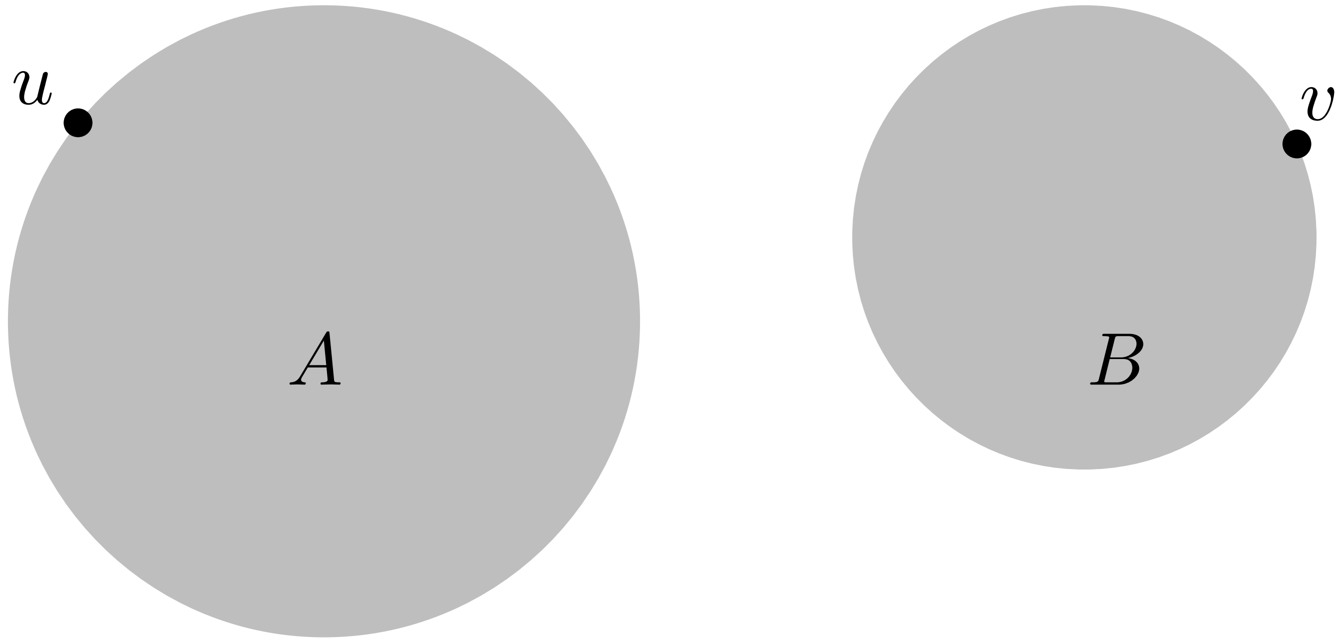
Aufgabe 3

Gegeben: Menge S von n Scheiben



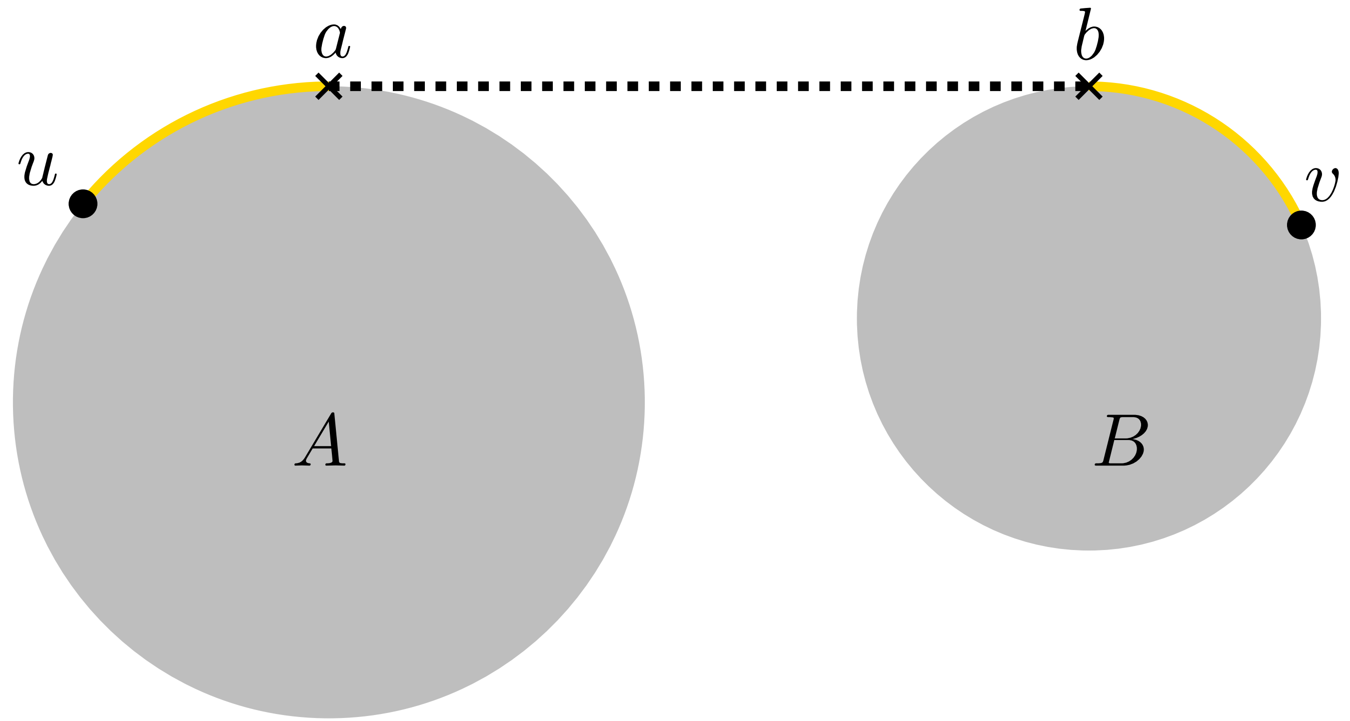
Tangente s/t – Kreis
Tangente Kreis – Kreis
Kreissegment

