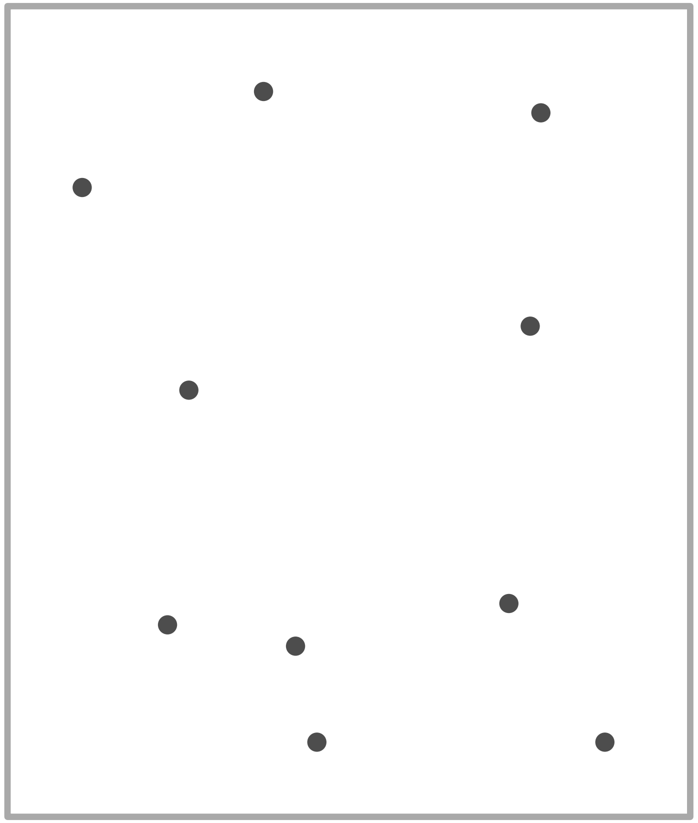
Übung Algorithmische Geometrie
WSPD

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann
09.07.2014

Motivation: Spanner



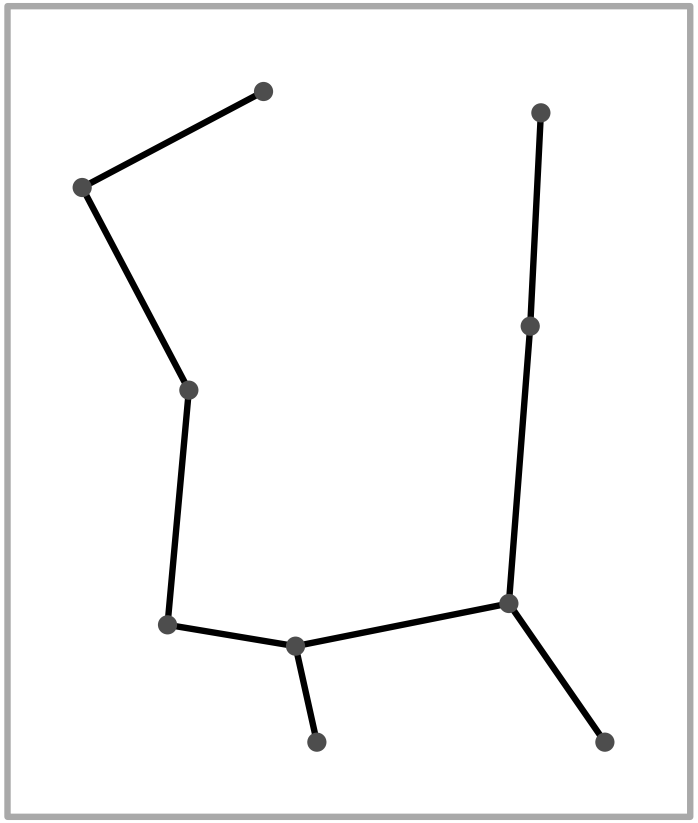
Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Motivation: Spanner

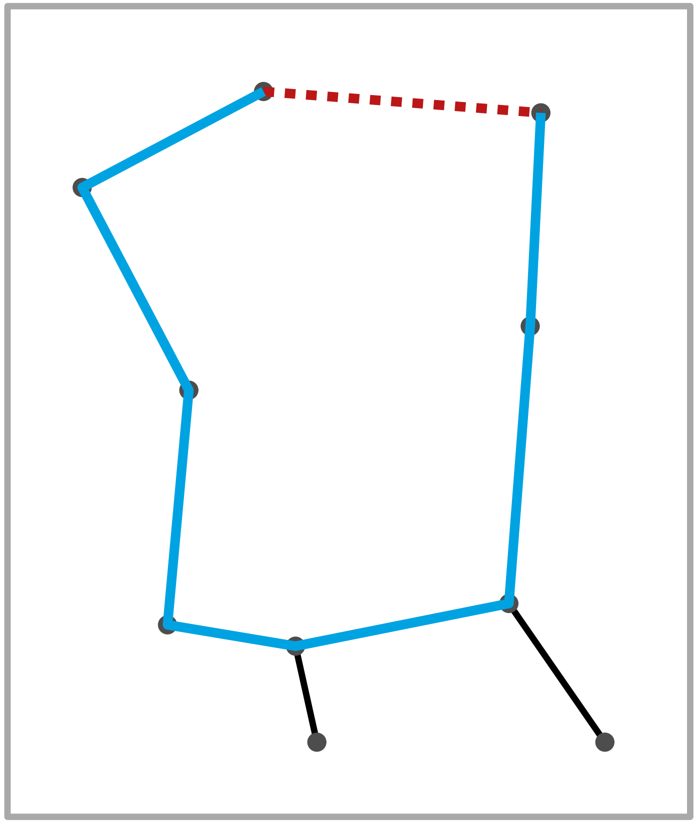
Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.



