Übung Algorithmische Geometrie
Dualität

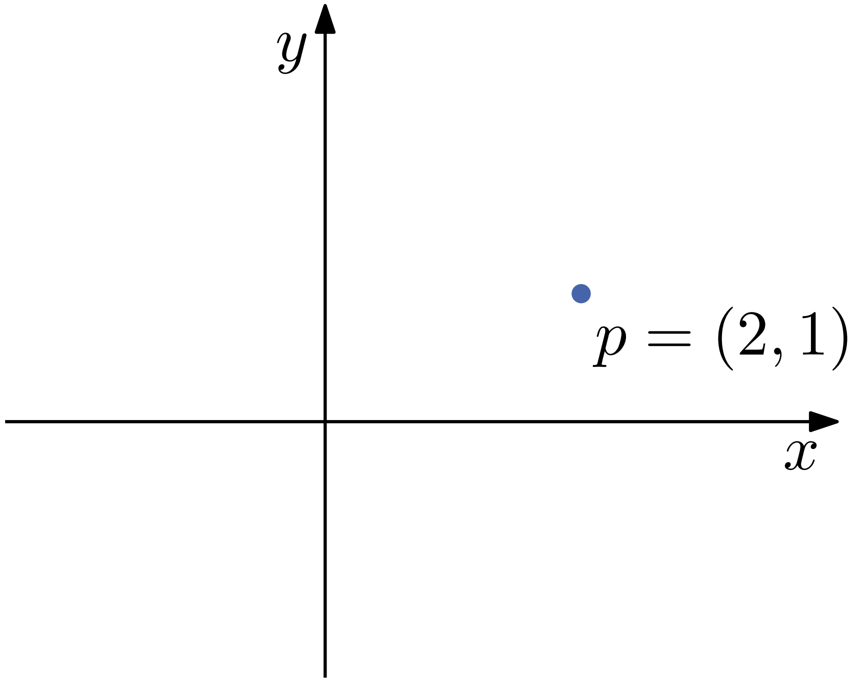
LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Benjamin Niedermann

25.06.2014

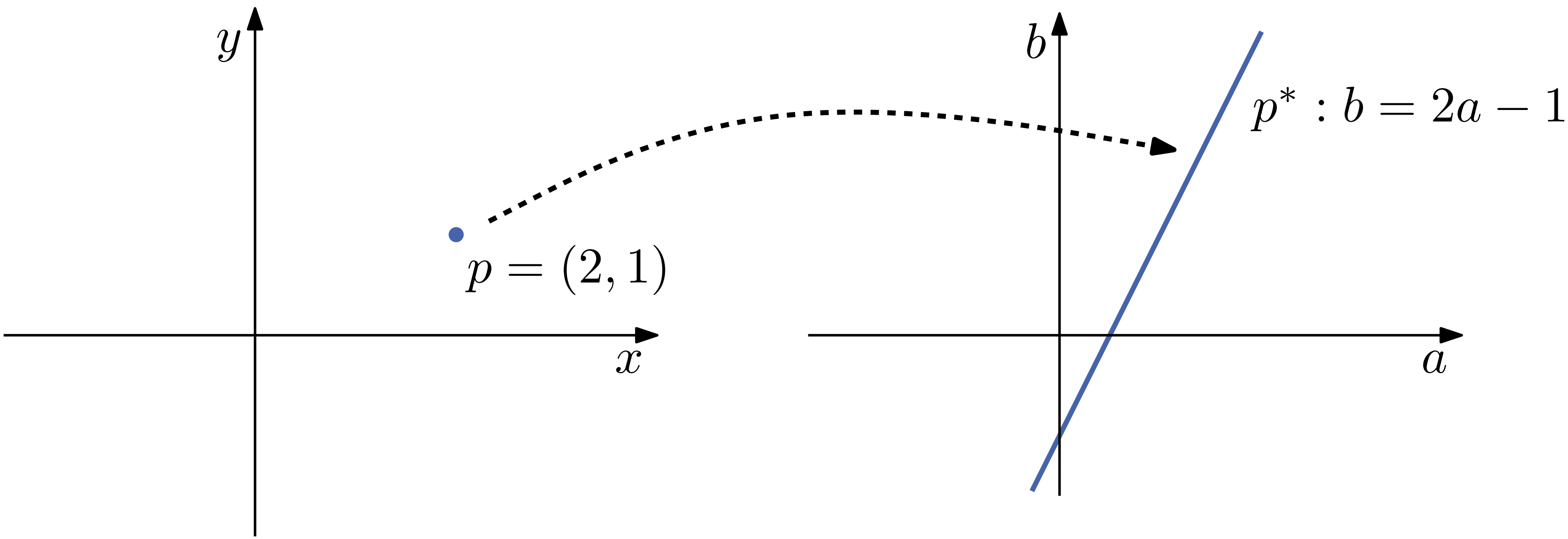
Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



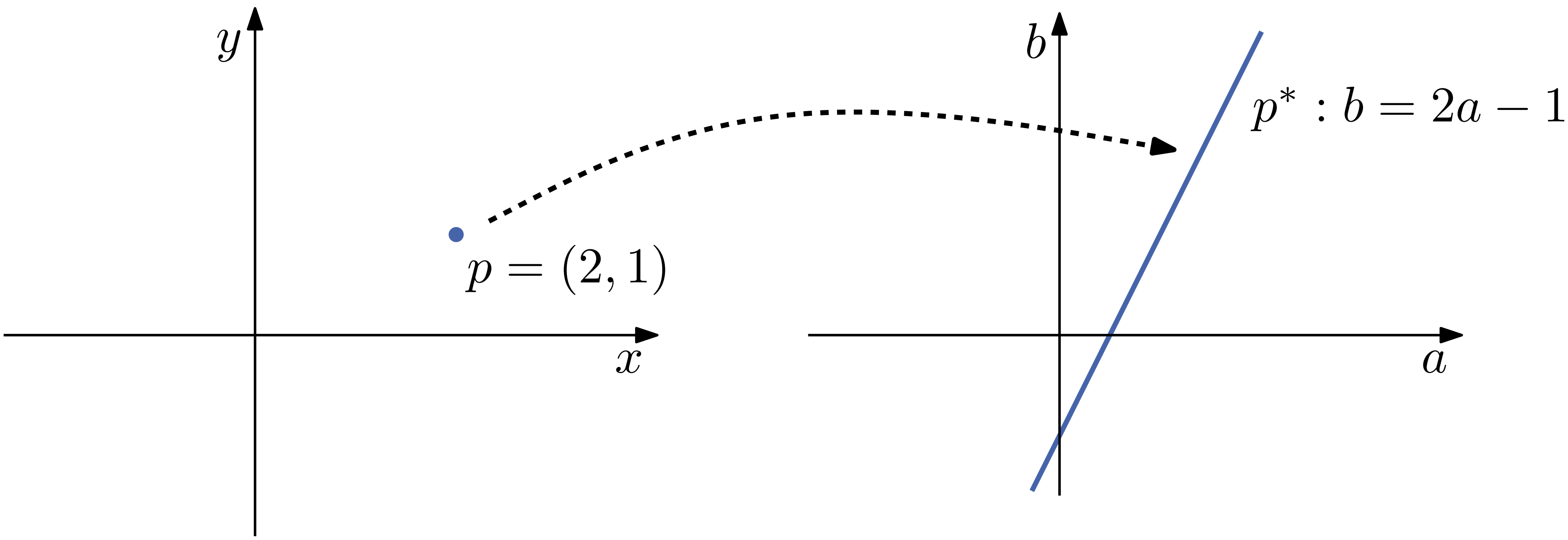
Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.

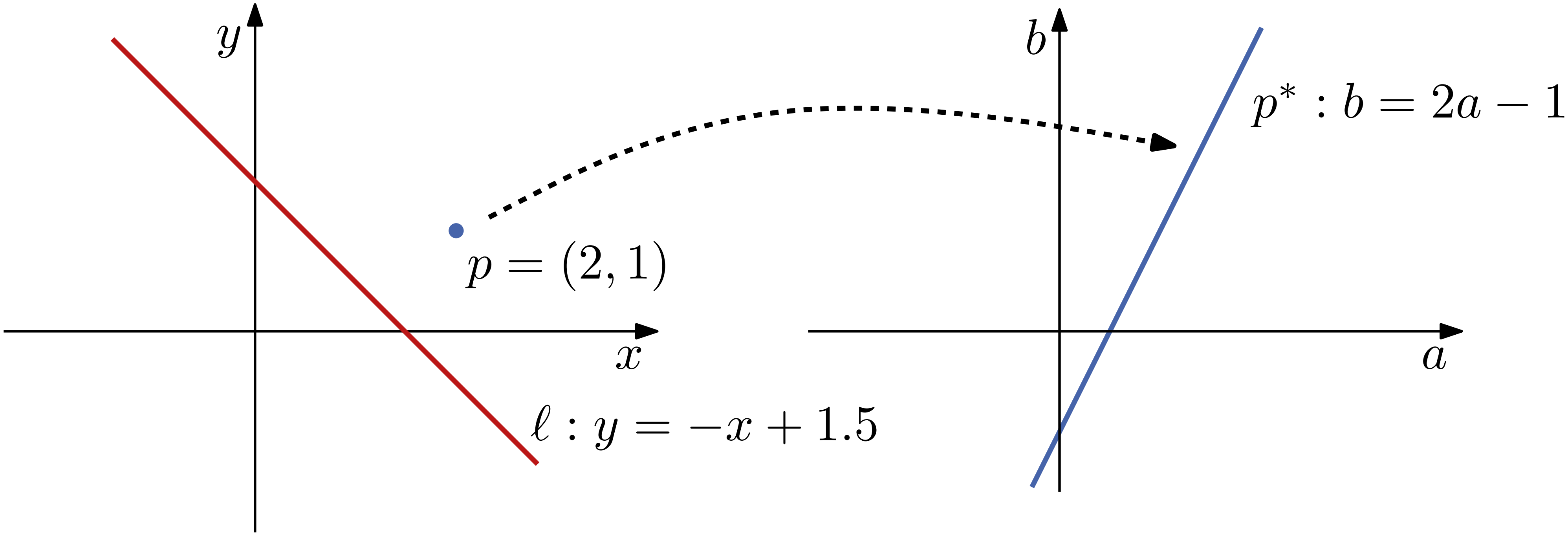


Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.

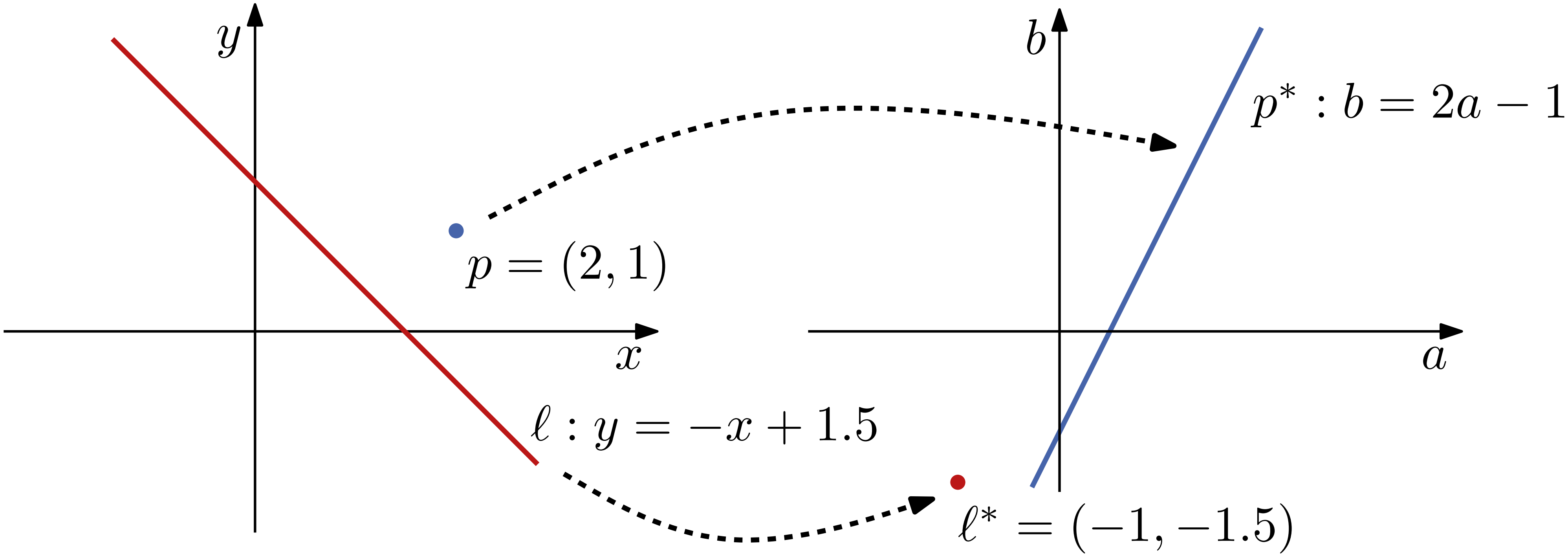


Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.