Aufgabe 3



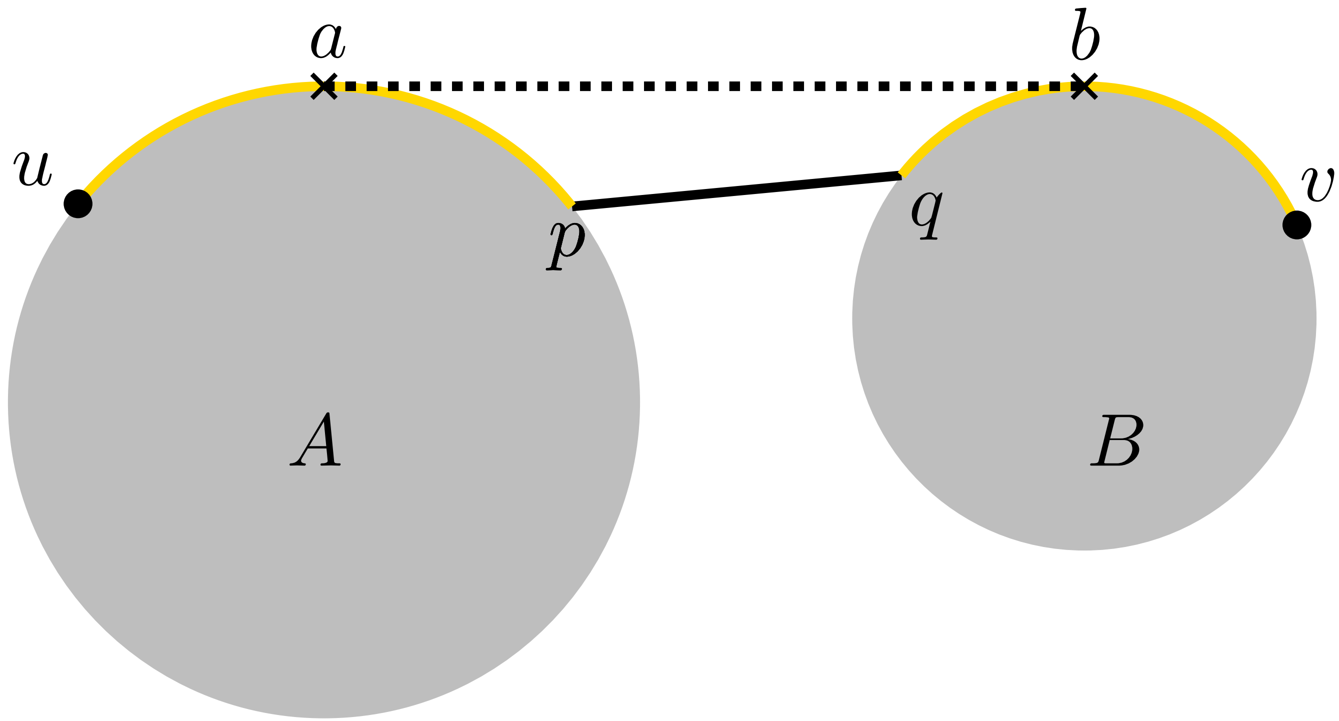
Tangente Kreis – Kreis

Aufgabe 3



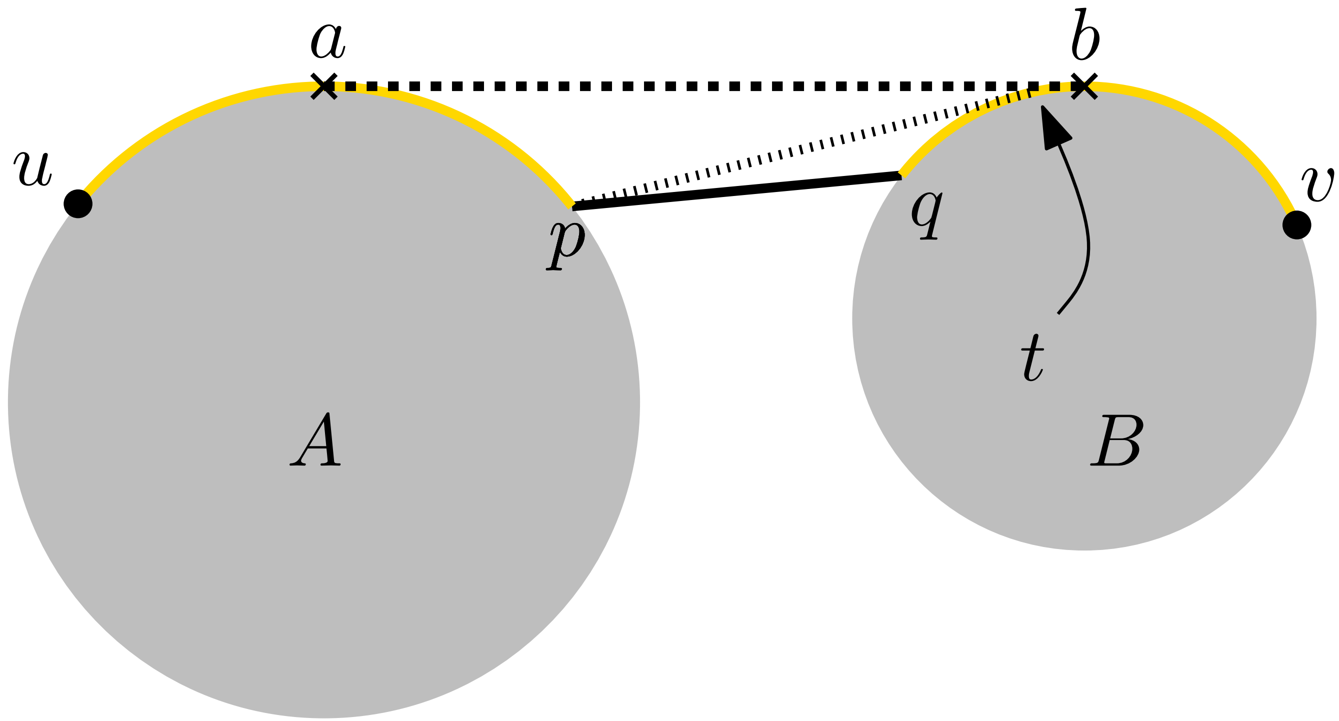
Tangente Kreis – Kreis

Aufgabe 3



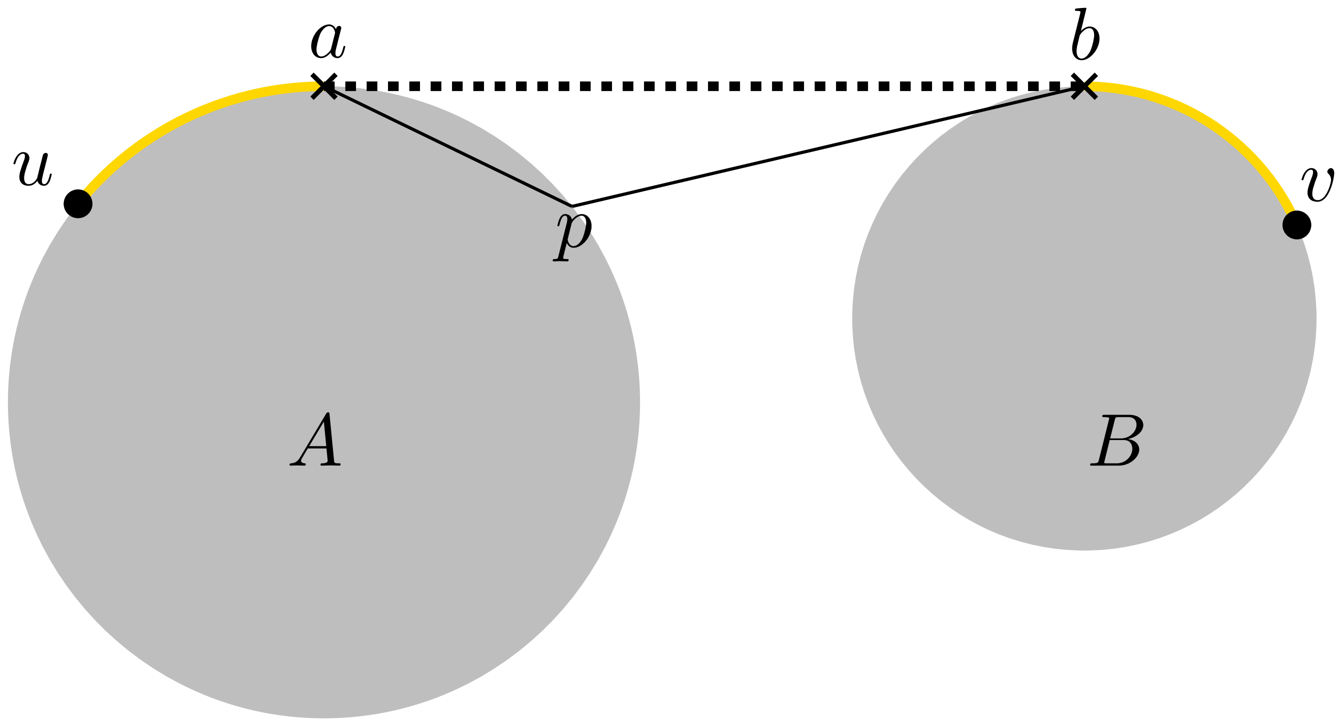
Tangente Kreis – Kreis

Aufgabe 3



Tangente Kreis – Kreis

Aufgabe 3

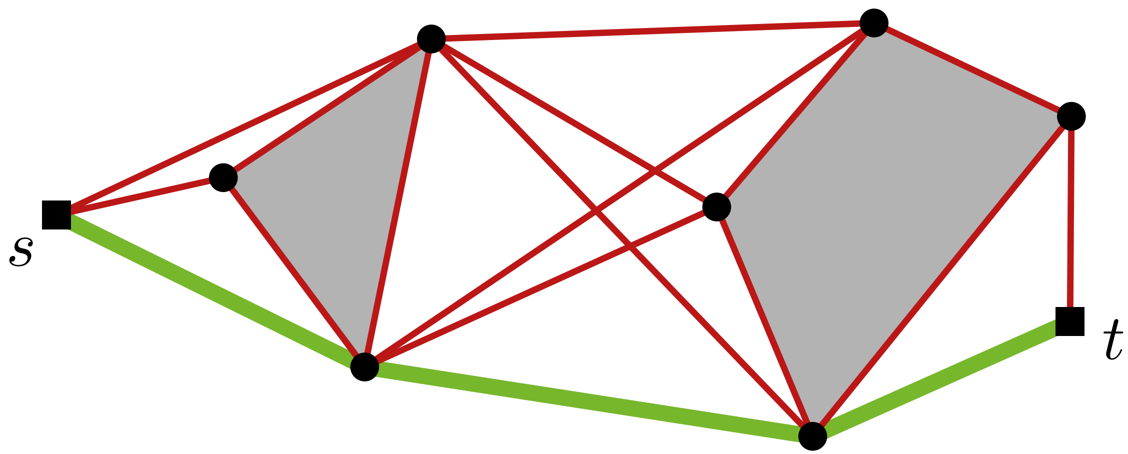


Tangente Kreis – Kreis

Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Polygone...

...mit Knotenmenge $V(S)$.



Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S))$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S mit $E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S) \text{ und } u \textit{ sieht } v\}$ und $w(uv) = |uv|$.
Dabei gilt u **sieht** v $:\Leftrightarrow \overline{uv} \cap \bigcup S = \{u, v\}$

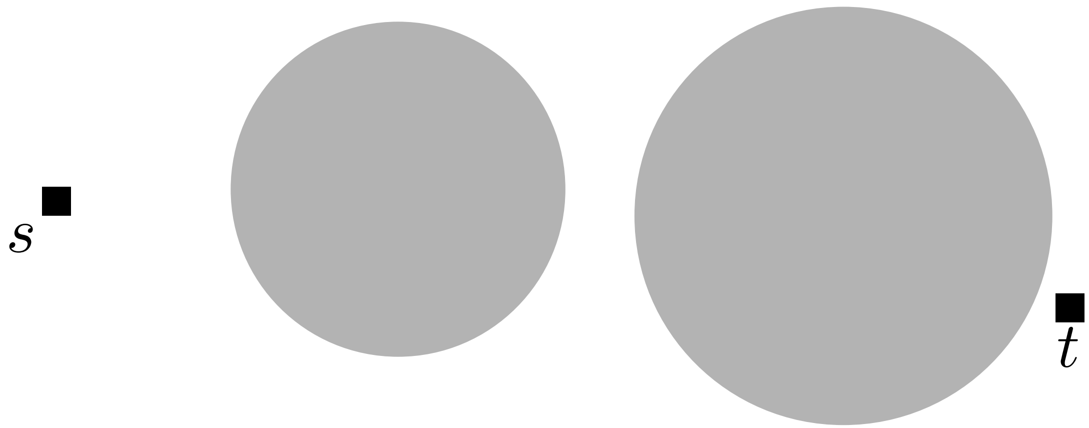
Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\text{vis}}(S^\star)$ analog.