1. Idee: Euklid. min. Spannbaum

Motivation: Spanner



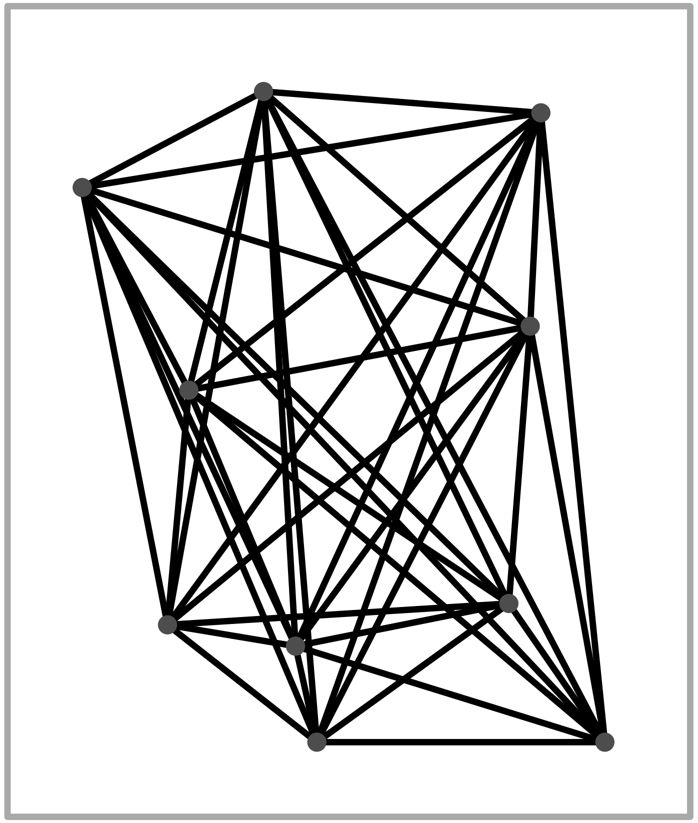
Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $||xy||$ sein.

1. Idee: Euklid. min. Spannbaum

Motivation: Spanner



Aufgabe:

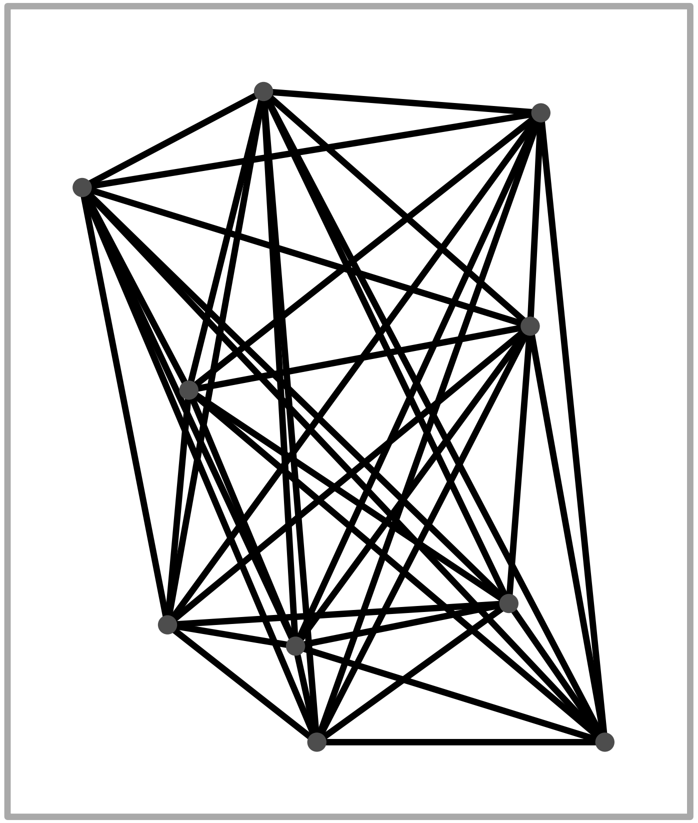
Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $||xy||$ sein.