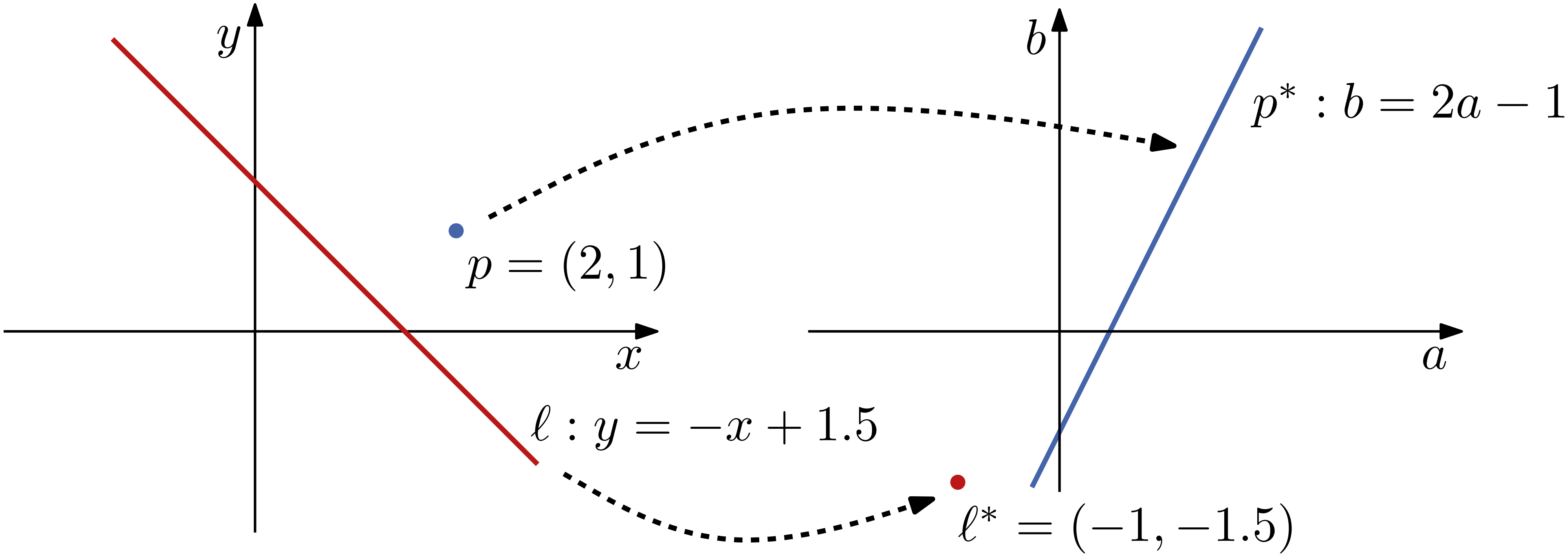


Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



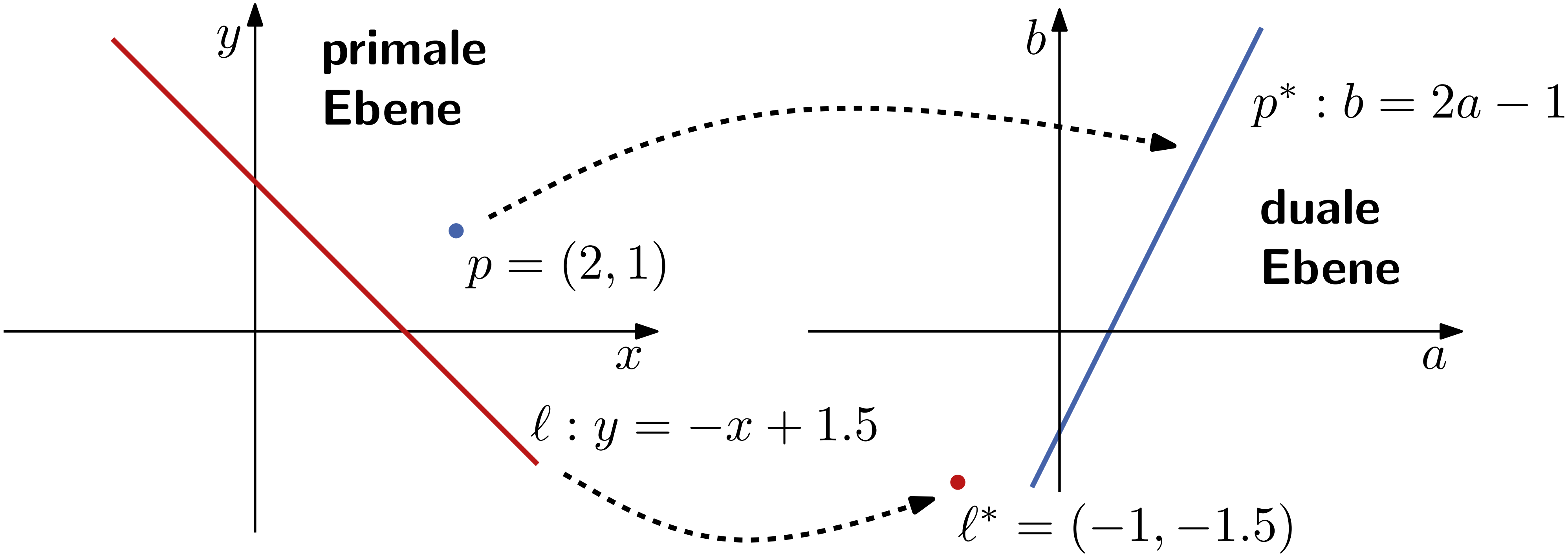
Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

$$\ell : y = mx + c \quad \mapsto \quad \ell^* = (m, -c)$$

Dualitätsabbildung

Bisher haben wir Dualität für planare Graphen bzw. Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

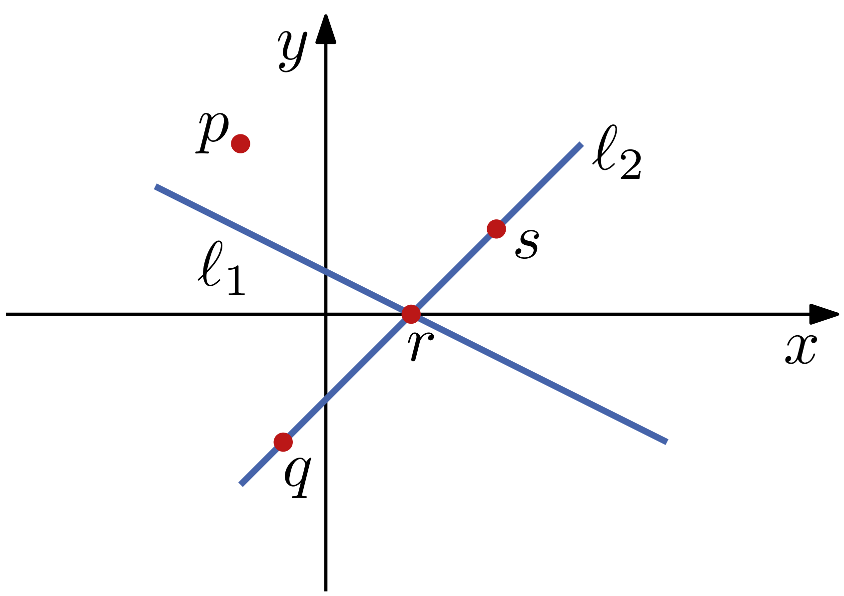
$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

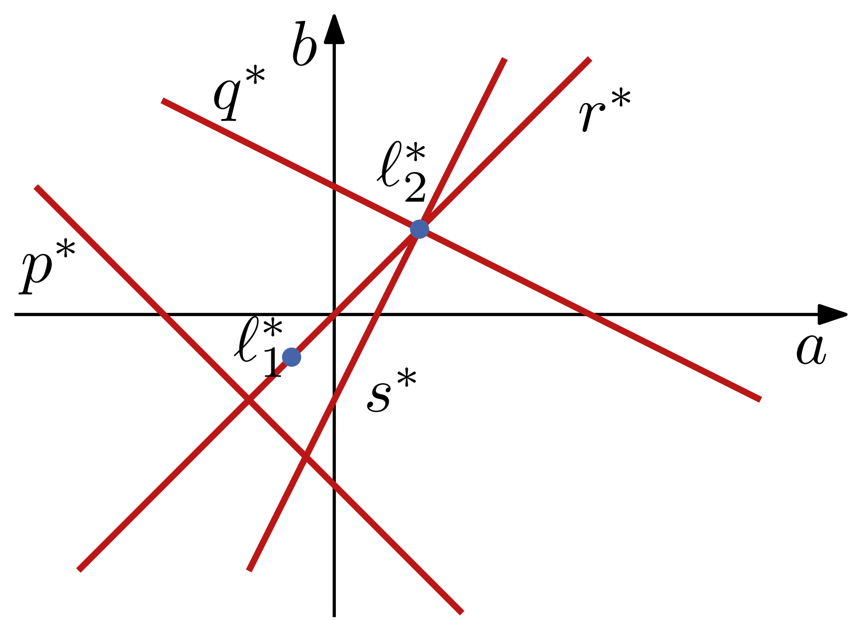
$$\ell : y = mx + c \quad \mapsto \quad \ell^* = (m, -c)$$

Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt





Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?

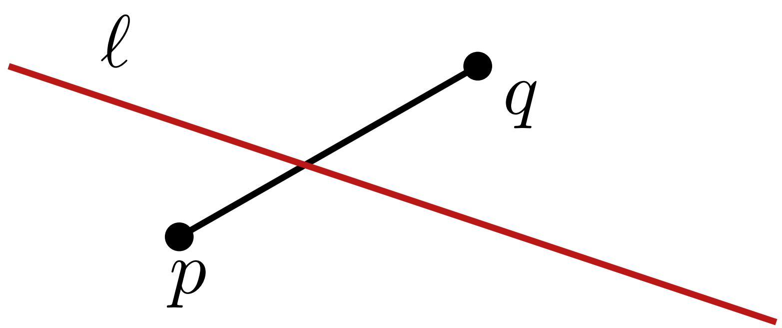
Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?



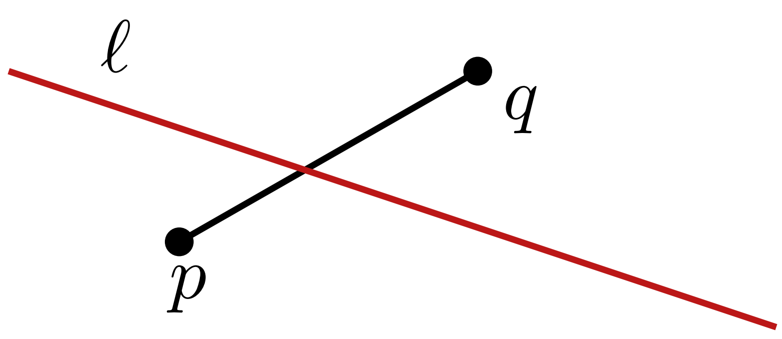
Eigenschaften

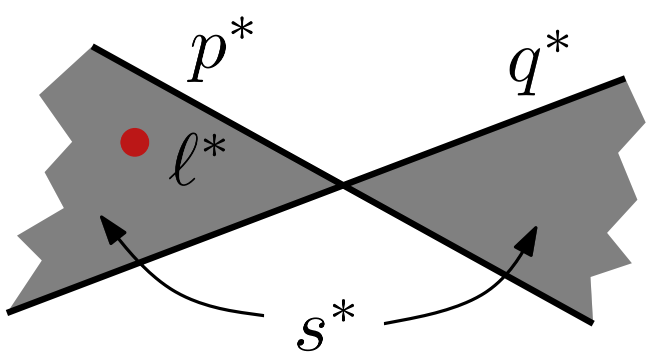
Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?

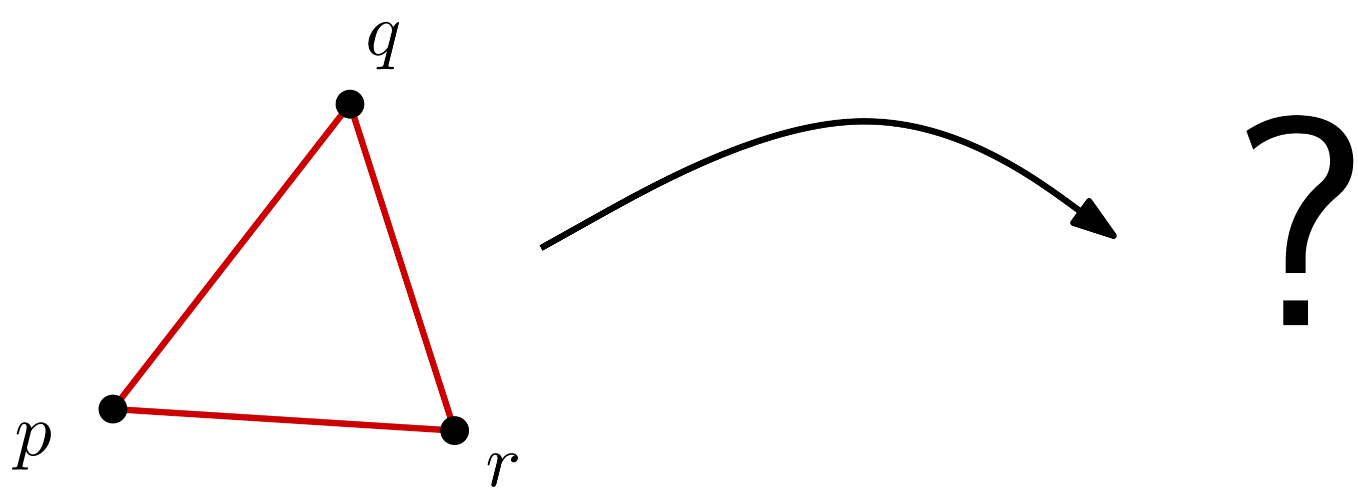




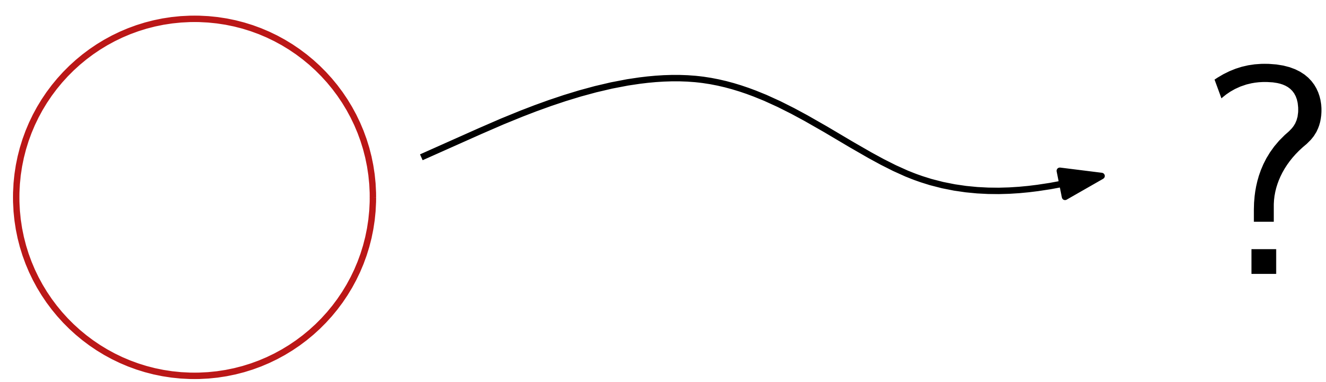
Aufgabe 1

Problem:
Was ist dual zu:

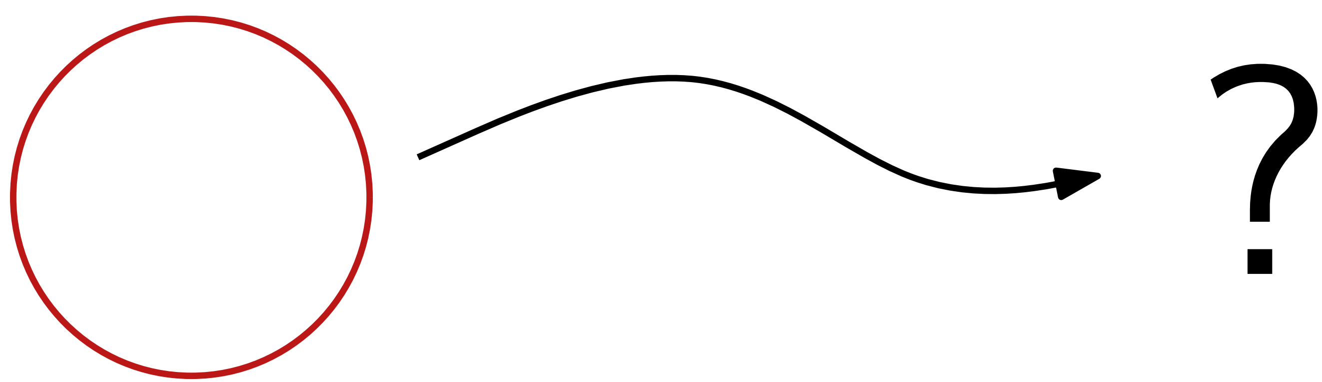
- Dreieck



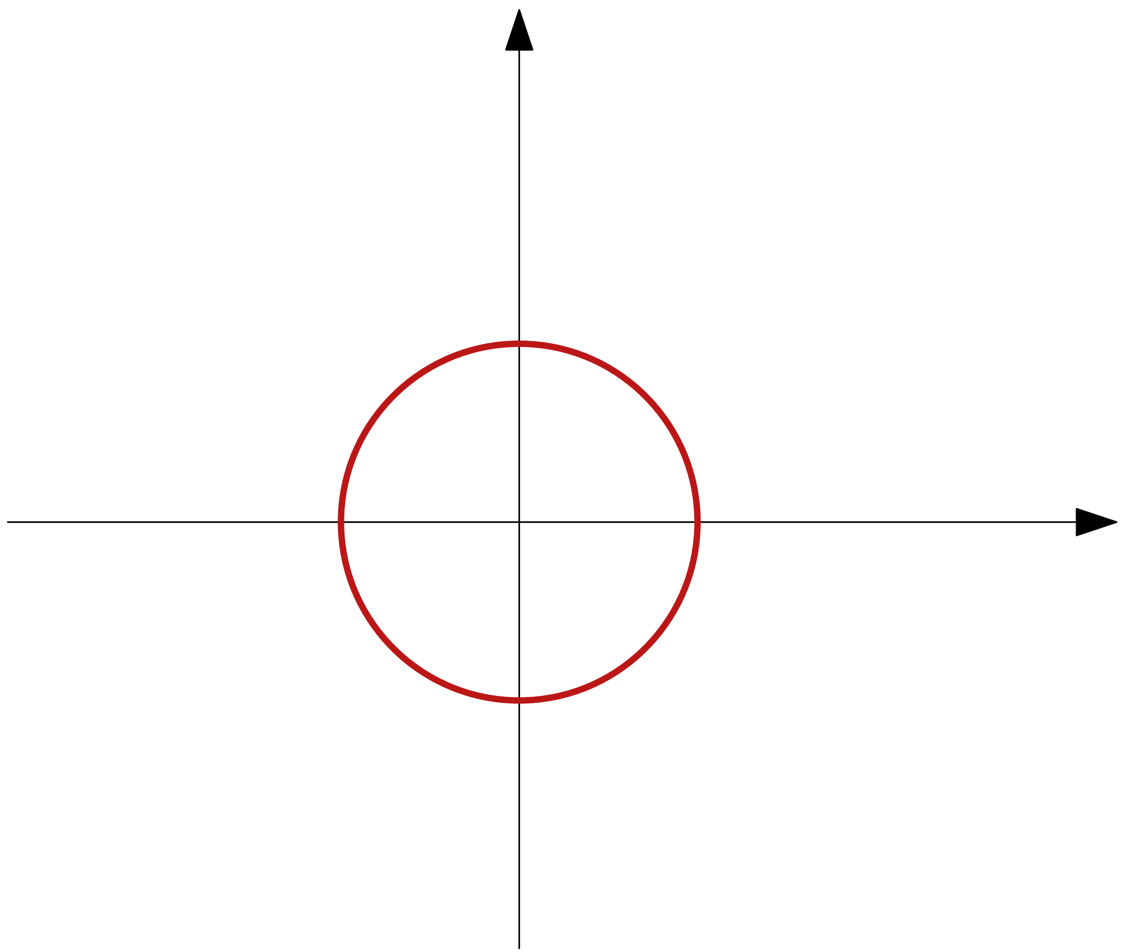
- Kreis



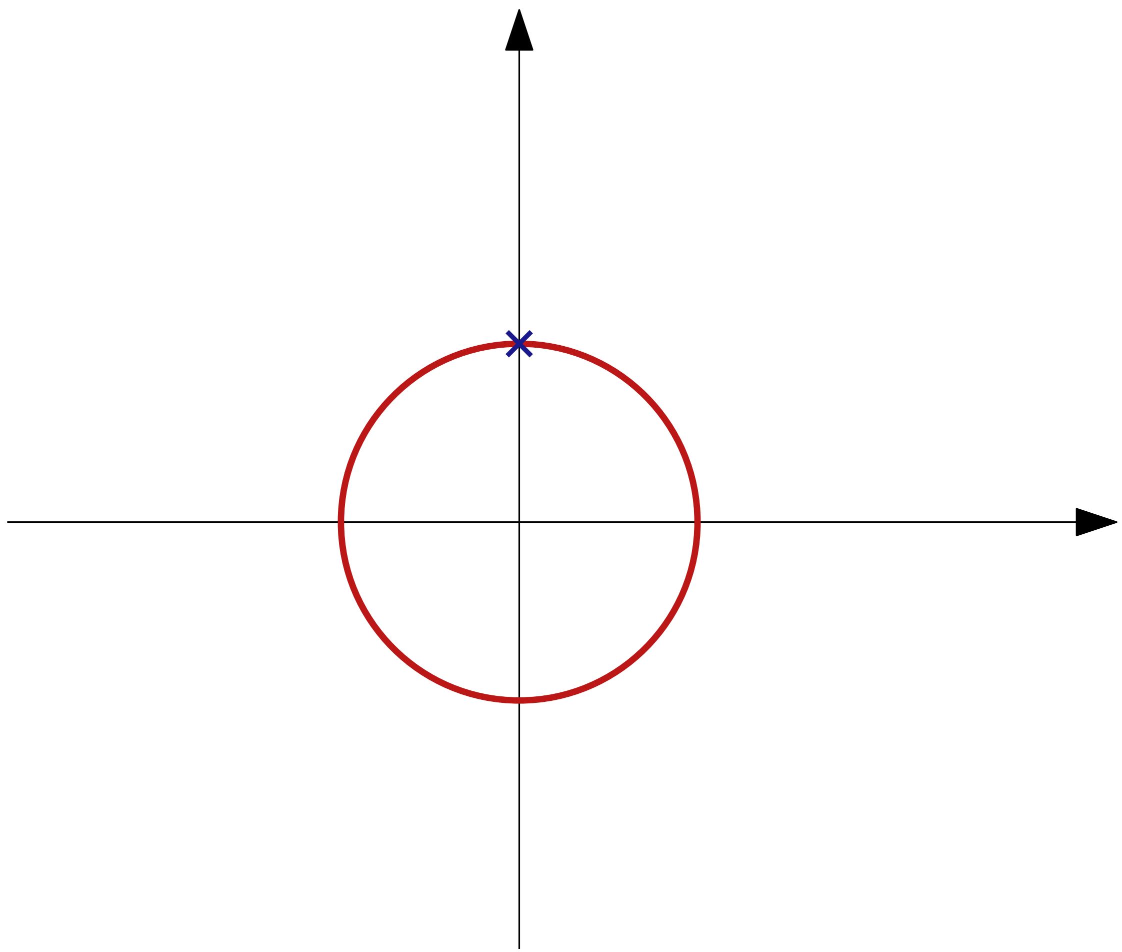
Aufgabe 1



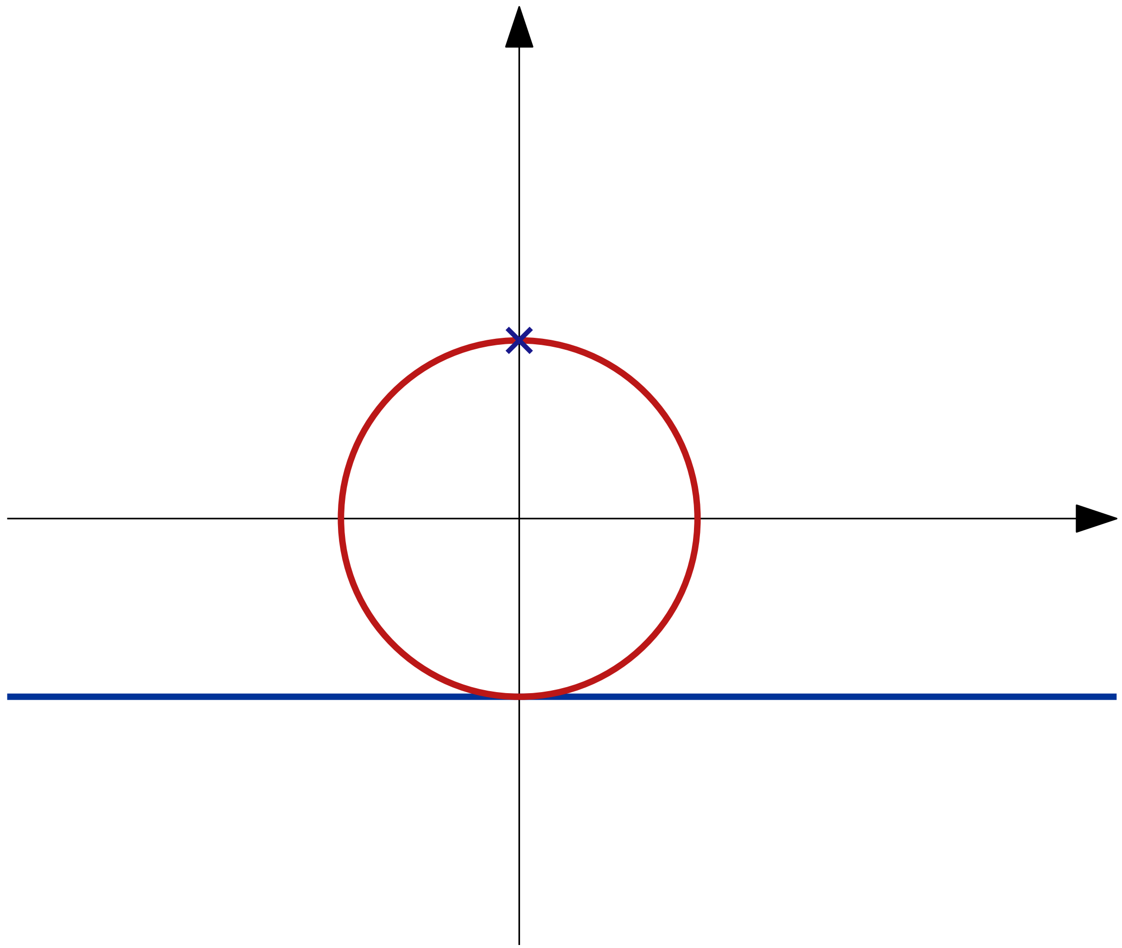
Aufgabe 1



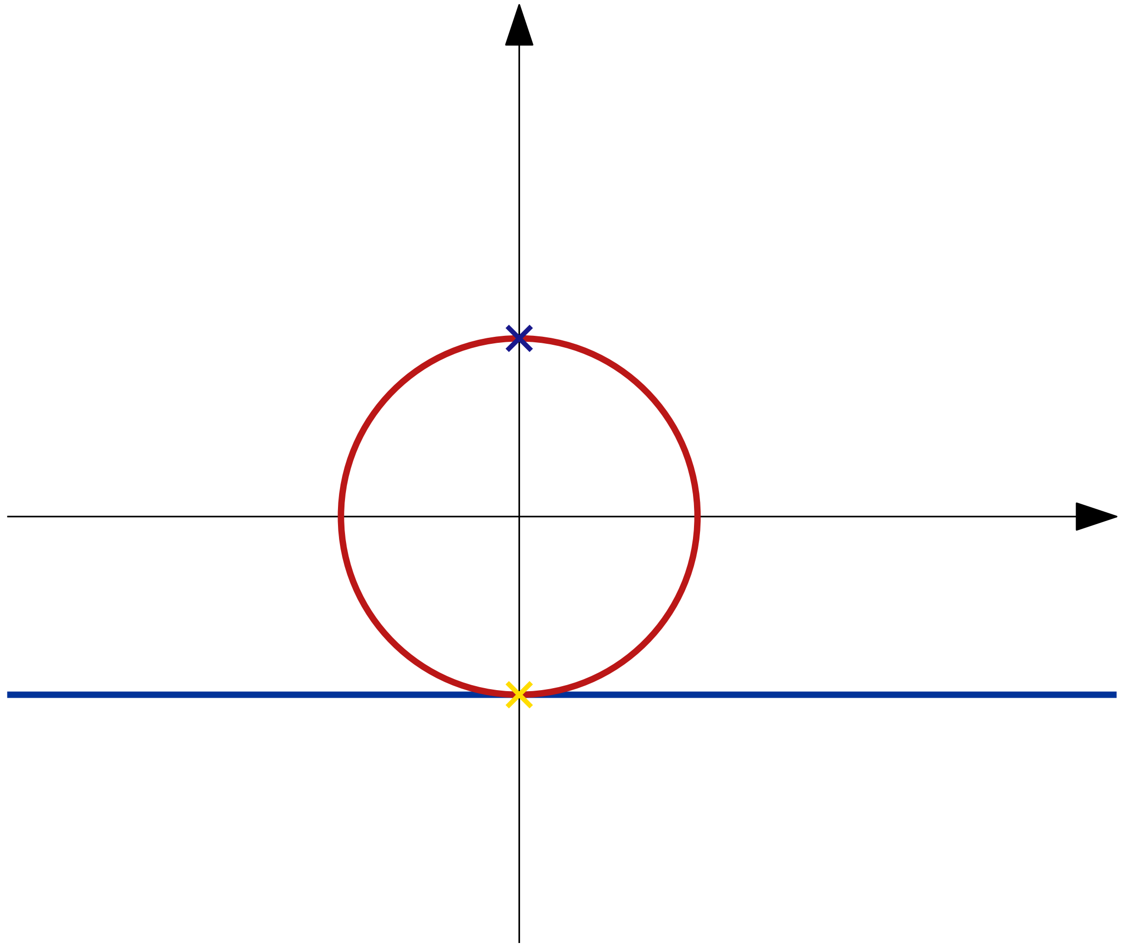
Aufgabe 1



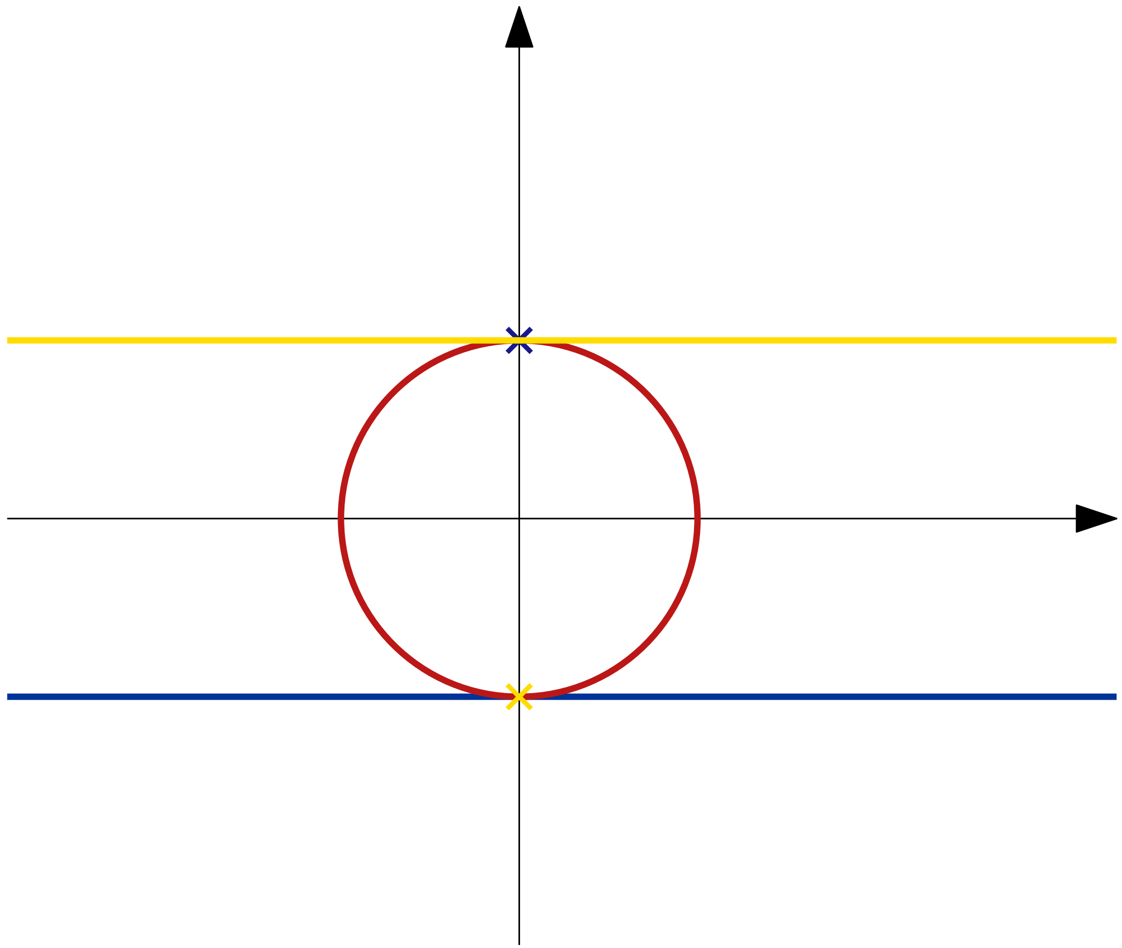
Aufgabe 1



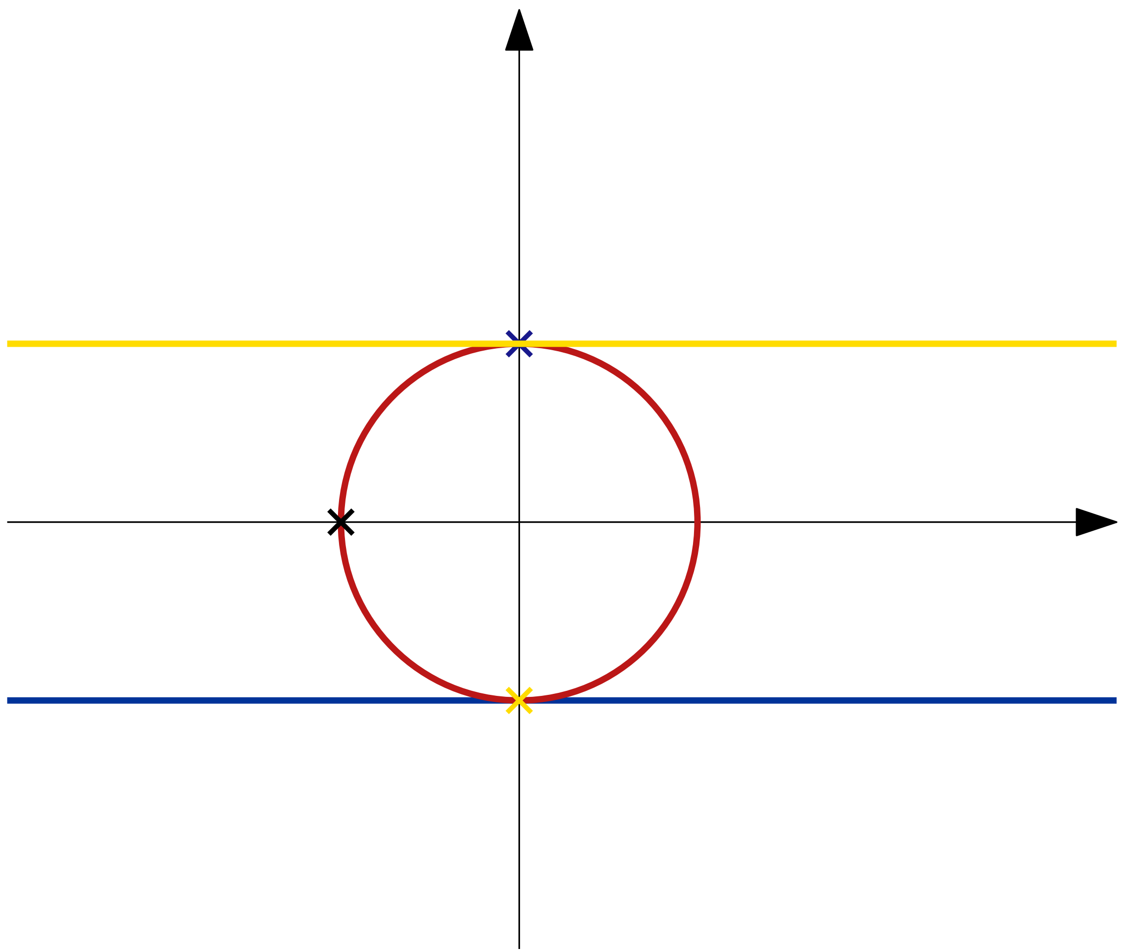
Aufgabe 1



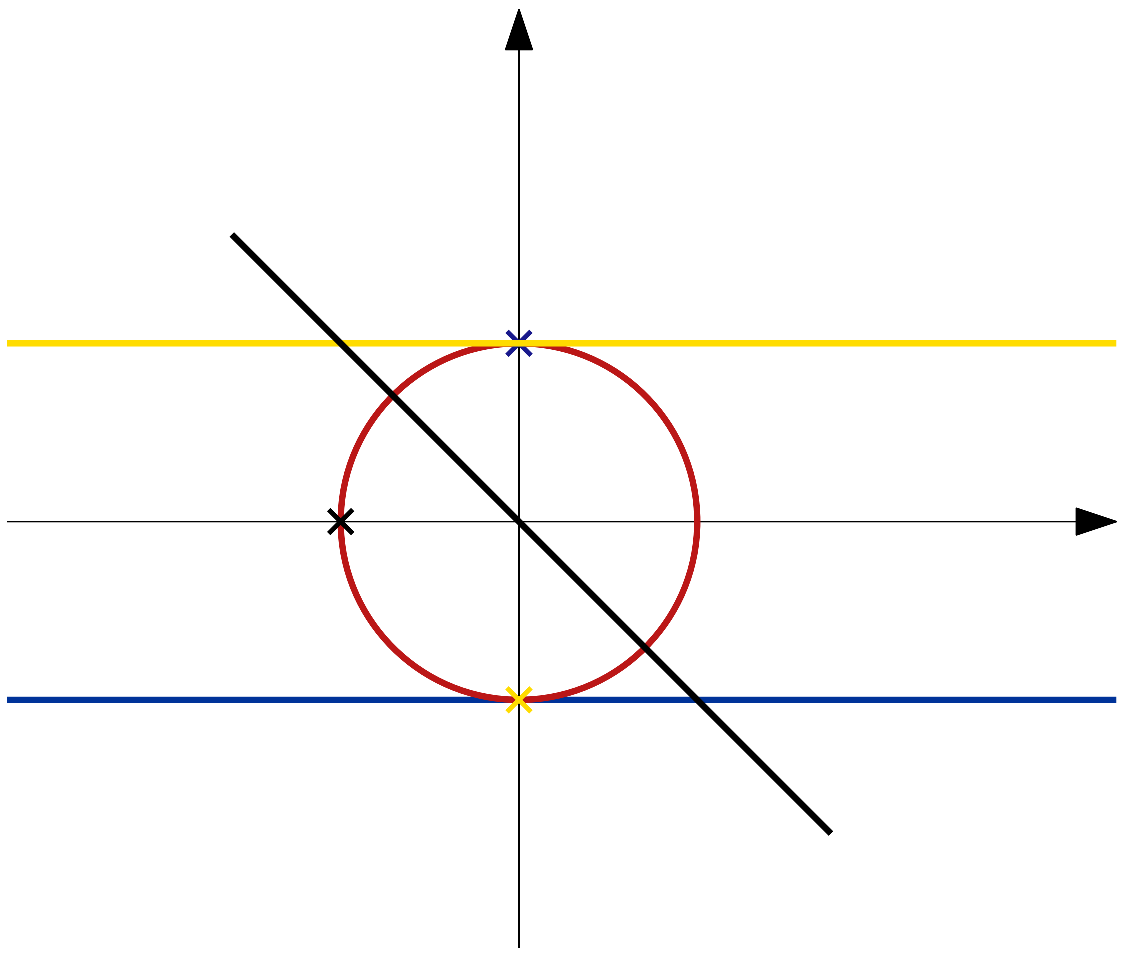
Aufgabe 1



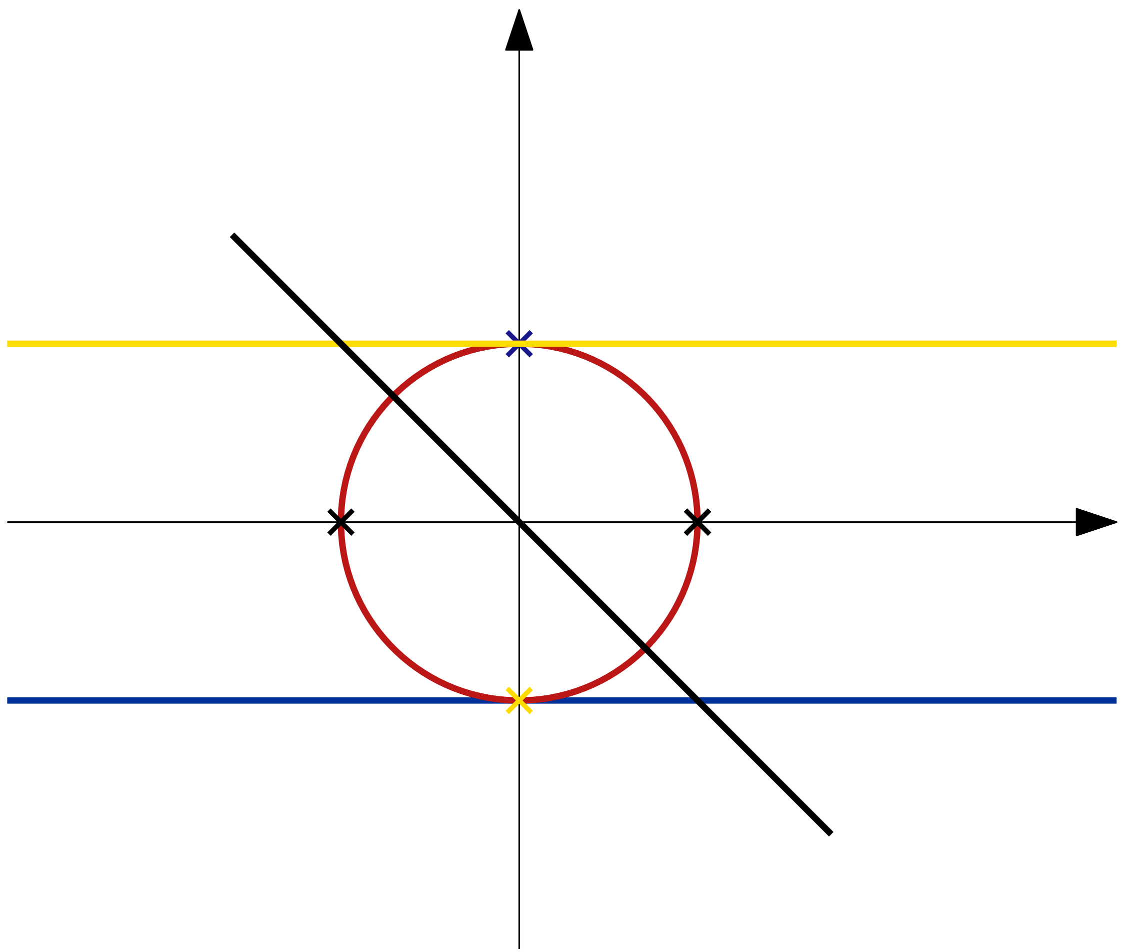
Aufgabe 1