Lemma 1
$\Rightarrow$

Der kürzeste st-Weg, der die Hindernisse in S vermeidet, entspricht einem kürzesten Weg in $G_{\text{vis}}(S^\star)$.

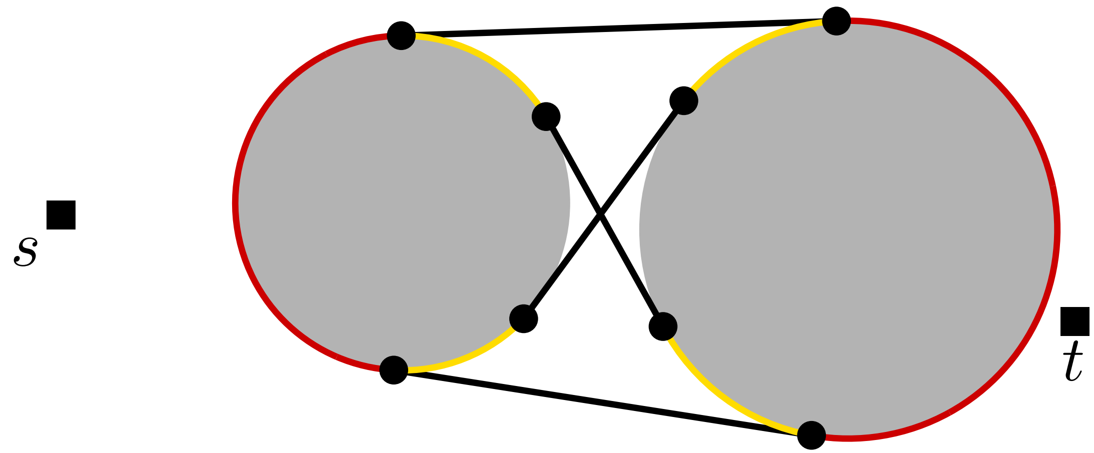
Aufgabe 3 – Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Scheiben.



Aufgabe 3 – Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Scheiben.



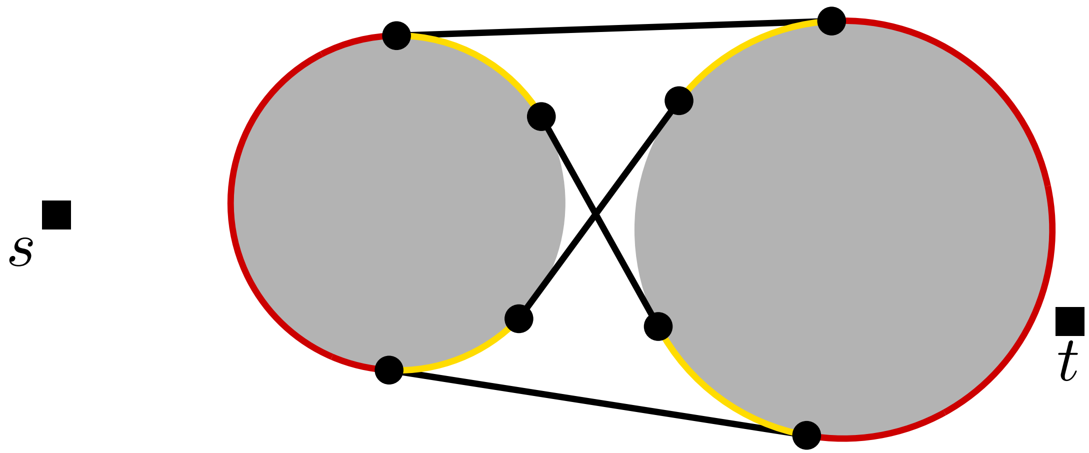
Tangentenknoten: $V(S)$

$E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S)$ und u *sieht* $v\}$ und $w(uv) = |uv|$.

$E_{\text{arc}}(S) = \{$Kreisbogen $uv \mid u, v \in$
$V(S)$ und u, v auf gleicher Scheibe 'hintereinander' $\}$
und $w(uv) = |uv| \cdot \alpha$.

Aufgabe 3 – Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Scheiben.



Tangentenknoten: $V(S)$

$E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S)$ und u *sieht* $v\}$ und $w(uv) = |uv|$.

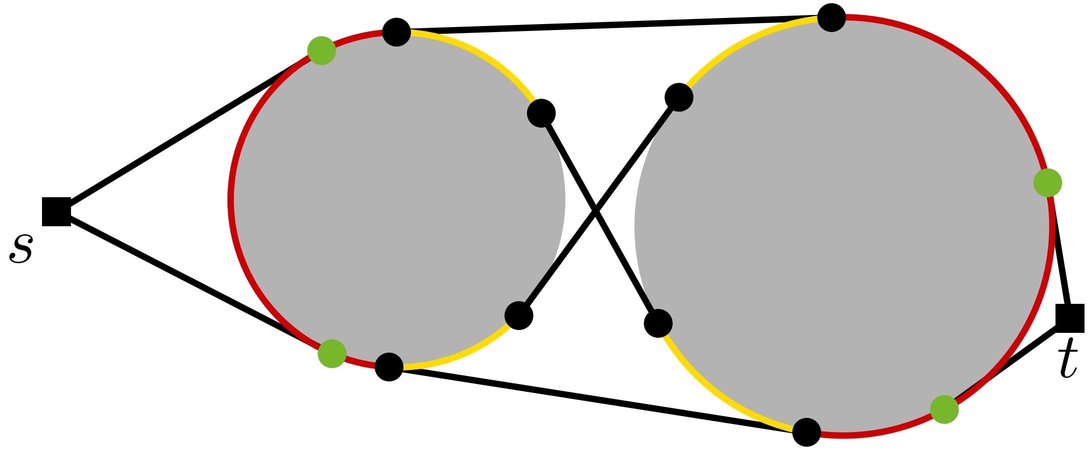
$E_{\text{arc}}(S) = \{$Kreisbogen $uv \mid u, v \in$
$V(S)$ und u, v auf gleicher Scheibe 'hintereinander' $\}$
und $w(uv) = |uv| \cdot \alpha$.

Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S) \cup E_{\text{arc}})$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S.

Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\text{vis}}(S^\star)$ analog.

Aufgabe 3 – Sichtbarkeitsgraph

Gegeben sei eine Menge S disjunkter offener Scheiben.



Tangentenknoten: $V(S)$

$E_{\text{vis}}(S) = \{uv \mid u, v \in V(S)$ und u *sieht* $v\}$ und $w(uv) = |uv|$.

$E_{\text{arc}}(S) = \{$Kreisbogen $uv \mid u, v \in$
$V(S)$ und u, v auf gleicher Scheibe 'hintereinander' $\}$
und $w(uv) = |uv| \cdot \alpha$.

Def.: Dann ist $G_{\text{vis}}(S) = (V(S), E_{\text{vis}}(S) \cup E_{\text{arc}})$ der **Sichtbarkeitsgraph** von S.

Definiere $S^\star = S \cup \{s, t\}$ und $G_{\text{vis}}(S^\star)$ analog.

Aufgabe 3 – Sichtbarkeitsgraph berechnen

$\textsc{VisibilityGraph}(S)$

Input: Menge disjunkter Polygone S

Output: Sichtbarkeitsgraph $G_{\mathsf{vis}}(S)$

$E \leftarrow \emptyset$

foreach $v \in V(S)$ **do**

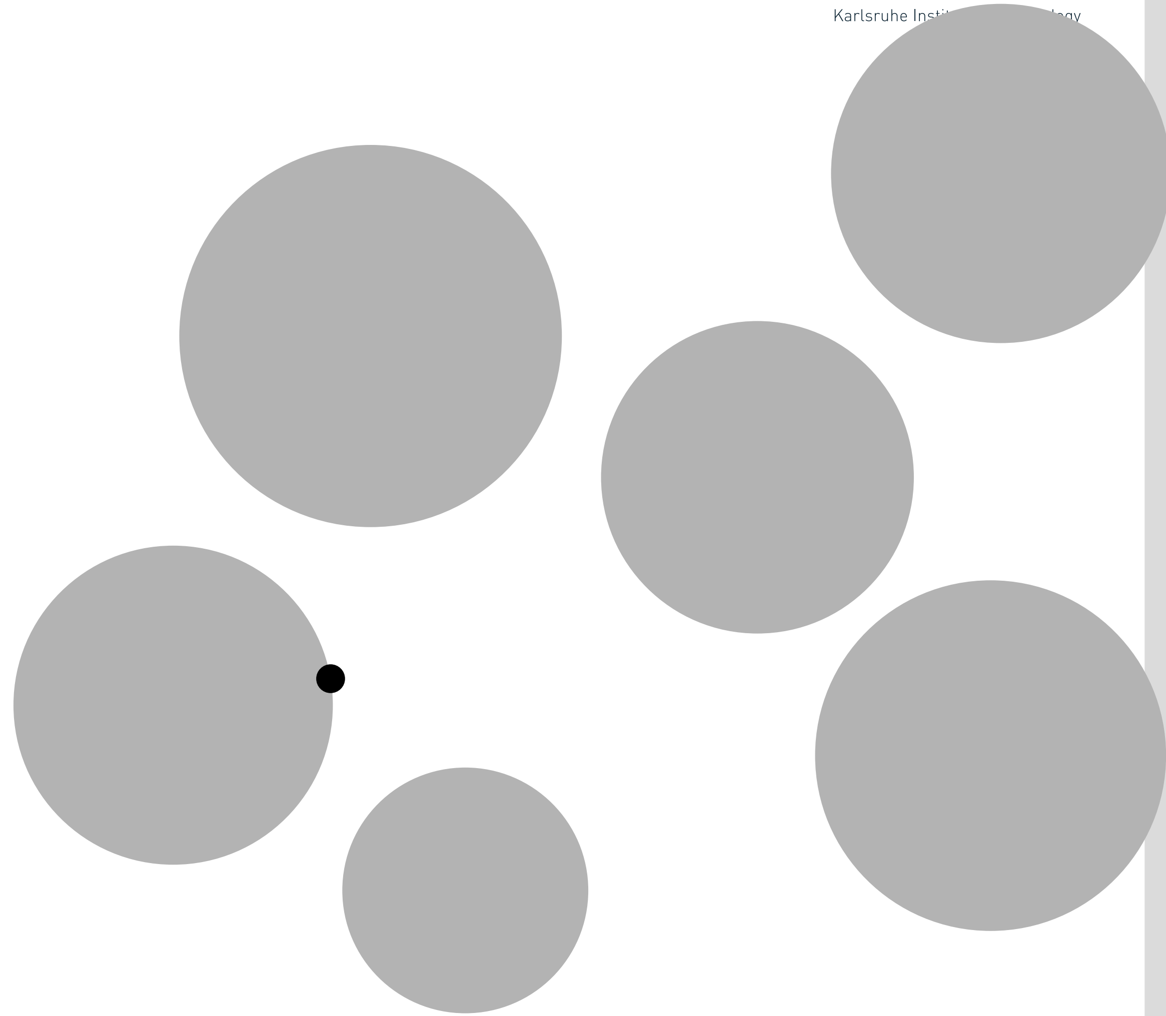
  $W \leftarrow \textsc{VisibleVertices}(v, S)$