1. Idee: Euklid. min. Spannbaum

2. Idee: vollständiger Graph

Motivation: Spanner



Aufgabe:

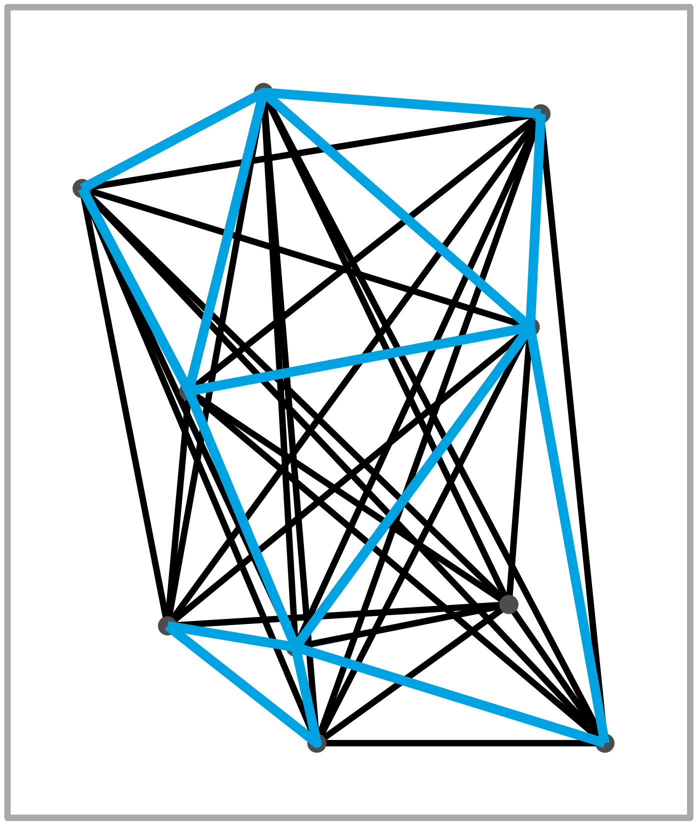
Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $||xy||$ sein.

Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.

1. **Idee:** Euklid. min. Spannbaum
2. **Idee:** vollständiger Graph

Motivation: Spanner



Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

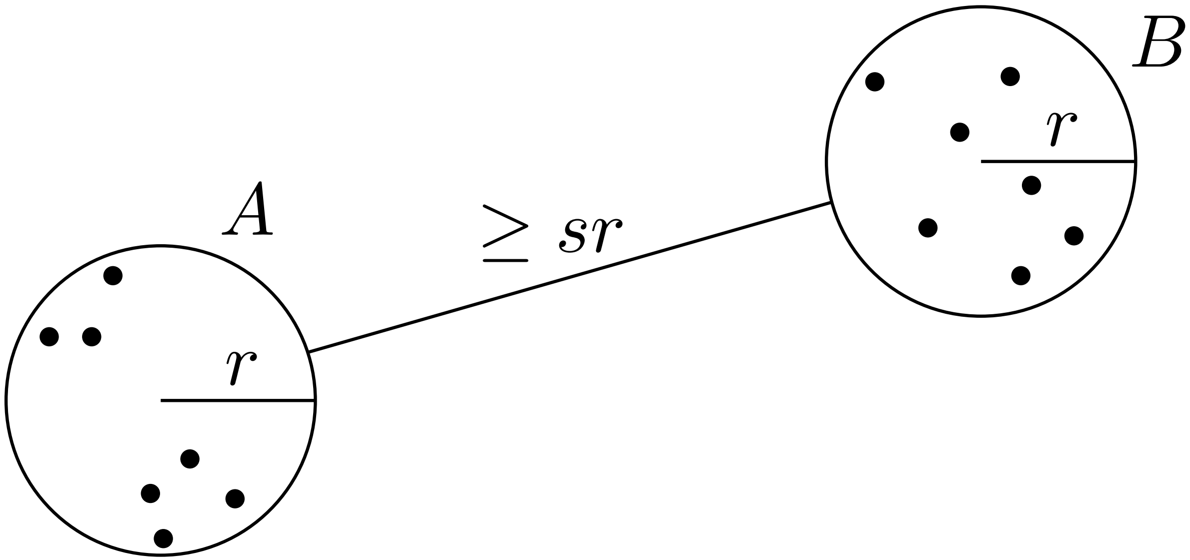
Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $||xy||$ sein.

Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.