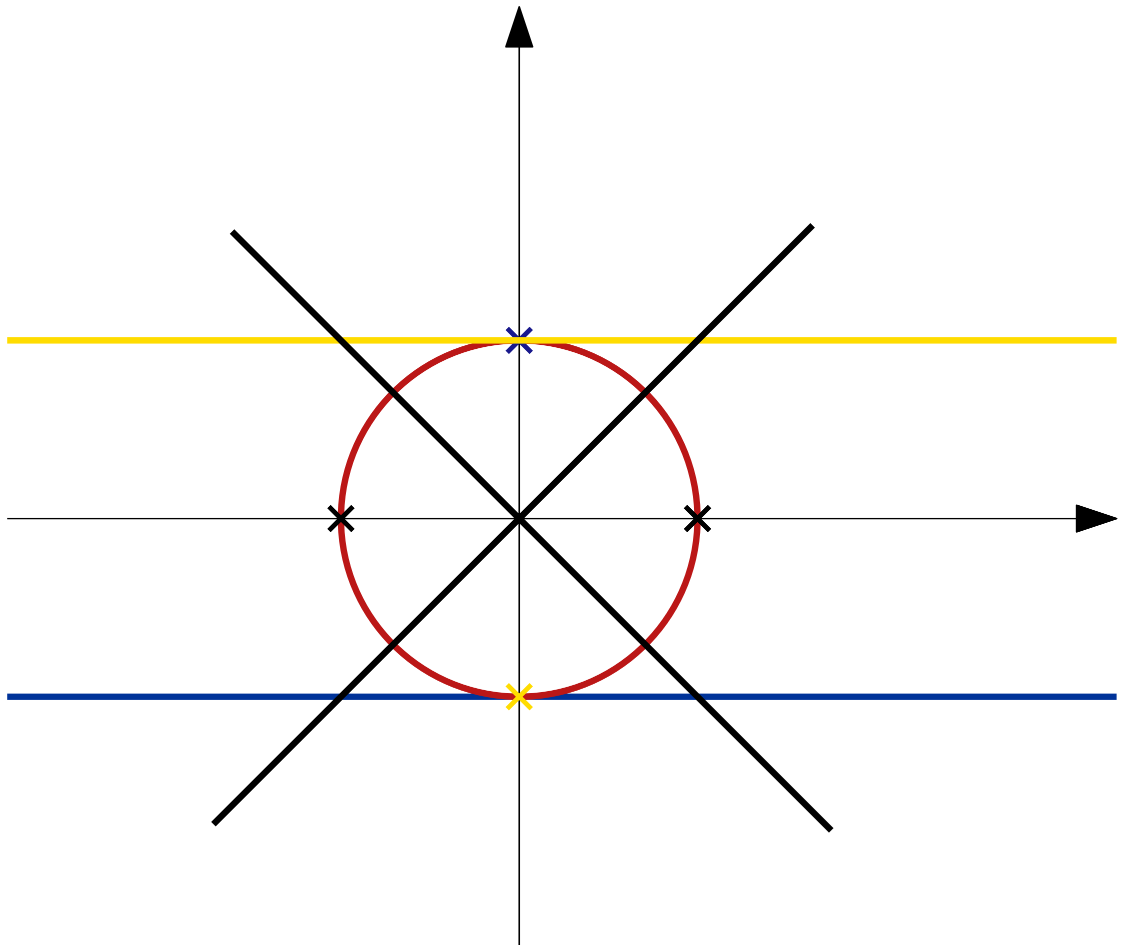
Aufgabe 1



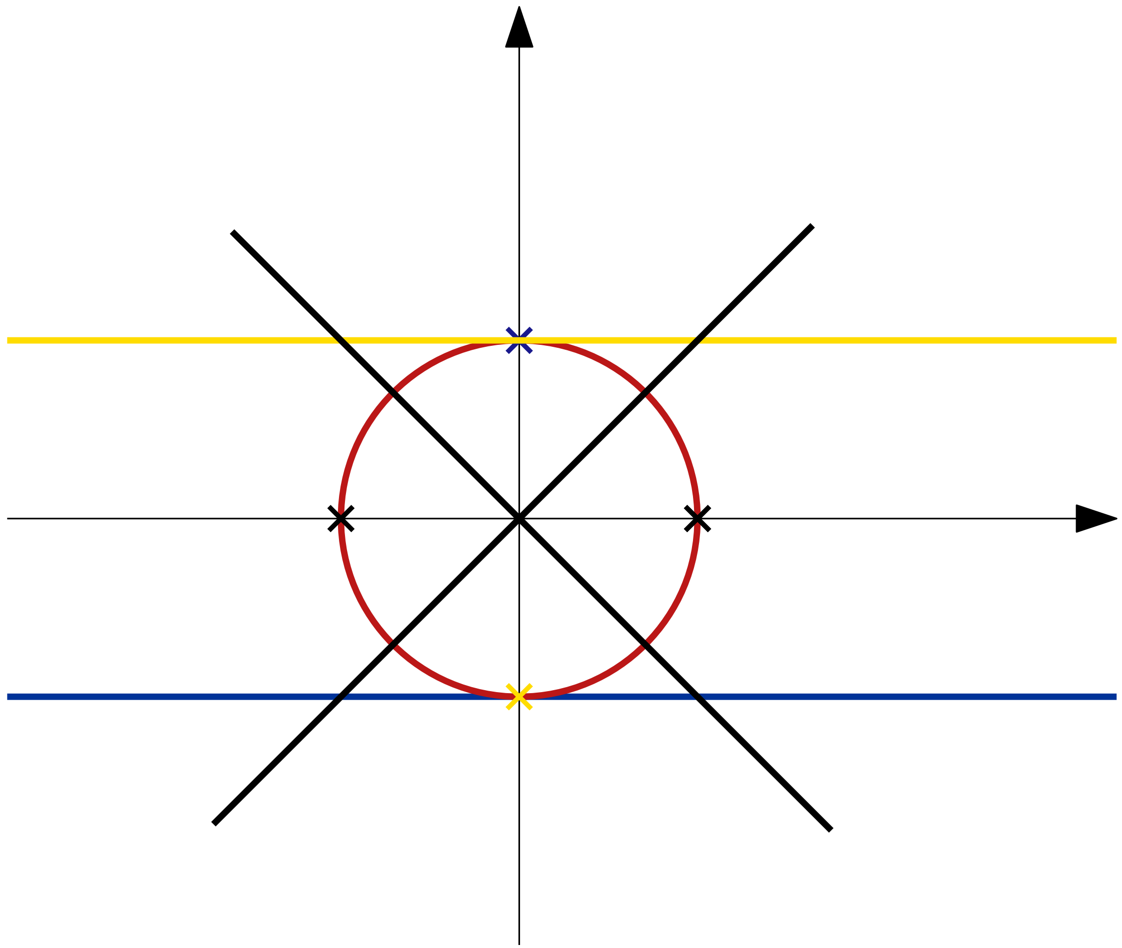
Aufgabe 1



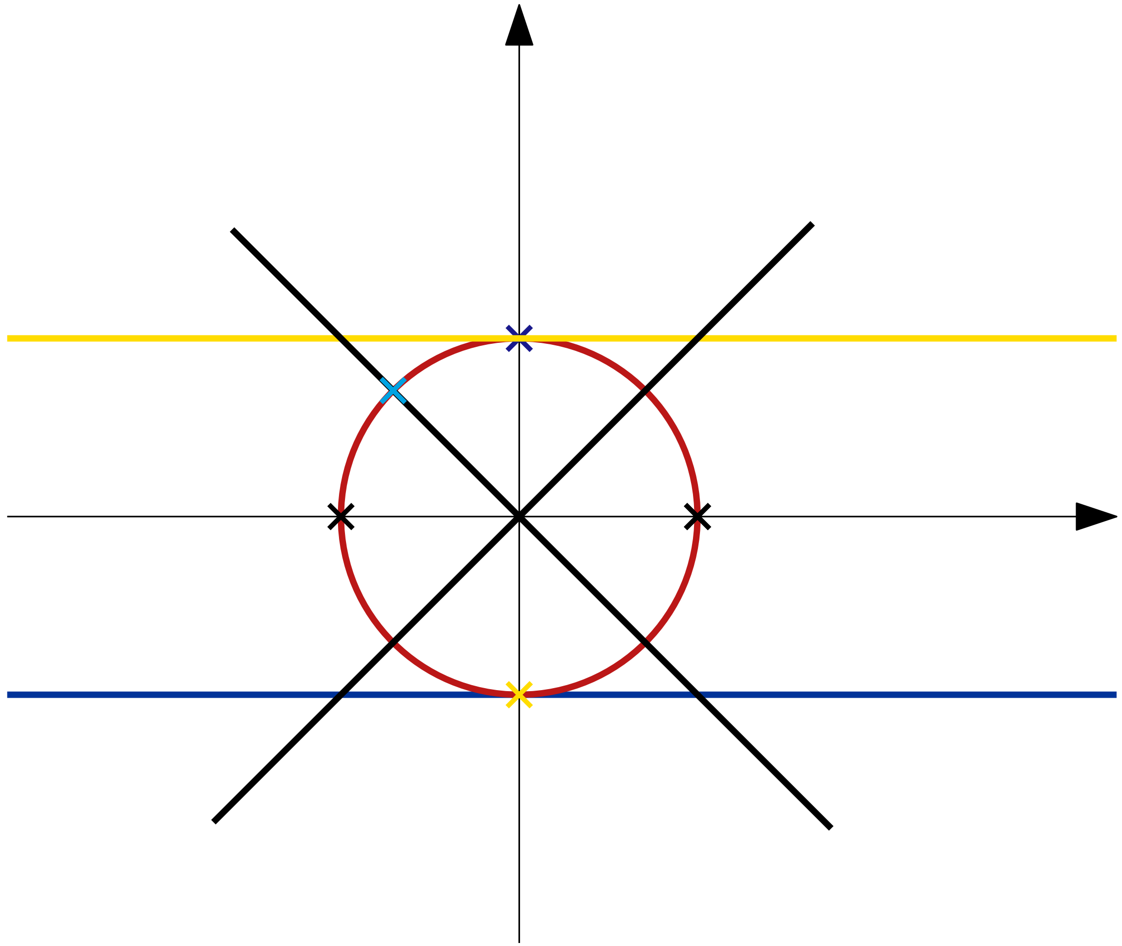
Aufgabe 1



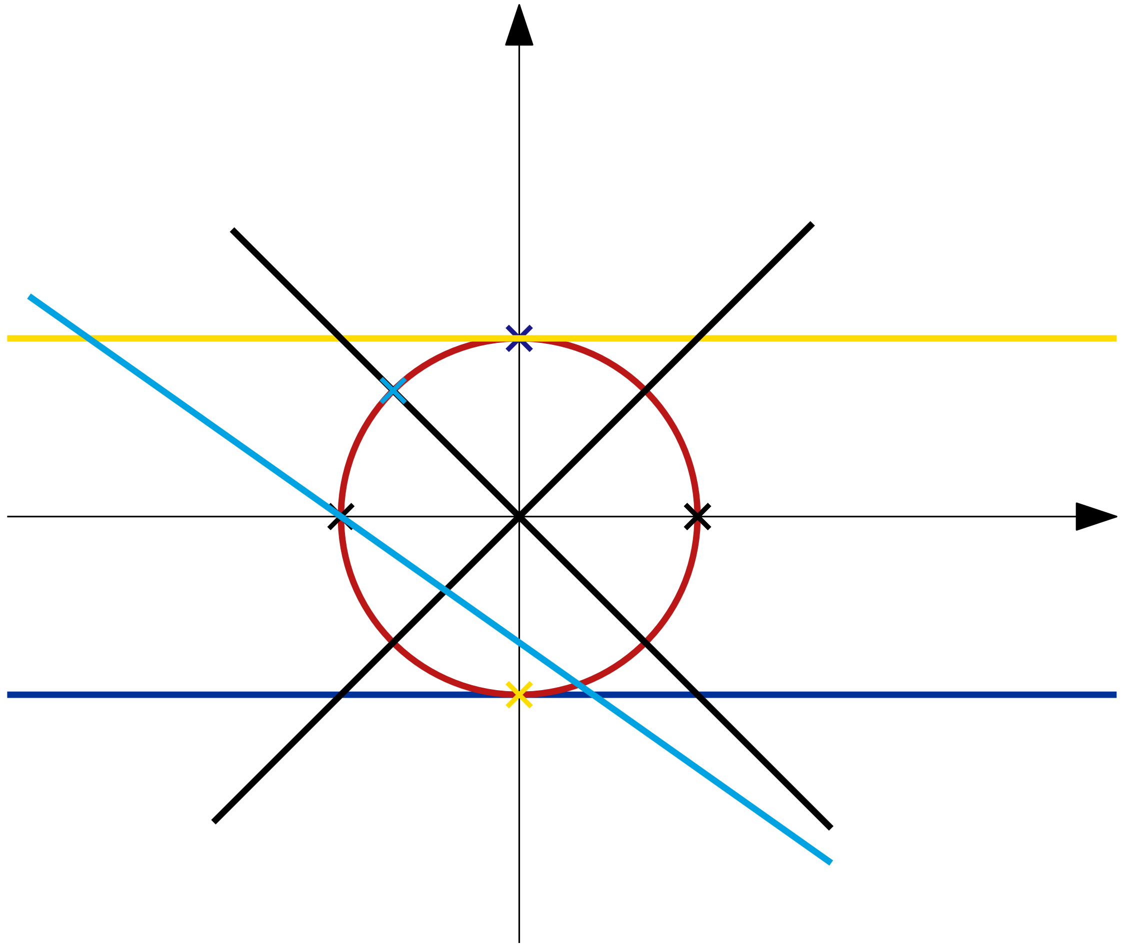
Aufgabe 1



Aufgabe 1



Aufgabe 1



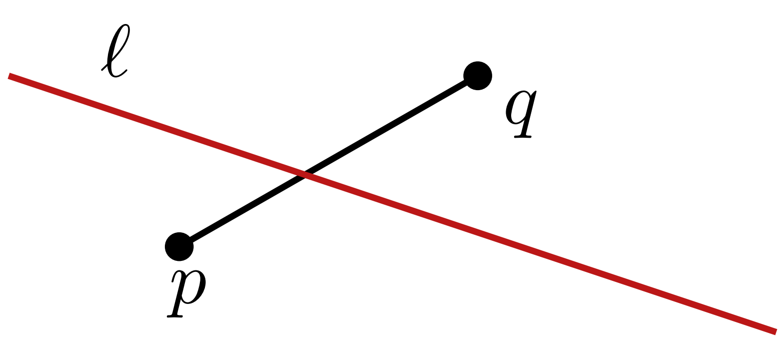
Eigenschaften

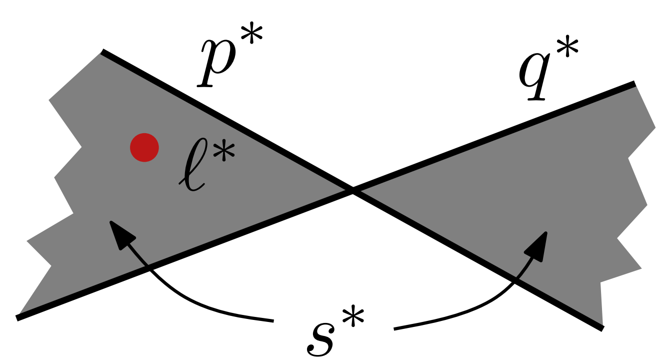
Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in p
  $\Leftrightarrow p^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