  $E \leftarrow E \cup \{vw \mid w \in W\}$

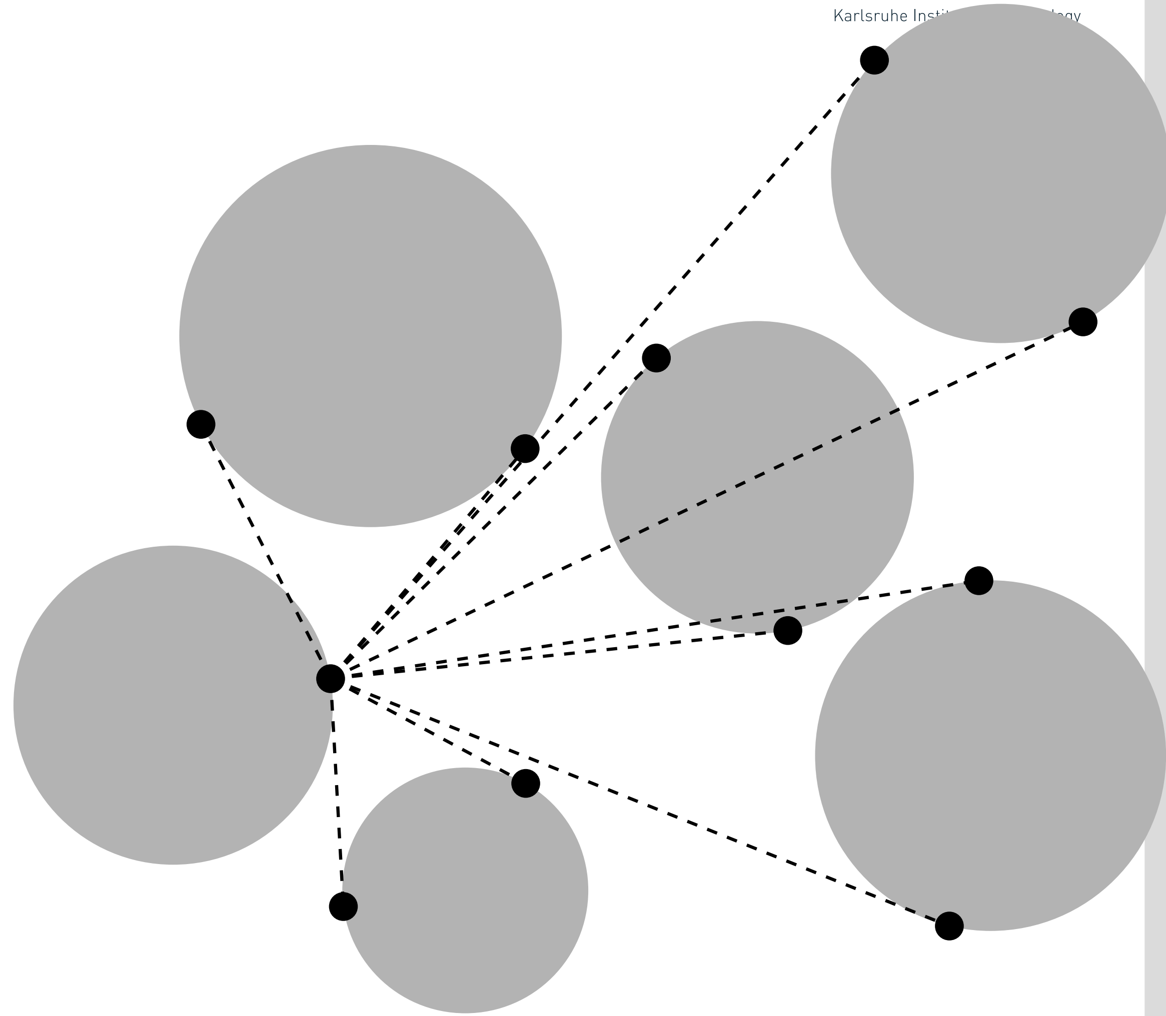
  $E \leftarrow E \cup \{$ arc zum nächsten Nachbarn auf der Scheibe $\}$