1. **Idee:** Euklid. min. Spannbaum
2. **Idee:** vollständiger Graph
3. **Idee: sparse t-Spanner**

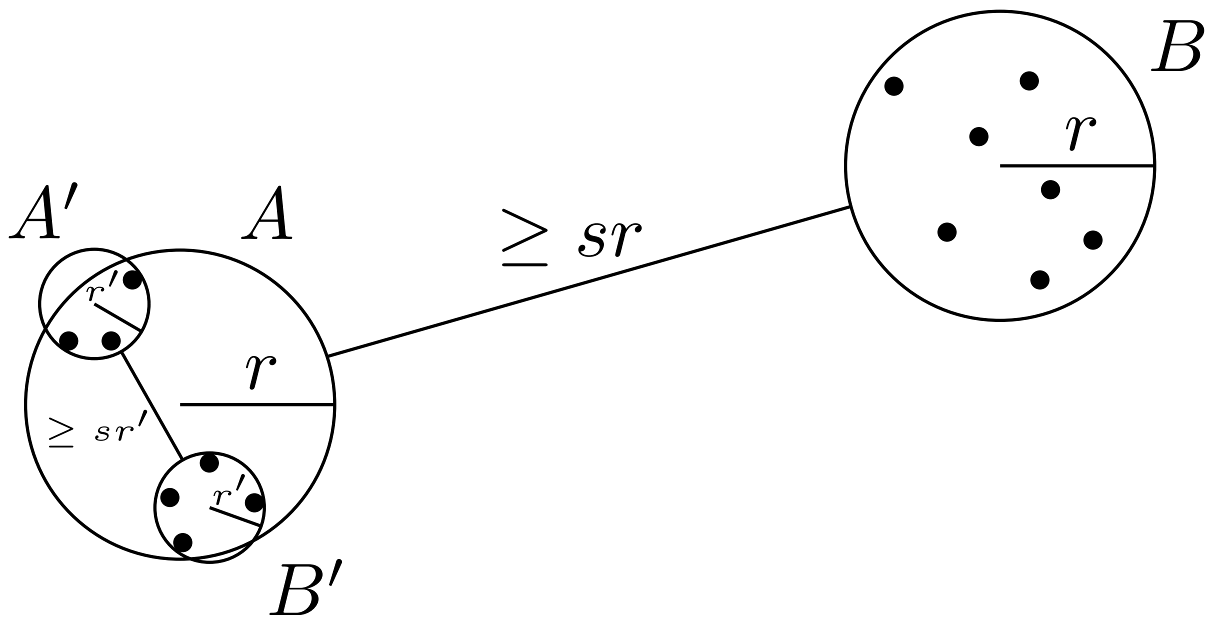
Well-Separated Pairs

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmengen A und B im $\mathbb{R}^d$ heißt s-**well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.



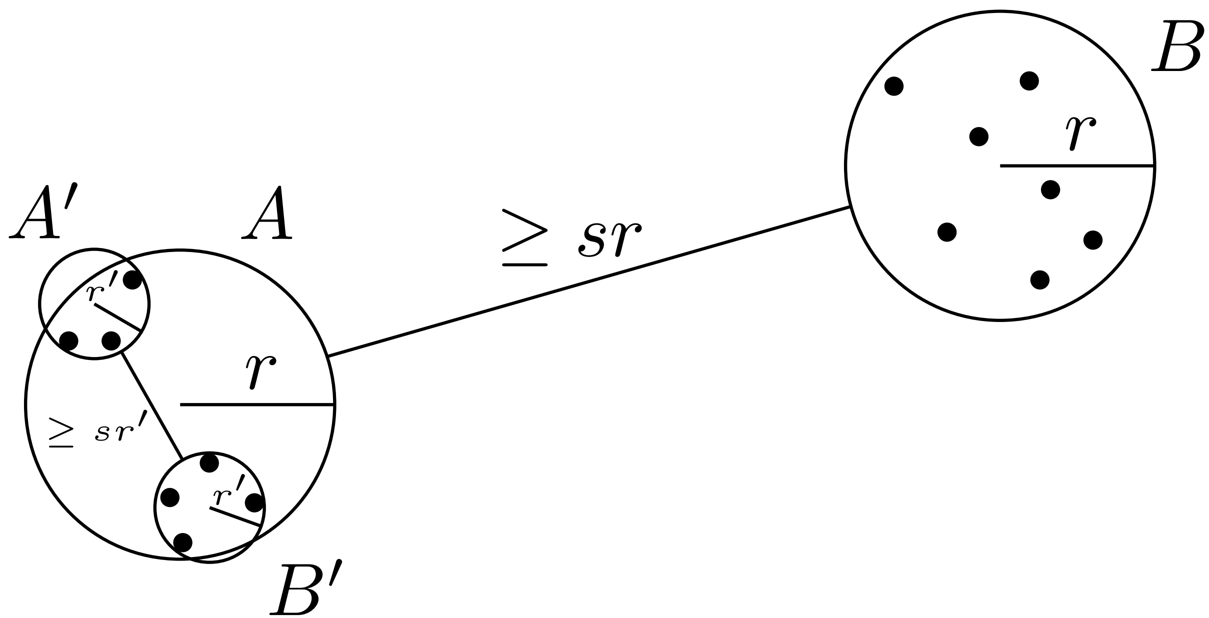
Well-Separated Pairs

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmengen A und B im $\mathbb{R}^d$ heißt s-**well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.



Well-Separated Pairs

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmengen A und B im $\mathbb{R}^d$ heißt s-**well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.