  $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?





Aufgabe 2

Problem:

Gegeben: Menge L bestehend aus n Geraden

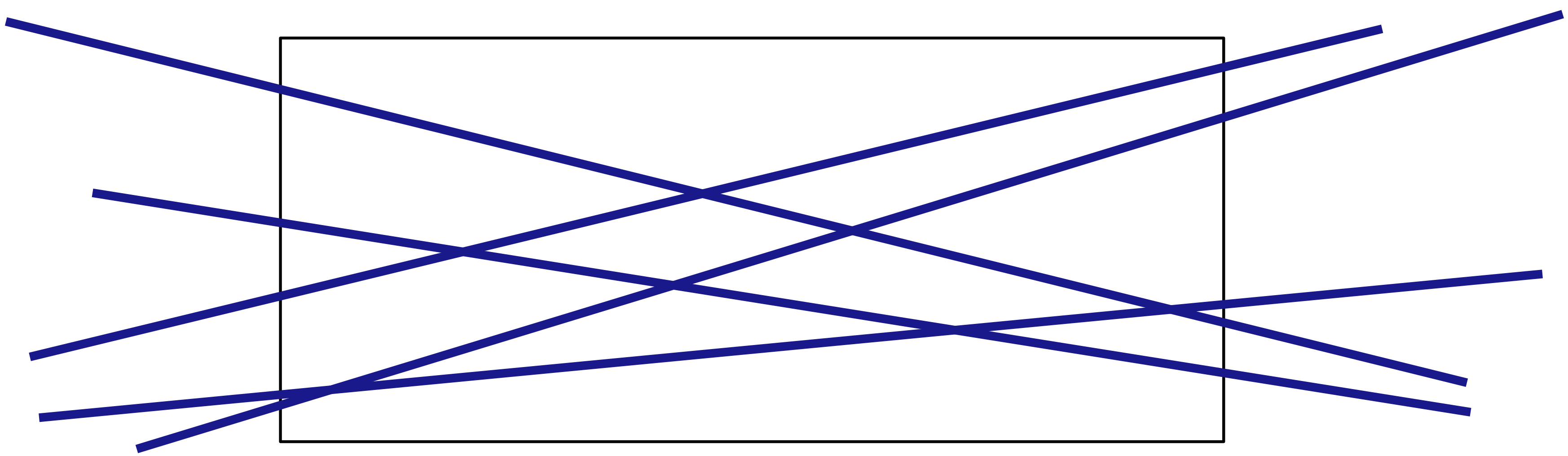
Gesucht: Achsenparallels Rechteck welches alle Knoten des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ enthält.

Aufgabe 2

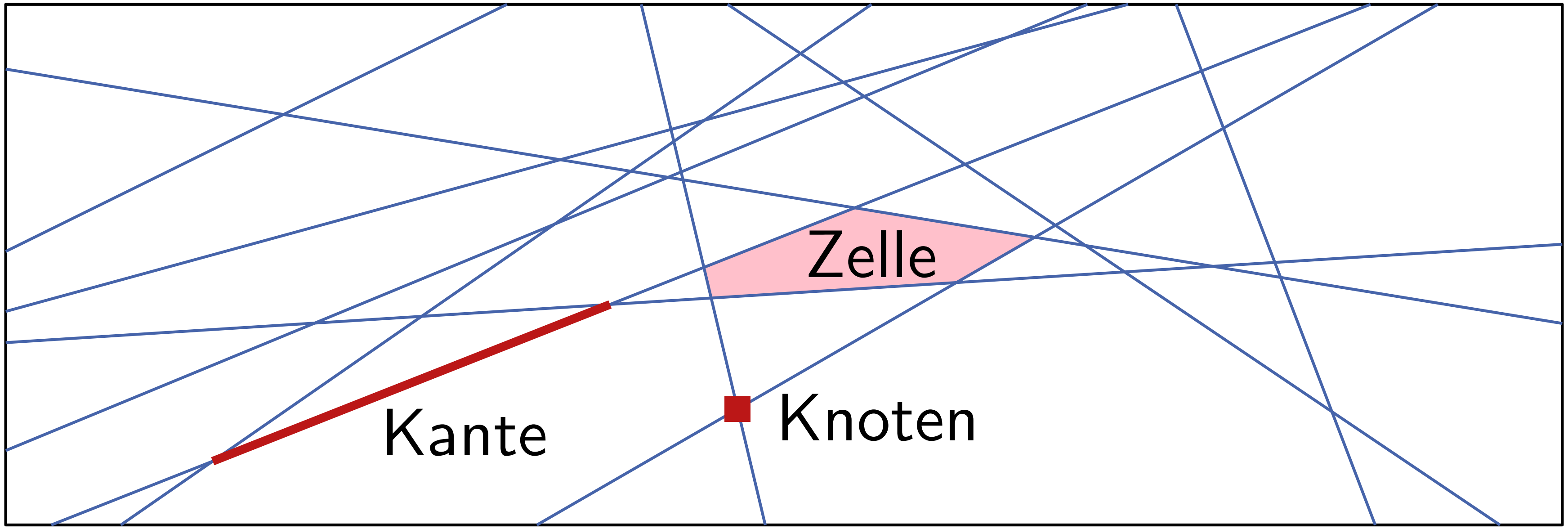
Problem:

Gegeben: Menge L bestehend aus n Geraden

Gesucht: Achsenparallels Rechteck welches alle Knoten des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ enthält.