return E

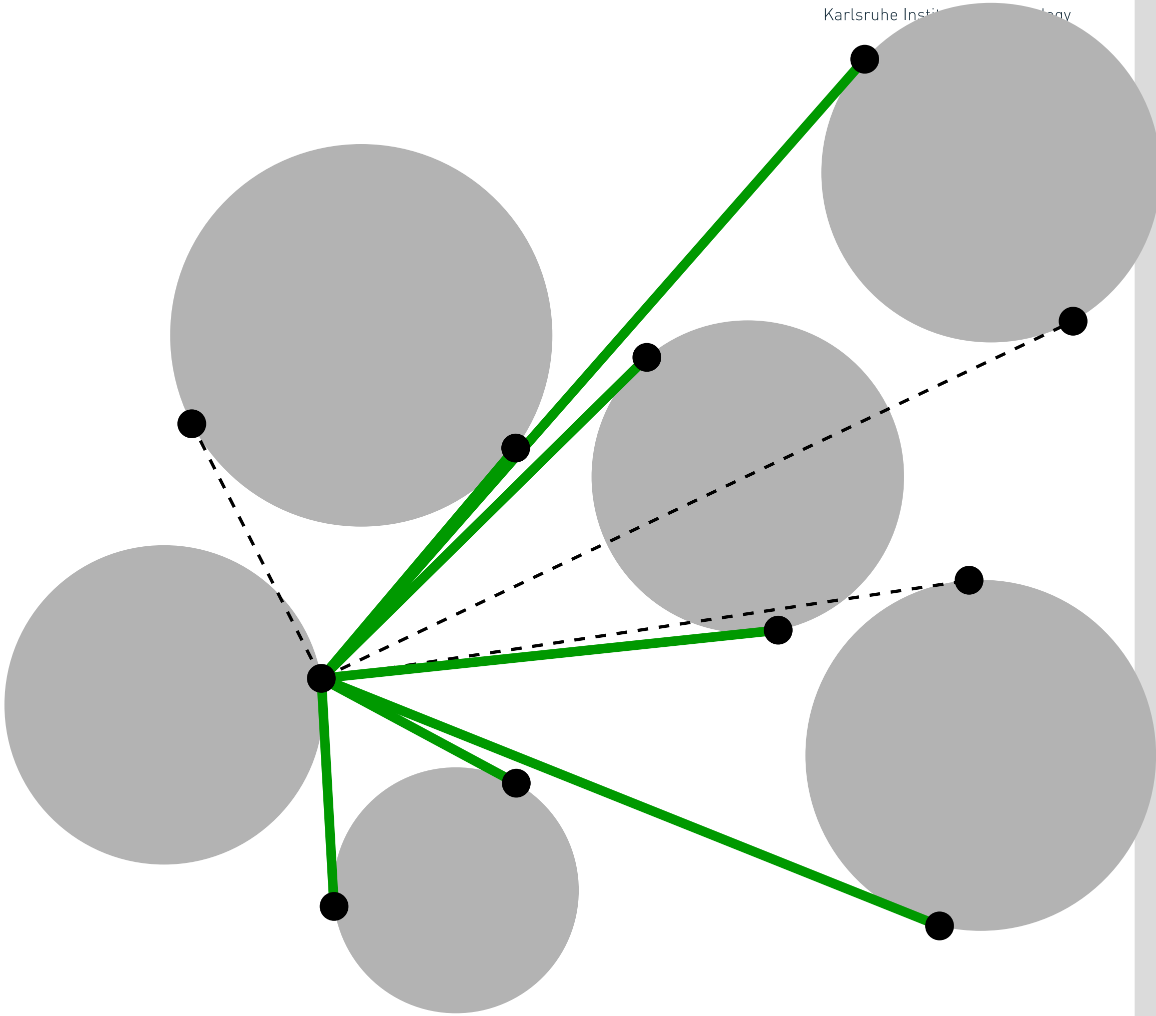
Aufgabe 3 – Sichtbare Knoten berechnen



Aufgabe 3 – Sichtbare Knoten berechnen



Aufgabe 3 – Sichtbare Knoten berechnen



Aufgabe 3 – Sichtbare Knoten berechnen

$\textsc{VisibleVertices}(p, S)$

$r \leftarrow \{p + k\binom{1}{0} \mid k \in \mathbb{R}_0^+\}$

$I \leftarrow \{e \in E(S) \mid e \cap r \neq \emptyset\}$

$\mathcal{T} \leftarrow \mathsf{balancedBinaryTree}(I)$

$w_1, \ldots, w_n \leftarrow$ sortiere $V(S)$ im UZS

$W \leftarrow \emptyset$

for $i = 1$ **to** n **do**

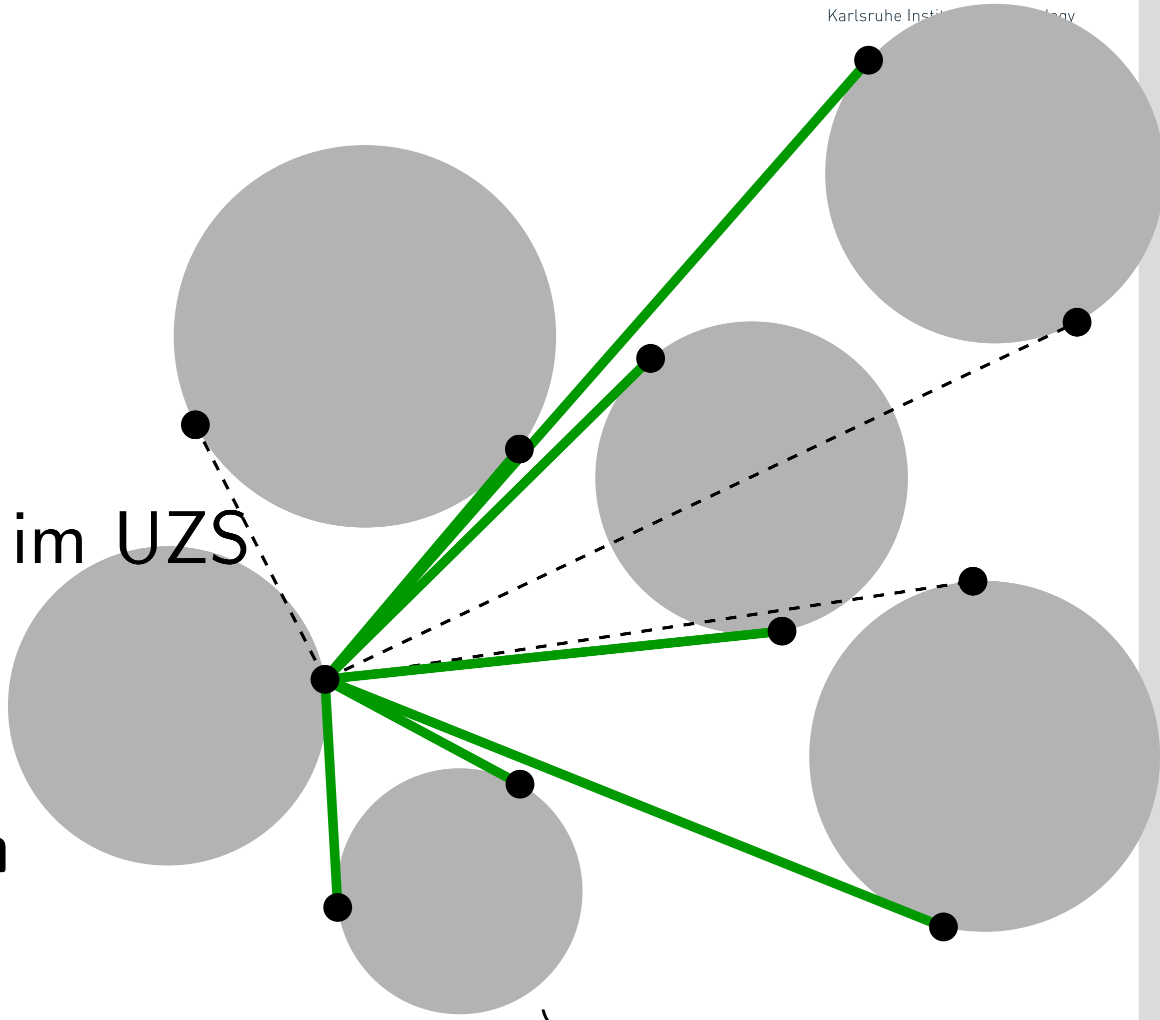
if $\textsc{Visible}(p, w_i)$ **then**

$W \leftarrow W \cup \{w_i\}$

füge in $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kante aus $\overrightarrow{pw_i}^+$ ein

lösche aus $\mathcal{T}$ zu w_i inzidente Kanten aus $\overrightarrow{pw_i}^-$

return W



Aufgabe 3 – Shortest Path

Laufzeit für Polygone

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$ $\boxed{n = |V(S)|, m = |E_{\text{vis}}(S)|}$

Input: Hindernismenge S, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$
Output: kürzester kollisionsfreier st-Weg in S

1 $G_{\text{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$ $O(n^2 \log n)$
2 **foreach** $uv \in E_{\text{vis}}(S)$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$ $O(m)$
3 $O(n \log n + m)$
4 **return** $\textsc{Dijkstra}(G_{\text{vis}}, w, s, t)$