Beob.:
- s-well separated $\Rightarrow$ s'-well separated für alle $s' \leq s$
- Singletons $\{a\}$ und $\{b\}$ sind s-well separated für alle $s > 0$

Well-Separated Pair Decomposition (WSPD)

Für wohlsepariertes Paar $\{A, B\}$ gilt, dass der Abstand für alle Punktpaare in $A \otimes B = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}$ ähnlich ist.

Ziel: $o(n^2)$-Datenstruktur, die den Abstand aller $\binom{n}{2}$ Paare von Punkten einer Menge $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ approximiert.

Well-Separated Pair Decomposition (WSPD)

Für wohlsepariertes Paar $\{A, B\}$ gilt, dass der Abstand für alle Punktpaare in $A \otimes B = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}$ ähnlich ist.

Ziel: $o(n^2)$-Datenstruktur, die den Abstand aller $\binom{n}{2}$ Paare von Punkten einer Menge $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ approximiert.

Def.: Für eine Punktmenge P und ein $s > 0$ ist eine s-**well separated pair decomposition** (s-WSPD) eine Menge von Paaren $\{\{A_1, B_1\}, \ldots, \{A_m, B_m\}\}$ mit

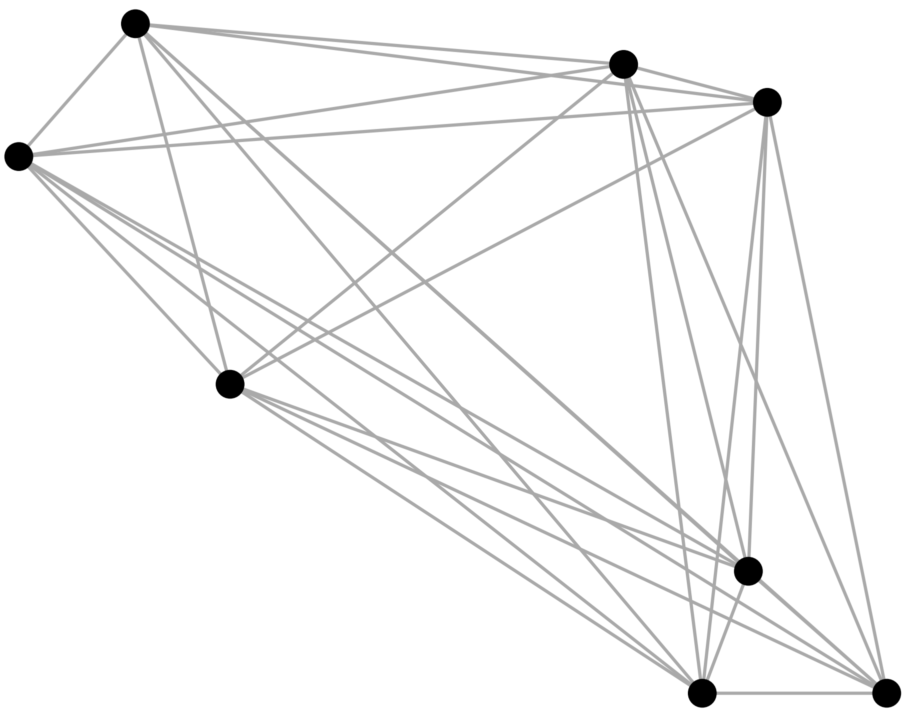
- $A_i, B_i \subset P$ für alle i
- $A_i \cap B_i = \emptyset$ für alle i
- $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \otimes B_i = P \otimes P$
- $\{A_i, B_i\}$ s-well separated für alle i

Alternative Definition

Def.: Für eine Punktmenge P und ein $s > 0$ ist eine s-**well separated pair decomposition** (s-WSPD) eine Menge von Paaren $\{\{A_1, B_1\}, \ldots, \{A_m, B_m\}\}$ sodass