Geradenarrangements



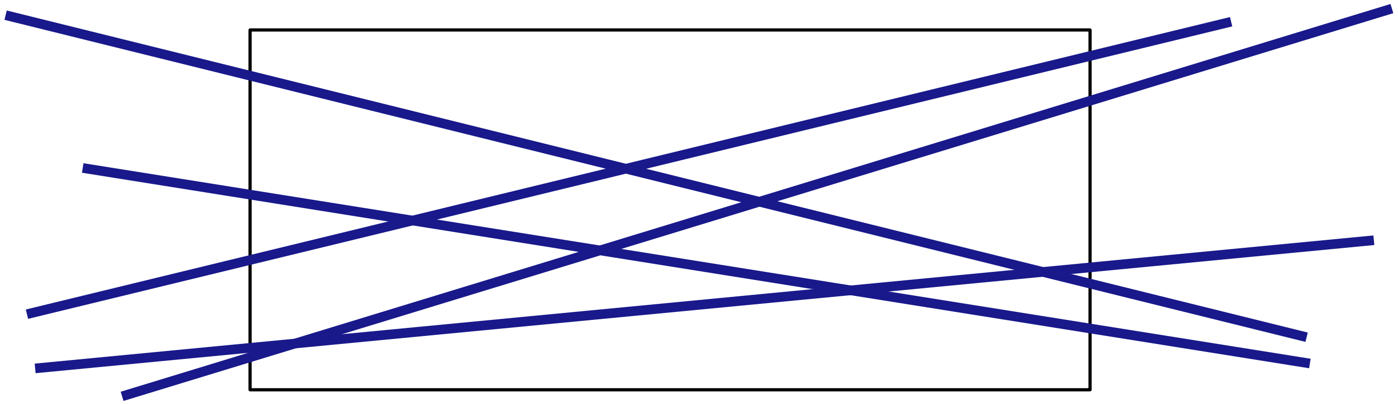
Def.: Eine Menge L von Geraden definiert eine Unterteilung $\mathcal{A}(L)$ der Ebene (das **Geradenarrangement**) in Knoten, Kanten und Zellen (tlws. unbeschränkt).
$\mathcal{A}(L)$ heißt **einfach**, wenn keine drei Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei Geraden parallel sind.

Aufgabe 2

Problem:

Gegeben: Menge L bestehend aus n Geraden

Gesucht: Achsenparallels Rechteck welches alle Knoten des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ enthält.



Bestimme linke Seite des Rechtecks (analog andere Seiten):

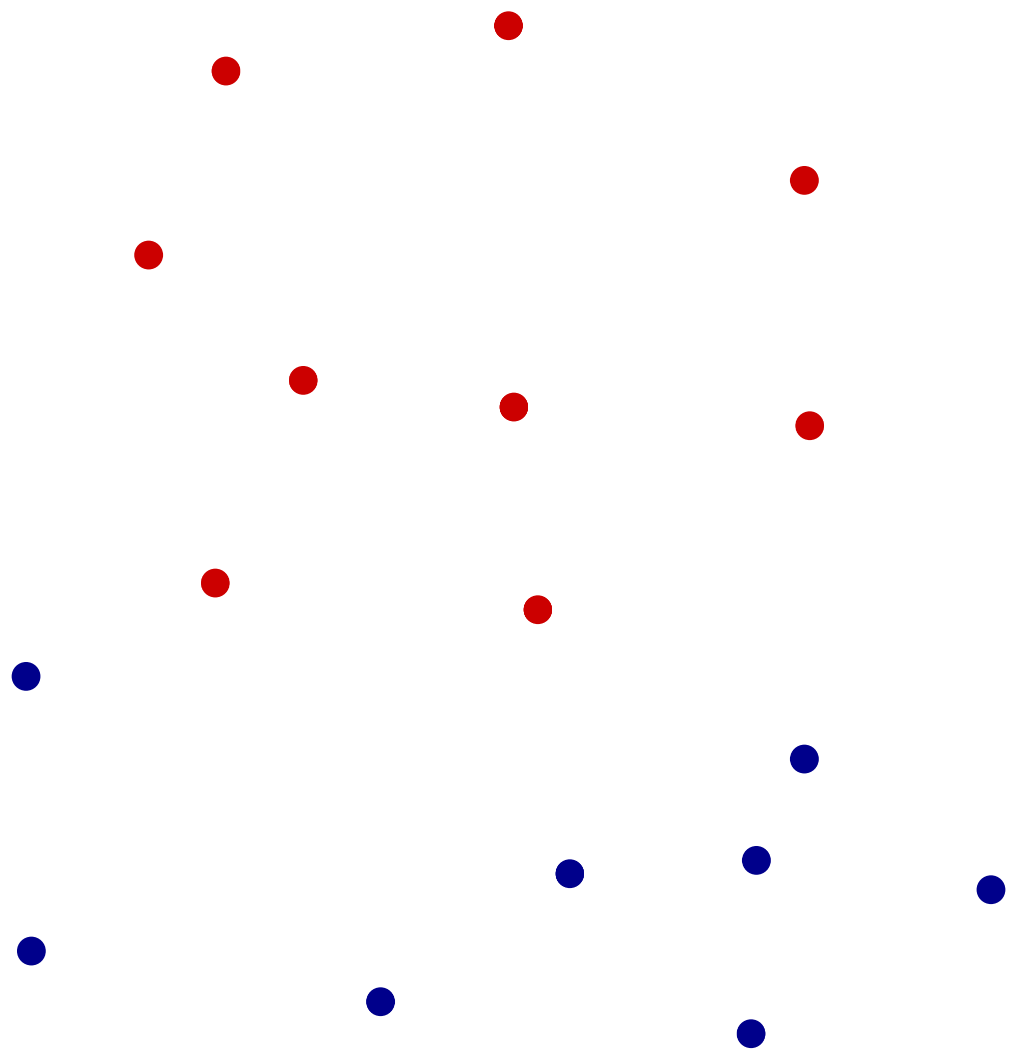
Sortiere Geraden nach Steigung (zum Beispiel aufsteigend).

Bestimme Schnittpunkt von in der Ordnung benachbarten Geraden.

Linke Seite des Rechtecks muss links des linkesten Schnittpunkts liegen.

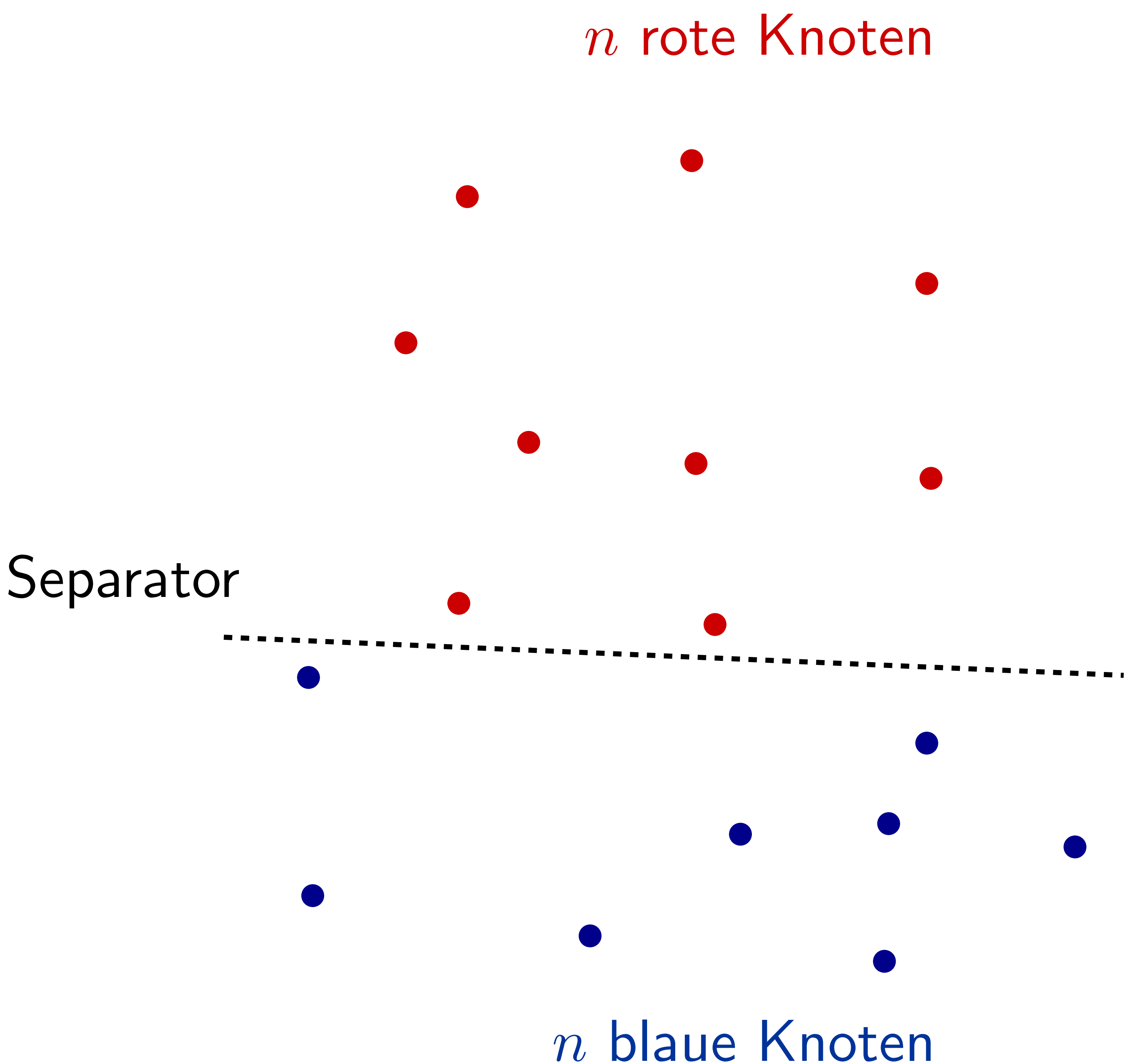
Aufgabe 3

n rote Knoten



n blaue Knoten

Aufgabe 3



Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

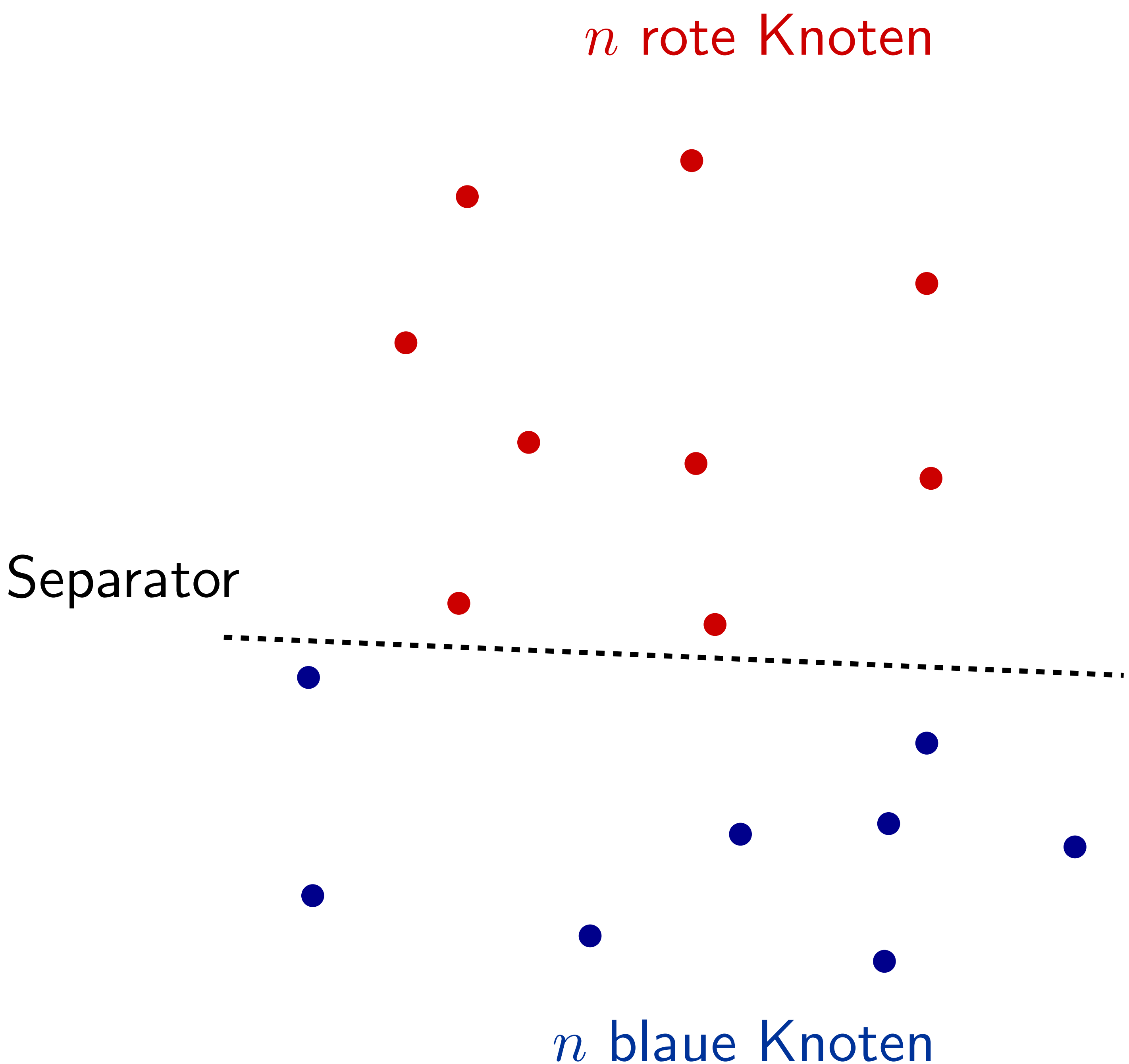
- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in p
  $\Leftrightarrow p^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
  $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

VL

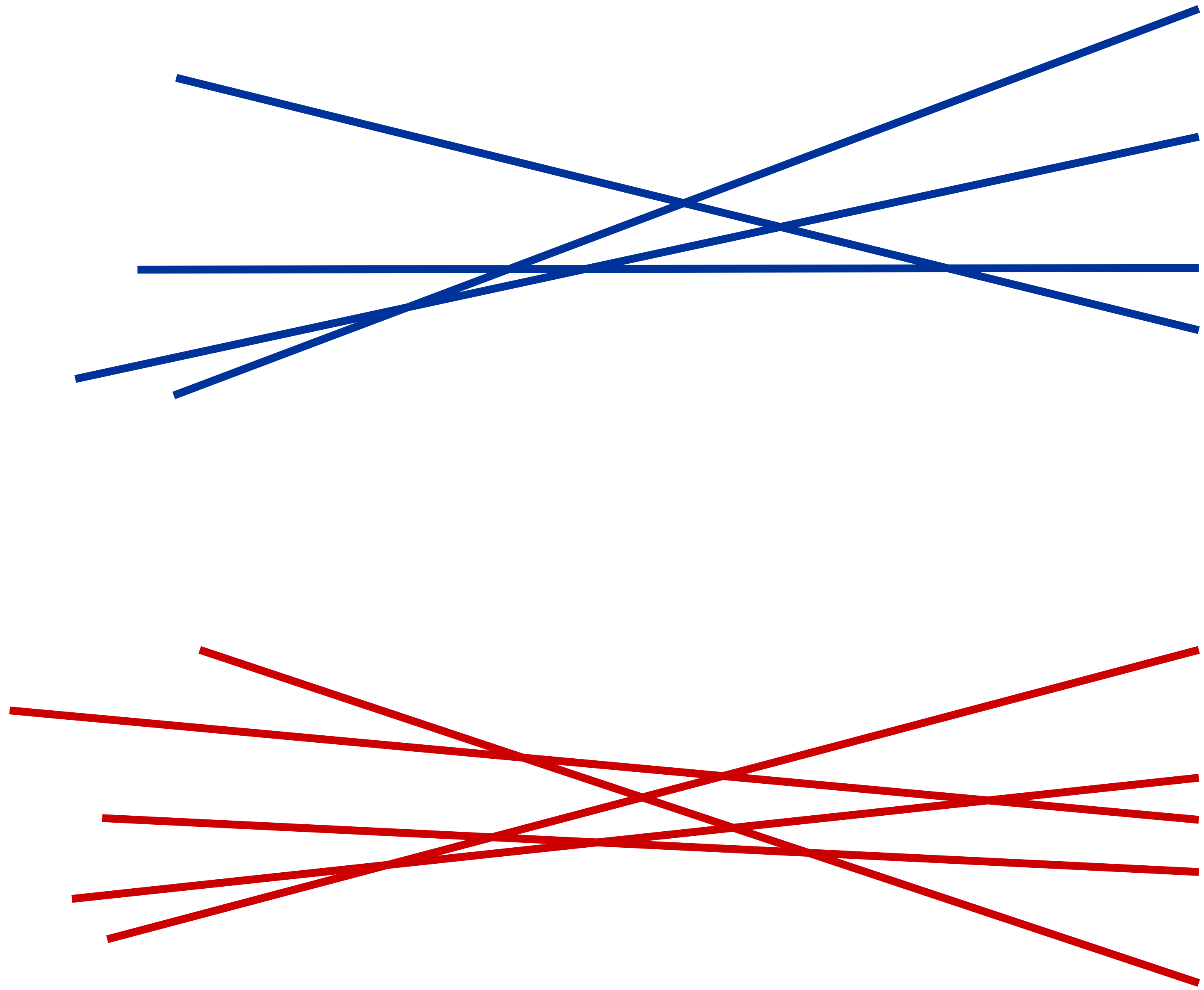
Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?