$O(n^2 \log n)$

Aufgabe 3 – Shortest Path

Laufzeit für Polygone

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$ $\quad$ $\boxed{n = |V(S)|, m = |E_{\mathsf{vis}}(S)|}$

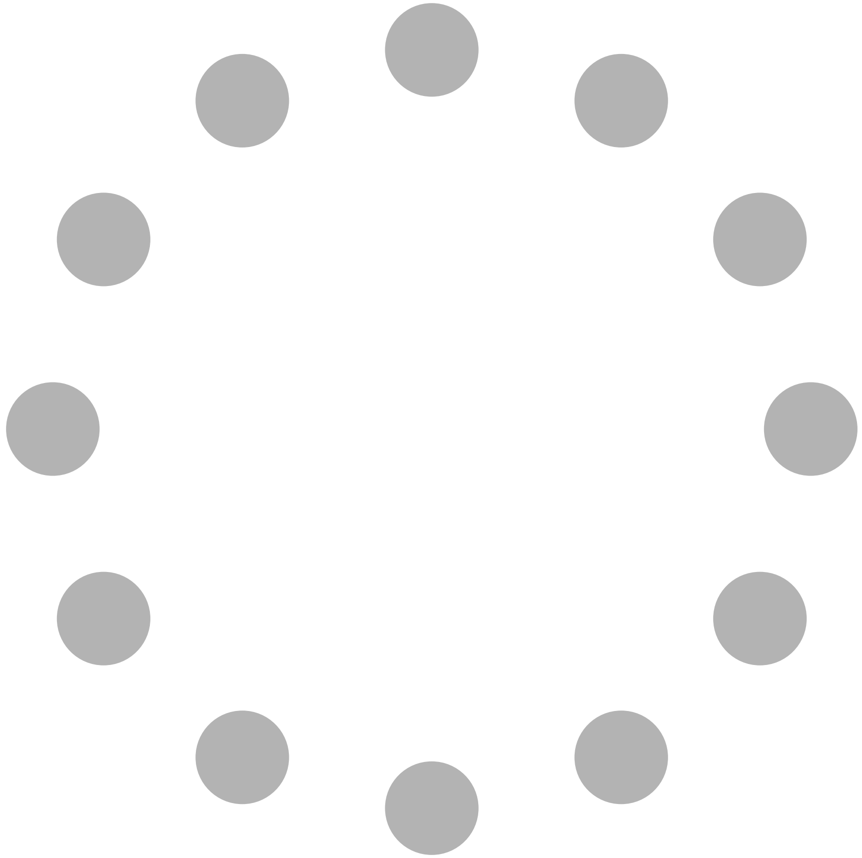
Input: Hindernismenge S, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$
Output: kürzester kollisionsfreier st-Weg in S

$G_{\mathsf{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$ $\quad$ $O(n^2 \log n)$
foreach $uv \in E_{\mathsf{vis}}(S)$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$ $\quad$ $O(m)$
$\quad$ $O(n \log n + m)$
return $\textsc{Dijkstra}(G_{\mathsf{vis}}, w, s, t)$

$O(n^2 \log n)$

Wie schlimm kann es für Kreise werden?

Aufgabe 3 – Worst Case



Von jeder Scheibe mindestens eine Tangente an jede andere Scheibe

$\Omega(n)$ Tangentenknoten pro Scheibe $\Rightarrow$ $\Omega(n^2)$ Knoten insgesamt

Jede Tangente ergibt maximal eine Kante $\Rightarrow$ $\Omega(n^2)$ Kanten insgesamt

Aufgabe 3 – Shortest Path

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$ $\boxed{n^2 = |V(S)|, m = |E|}$

Input: Hindernismenge S, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$
Output: kürzester kollisionsfreier st-Weg in S

$G_{\mathsf{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$ $O(n^4 \log n^2)$

foreach $uv \in E_{\mathsf{vis}}(S)$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$ $O(m)$

$O(n^2 \log n^2 + m)$

return $\textsc{Dijkstra}(G_{\mathsf{vis}}, w, s, t)$

$O(n^4 \log n^2)$

Aufgabe 3 – Shortest Path

$\textsc{ShortestPath}(S, s, t)$ $\quad\boxed{n^2 = |V(S)|, m = |E|}$

Input: Hindernismenge S, Punkte $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup S$

Output: kürzester kollisionsfreier st-Weg in S

$G_{\mathsf{vis}} \leftarrow \textsc{VisibilityGraph}(S \cup \{s, t\})$ $\quad O(n^4 \log n^2)$

foreach $uv \in E_{\mathsf{vis}}(S)$ **do** $w(uv) \leftarrow |uv|$ $\quad O(m)$

$O(n^2 \log n^2 + m)$

return $\textsc{Dijkstra}(G_{\mathsf{vis}}, w, s, t)$

$O(n^4 \log n^2)$

Informationen zur Prüfung

Prüfungstermine:

- 6. August ab 9:00 Uhr
- 8. Oktober ab 9:00 Uhr
- bei Bedarf noch weiterer Termin im WS 2014/15

Anmeldung per Mail an lilian.beckert@kit.edu

Informationen zur Prüfung

Prüfungstermine:

- 6. August ab 9:00 Uhr
- 8. Oktober ab 9:00 Uhr
- bei Bedarf noch weiterer Termin im WS 2014/15

Anmeldung per Mail an lilian.beckert@kit.edu

Projektnoten:

- bitte beim Betreuer erfragen

Ausblick (WS 2014/15)

- Bei Interesse an einer Masterarbeit einfach melden. Wir haben regelmäßig spannende theoretische und praktische Themen aus unseren Forschungsbereichen.
- Vorlesung *Algorithmen zur Visualisierung von Graphen*
- Vorlesung *Algorithmische Graphentheorie*
- Seminar *Algorithmentechnik*
- Praktikum *Routenplanung*

weitere Infos demnächst unter `i11www.iti.kit.edu`

Ausblick (WS 2014/15)

- Bei Interesse an einer Masterarbeit einfach melden. Wir haben regelmäßig spannende theoretische und praktische Themen aus unseren Forschungsbereichen.
- Vorlesung *Algorithmen zur Visualisierung von Graphen*
- Vorlesung *Algorithmische Graphentheorie*
- Seminar *Algorithmentechnik*
- Praktikum *Routenplanung*

weitere Infos demnächst unter `i11www.iti.kit.edu`

Danke!

Viel Erfolg bei der Prüfung!