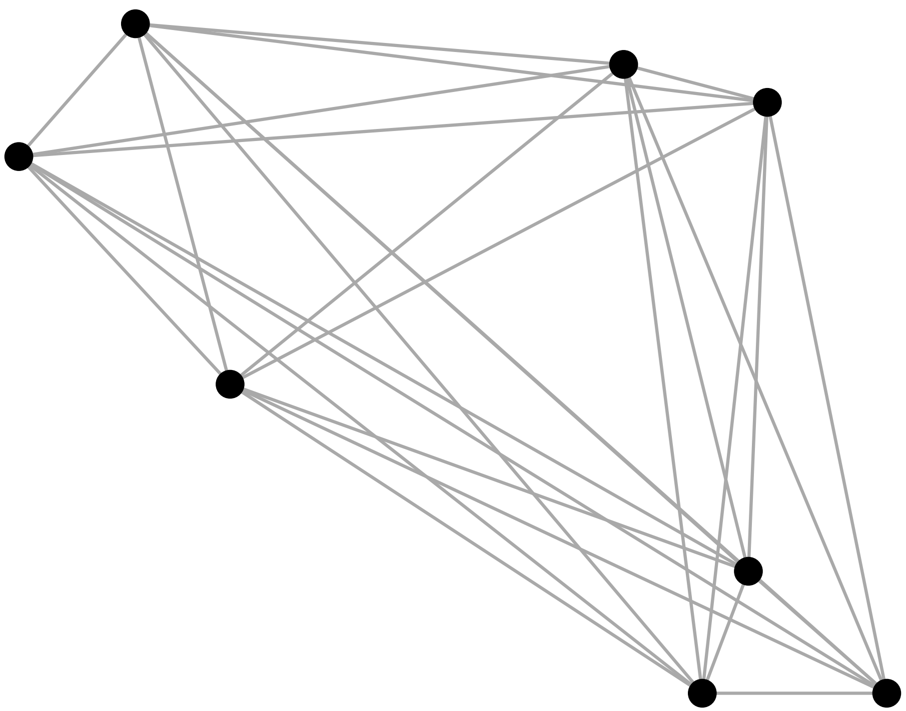
- $A_i, B_i \subset P$ für alle i
- $\{A_i, B_i\}$ s-well separated für alle i
- für zwei verschiedene Punkte $p, q \in P$ genau ein Index i mit $1 \leq i \leq m$ existiert, sodass
  - $p \in A_i$ und $q \in B_i$, oder
  - $q \in A_i$ und $p \in B_i$.