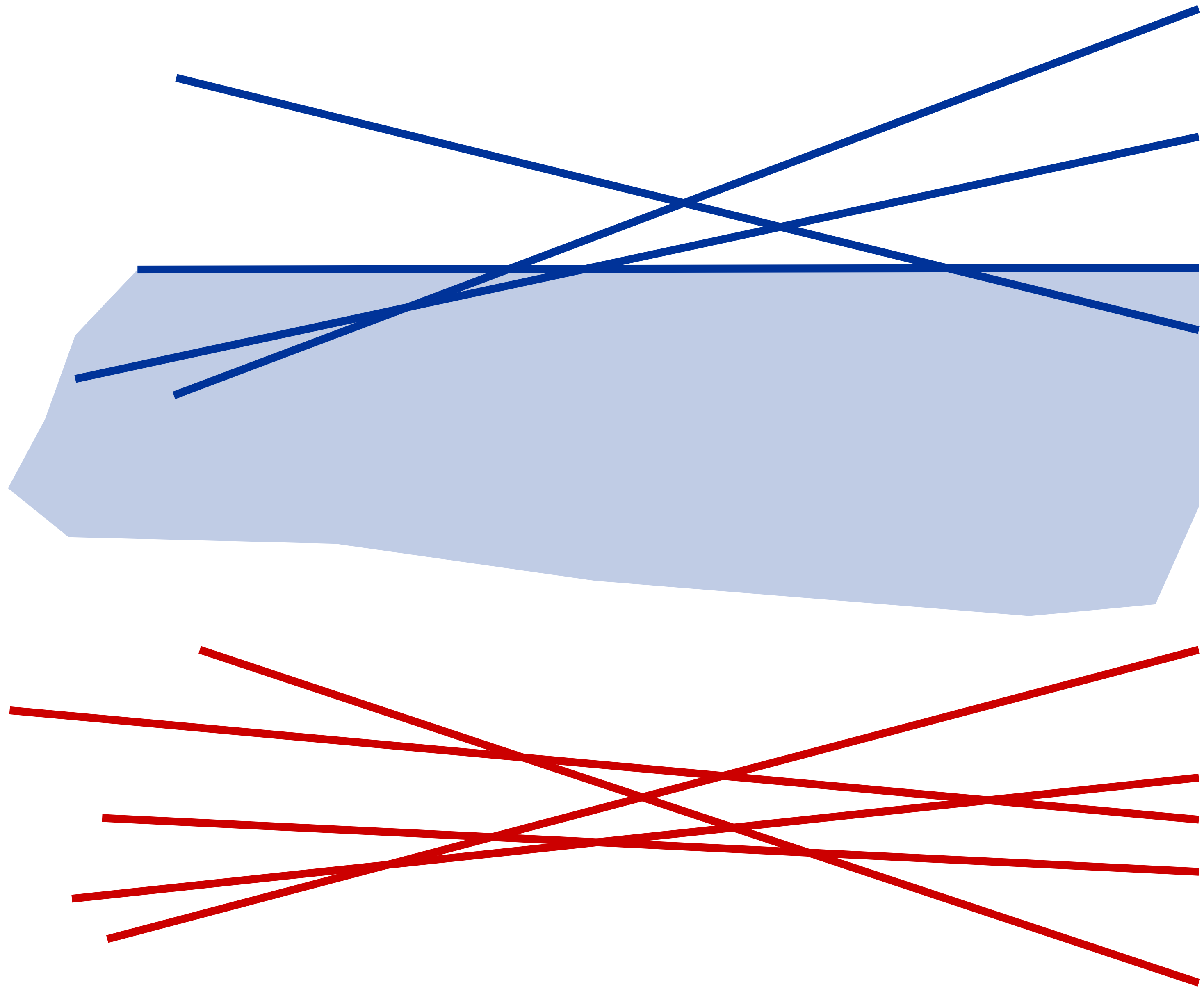
Aufgabe 3



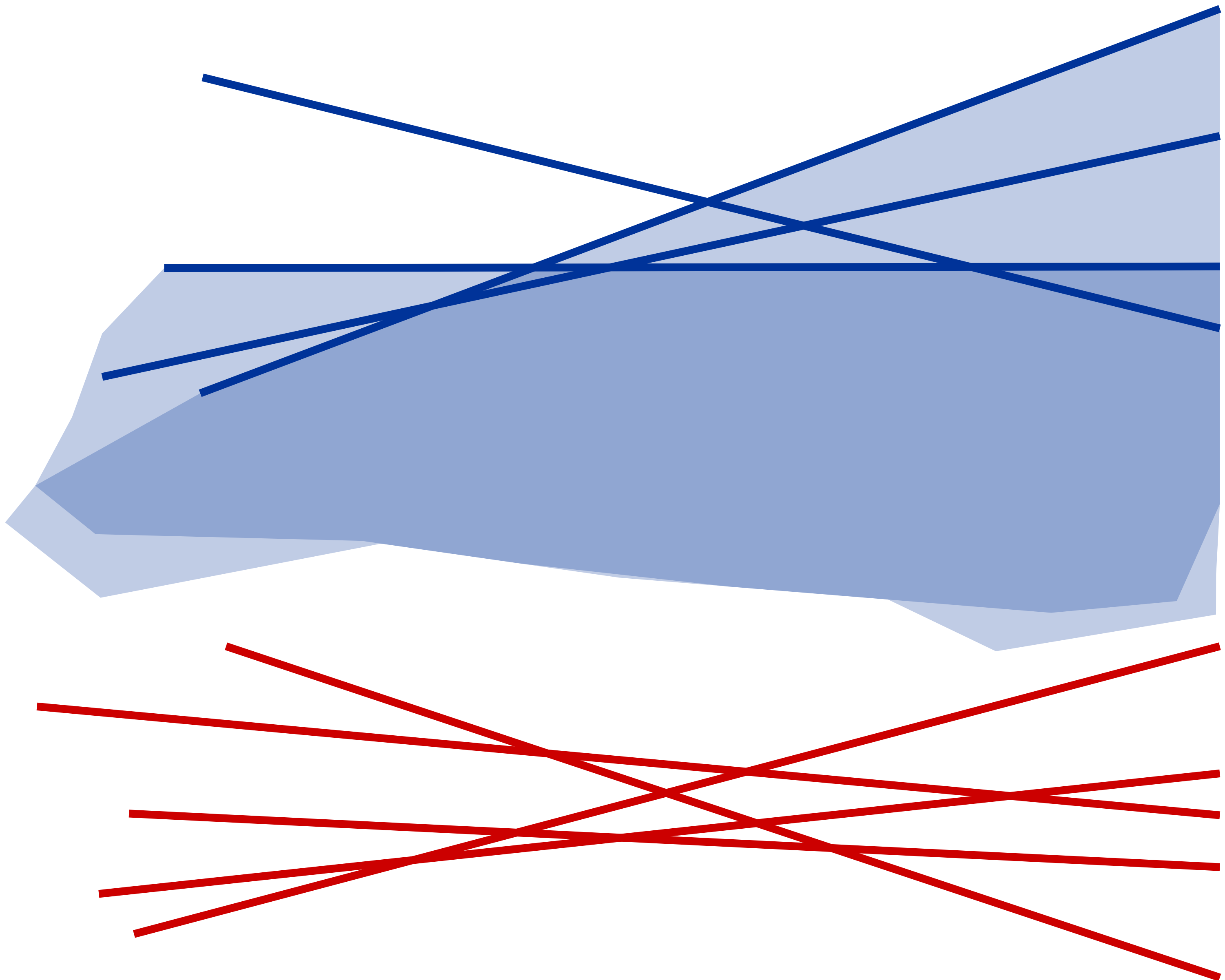
Aufgabe 3



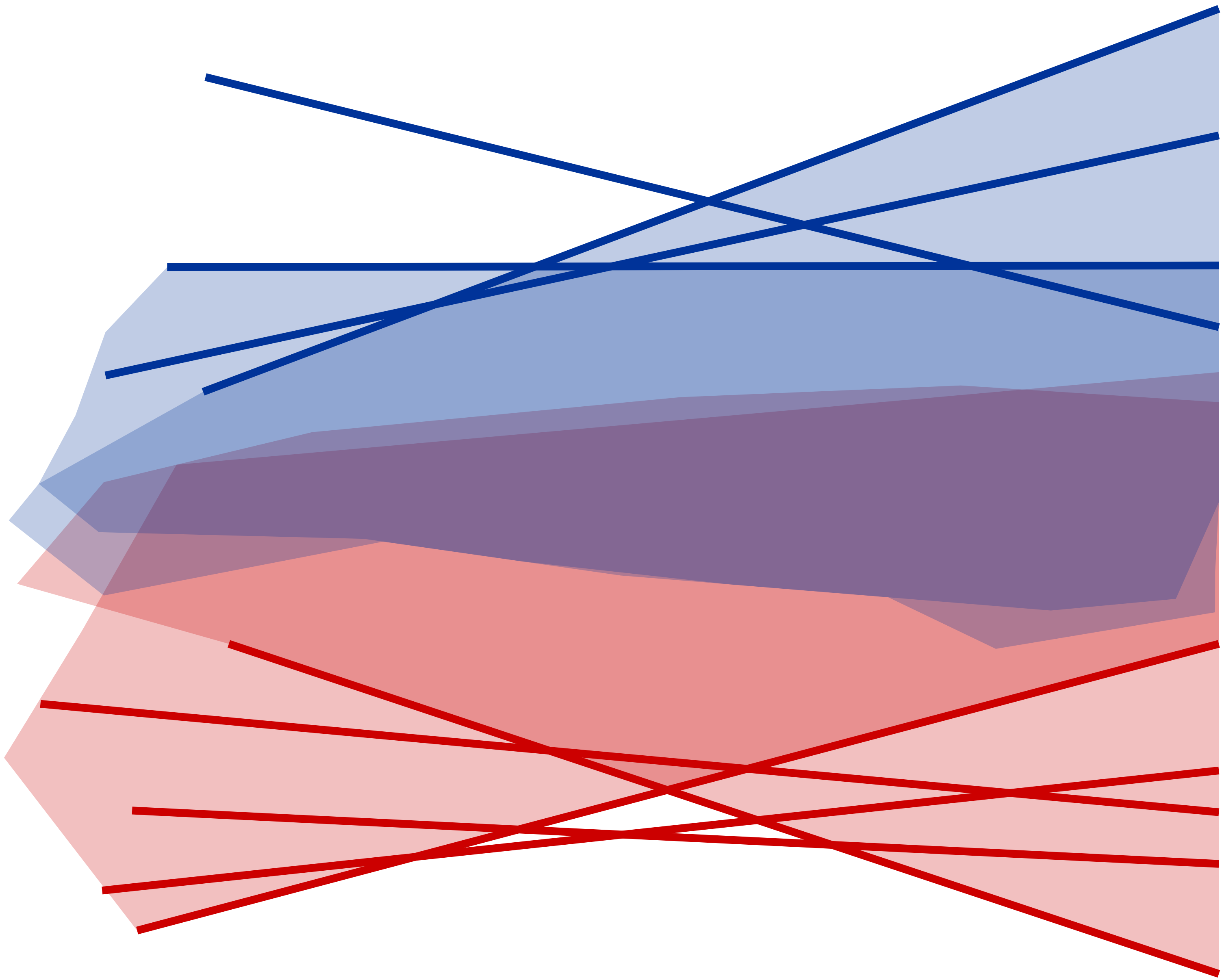
Aufgabe 3



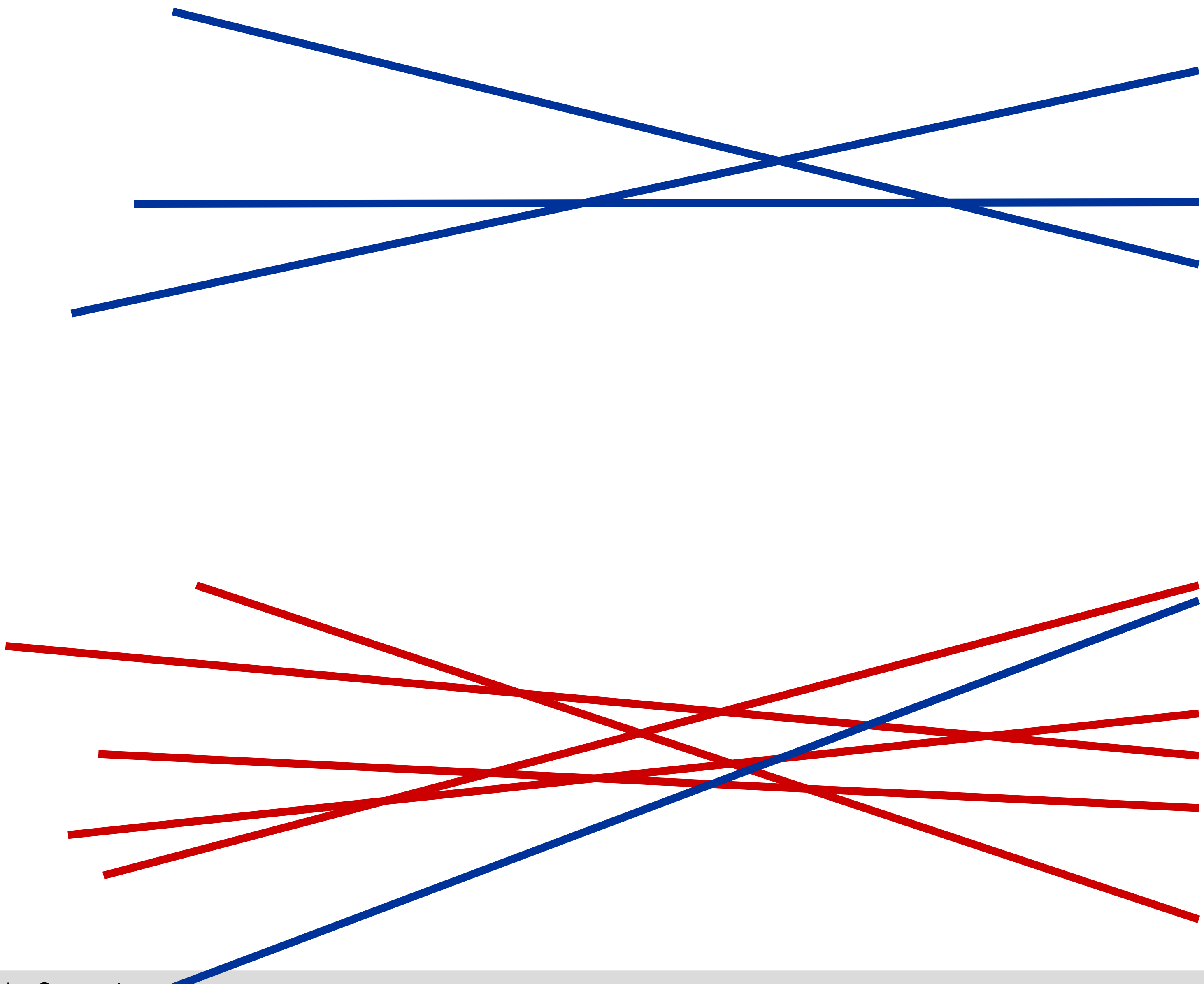
Aufgabe 3



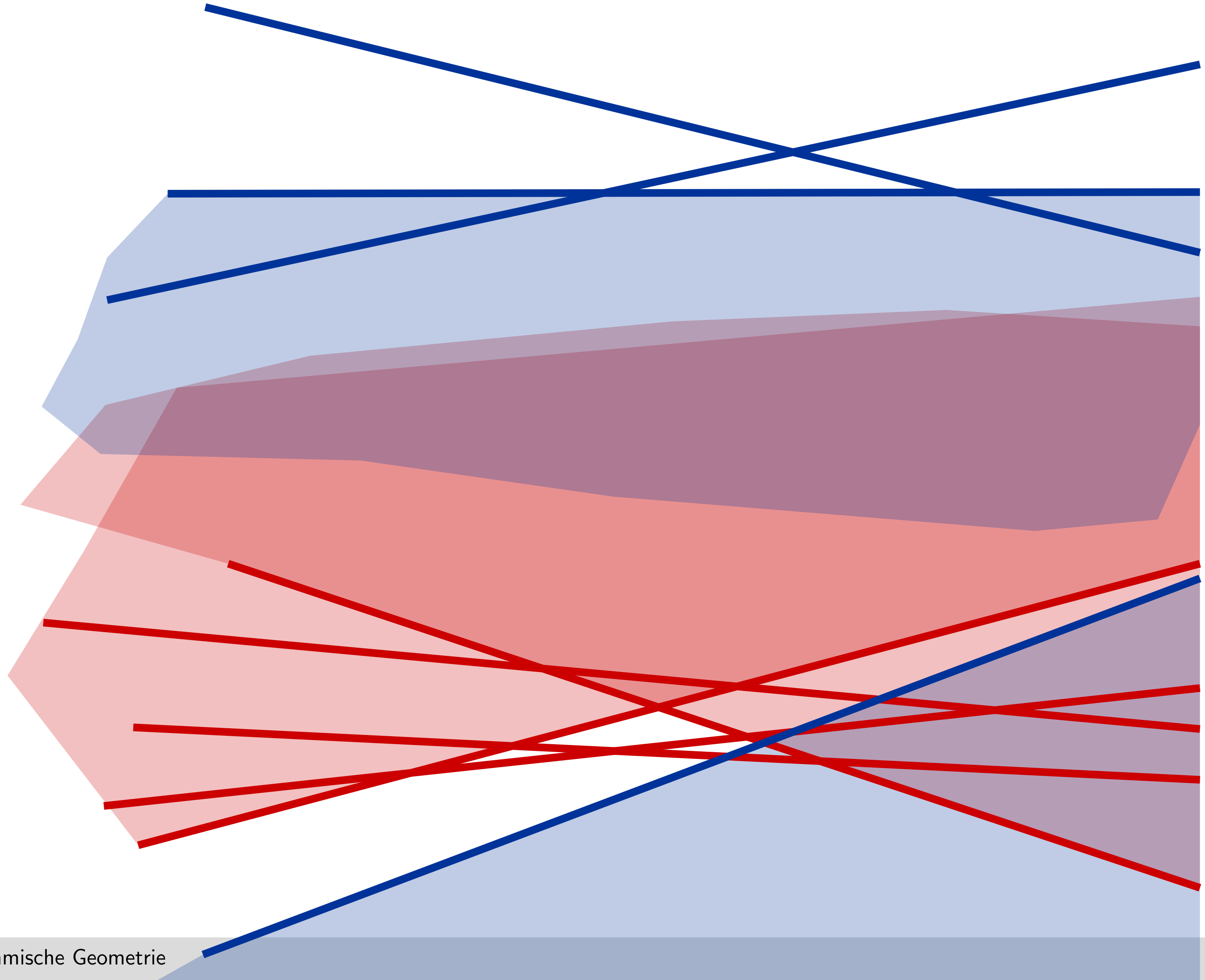
Aufgabe 3



Aufgabe 3



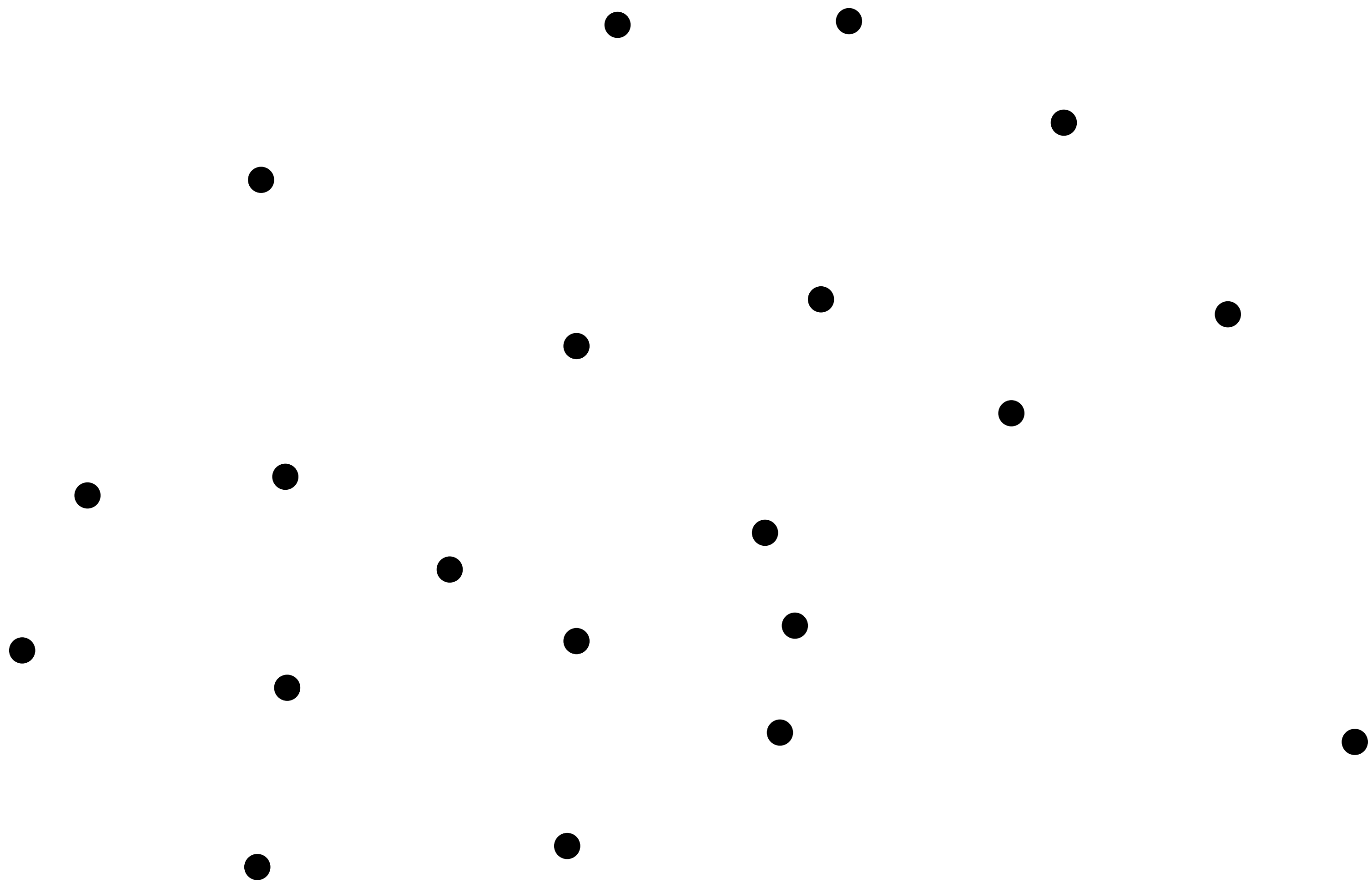
Aufgabe 3



Aufgabe 4

Gegeben: Menge $S \subset \mathbb{R}^2$

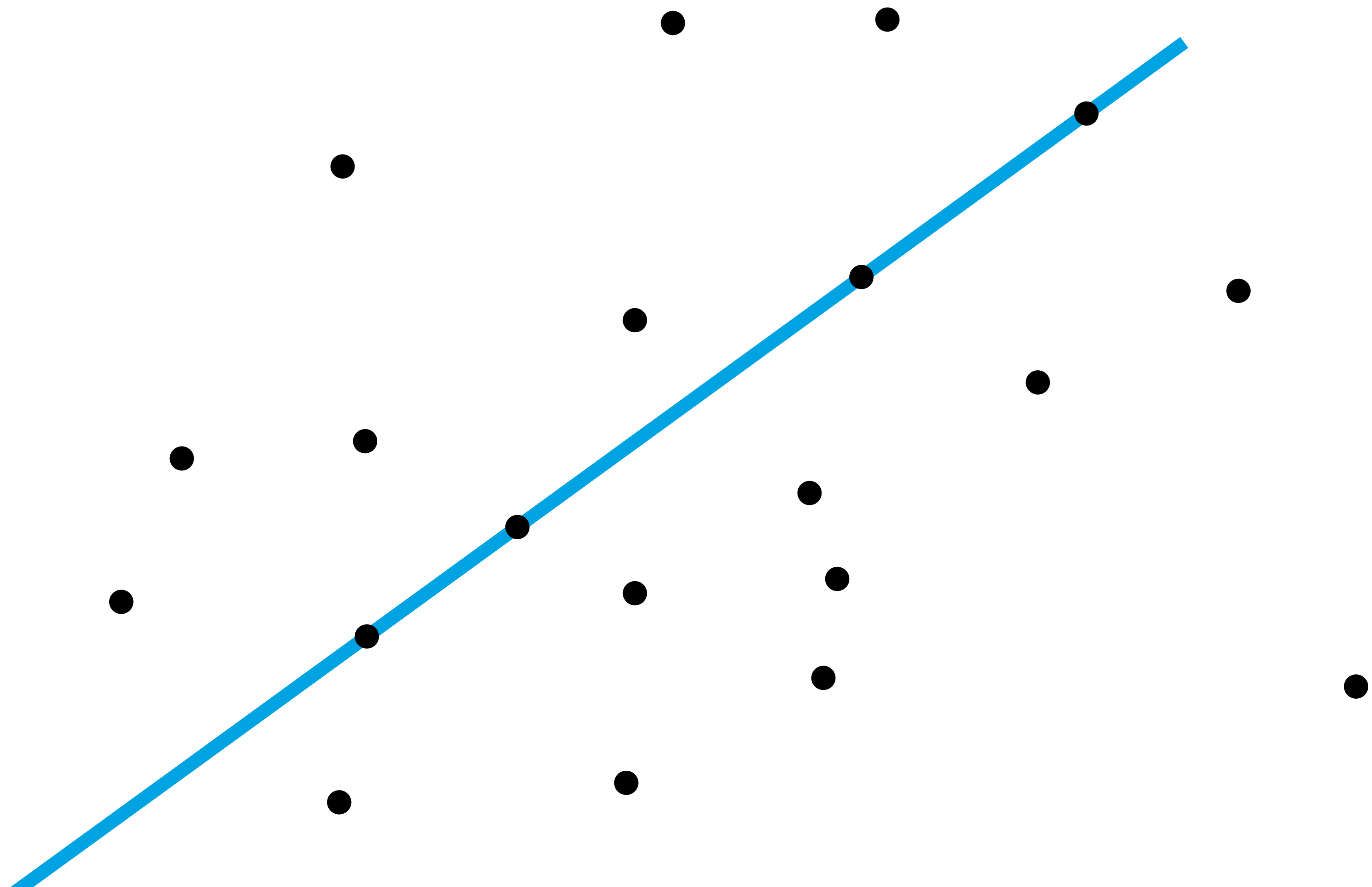
Finde Linie, die durch die meisten Punkte geht [in $O(n^2)$].