Beispiel

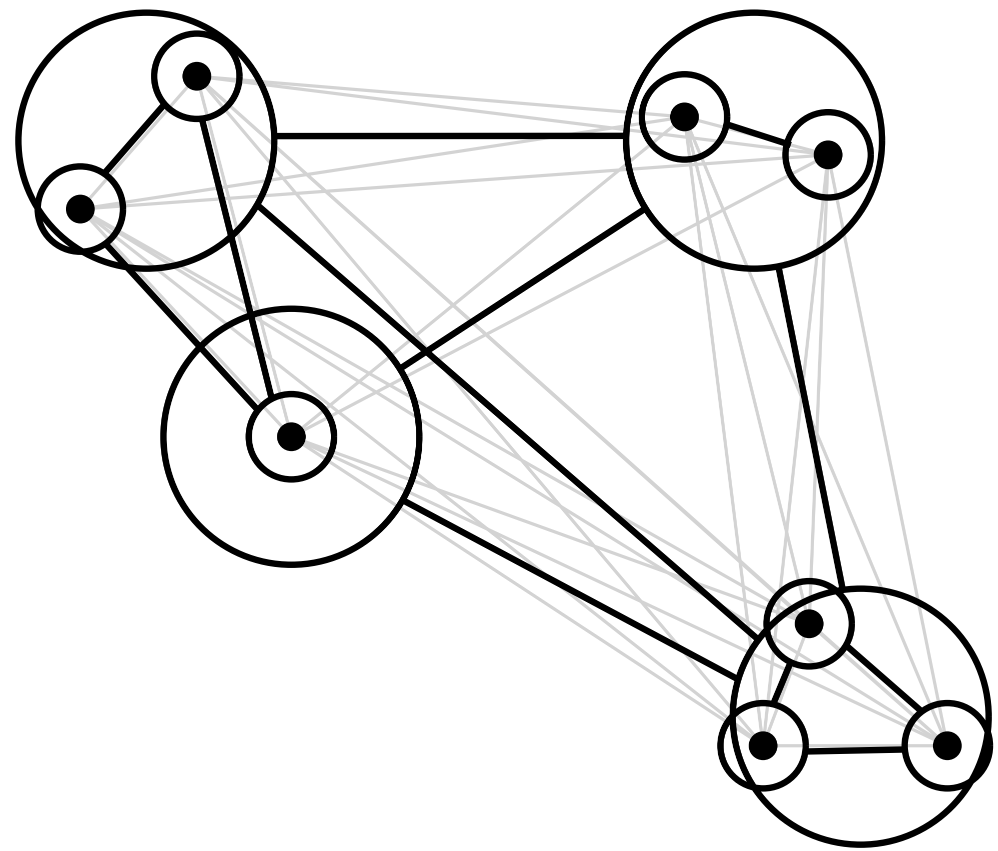


28 Punktpaare

Beispiel

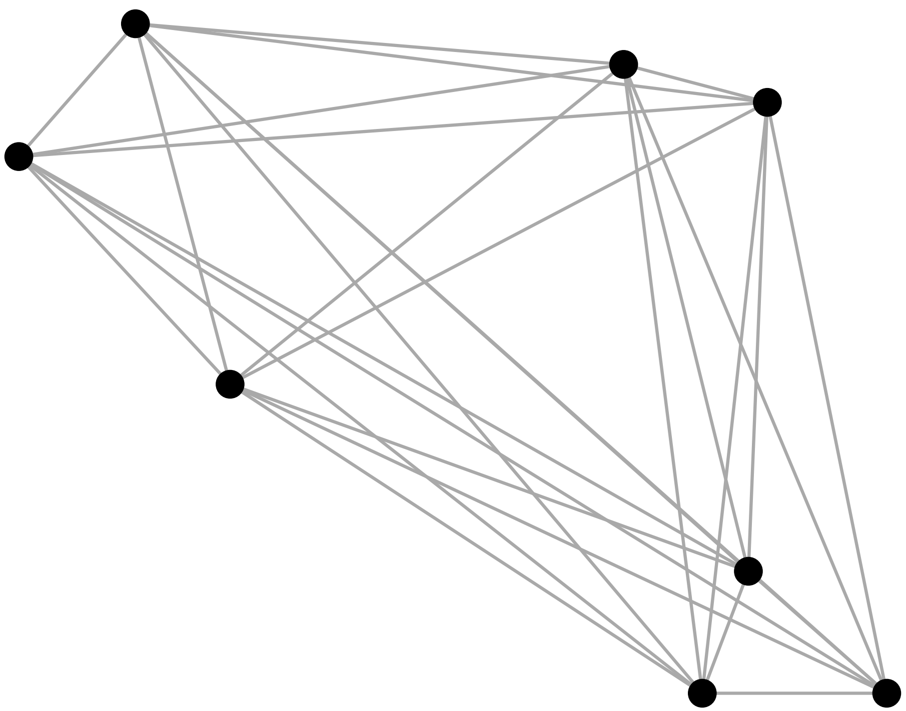


28 Punktpaare

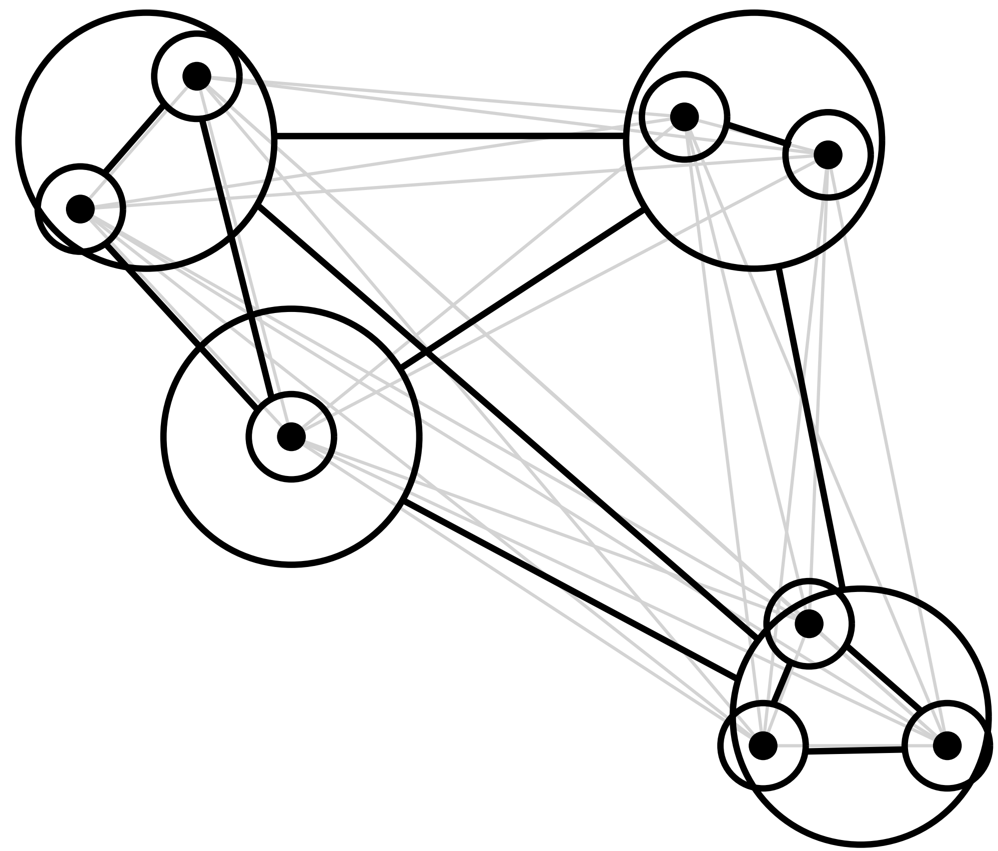


12 s-well separated pairs

Beispiel



28 Punktpaare



12 s-well separated pairs

Satz 3: Gegeben eine Punktmenge P im $\mathbb{R}^d$ und $s \geq 1$ so lässt sich eine s-WSPD mit $O(s^d n)$ Paaren in Zeit $O(n \log n + s^d n)$ konstruieren.

Aufgabe 1

WSPD

- x := 2/s + 1
- $S := \{x^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$

$\mathcal{W} = \{A_j, B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ beliebige s-WSPD für S $(s > 0)$

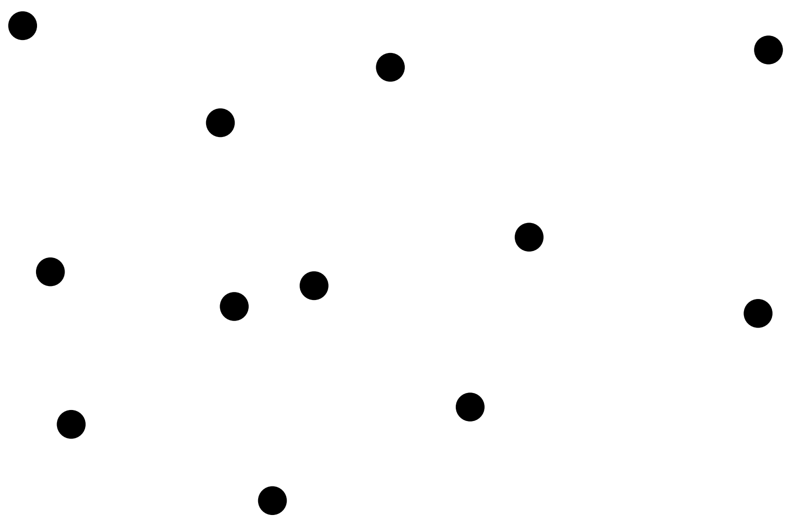
Zeige:

$$\sum_{j=1}^{m} (|A_j| + |B_j|) = \binom{n}{2} + m$$

Hinweis: Für jedes j ist wenigstens eine der Mengen A_j oder B_j ein Singleton.

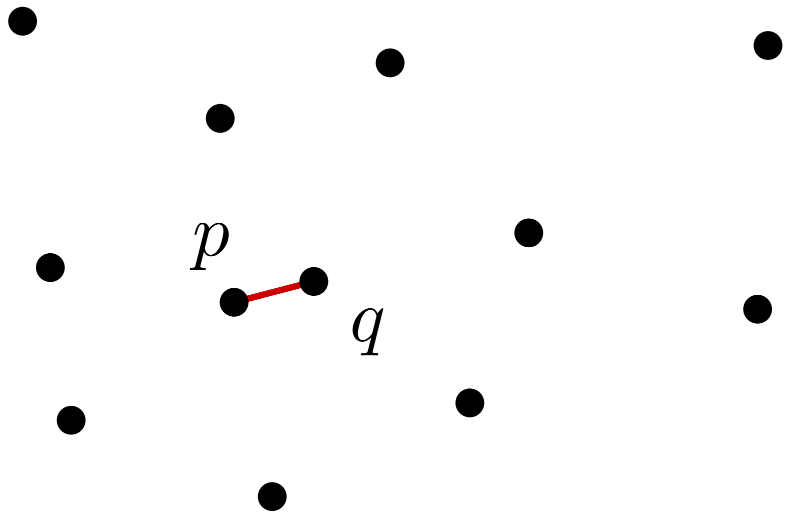
Aufgabe 2/3

- P: n Punkte aus dem $\mathbb{R}^d$



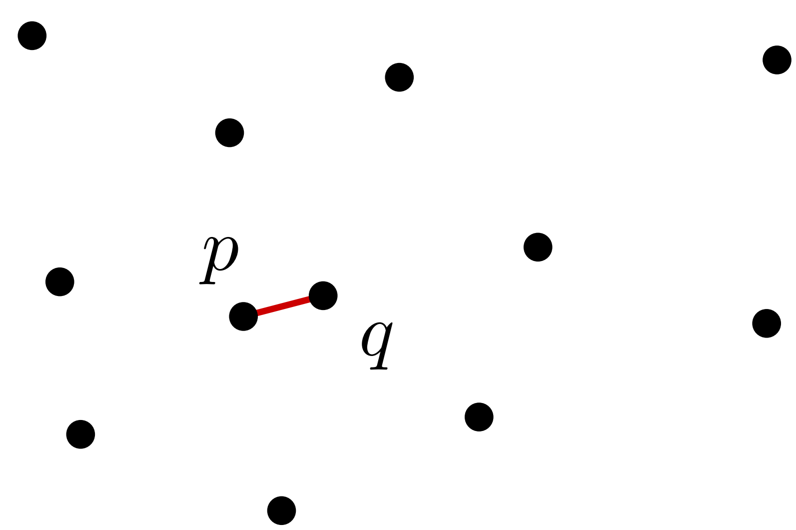
Aufgabe 2/3

- P: n Punkte aus dem $\mathbb{R}^d$
- $p, q \in P$ und Abstand zwischen p und q ist minimal



Aufgabe 2/3

- P: n Punkte aus dem $\mathbb{R}^d$
- $p, q \in P$ und Abstand zwischen p und q ist minimal



Gegeben: s-WSPD für P mit $s > 2$
Für ein Paar $\{A, B\}$ in $\mathcal{W}$ liegt $p \in A$ und $q \in B$

- Zeige, dass dann A ein Singleton ist.
- Zeige, dass die Größe von $\mathcal{W}$ mindestens $n/2$ ist.
- Zeige, dass $\{\{p\}, \{q\}\}$ in $\mathcal{W}$ vorkommt.