Aufgabe 4

Gegeben: Menge $S \subset \mathbb{R}^2$

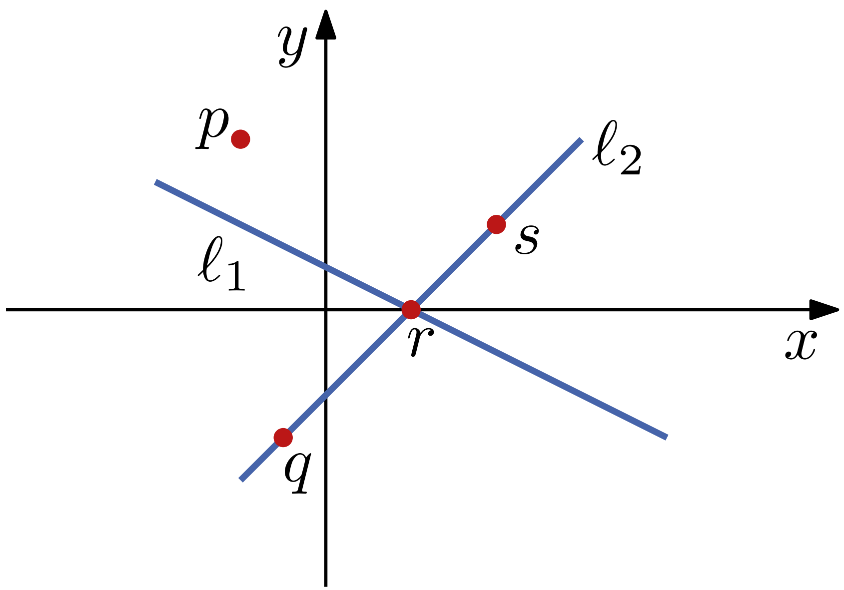
Finde Linie, die durch die meisten Punkte geht [in $O(n^2)$].

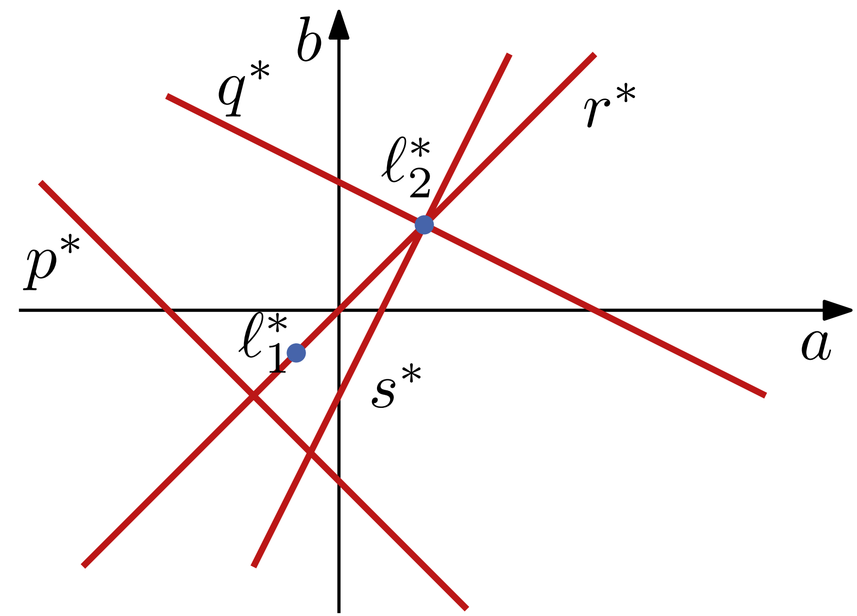


Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in r
  $\Leftrightarrow r^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- q, r, s kollinear
  $\Leftrightarrow q^*, r^*, s^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

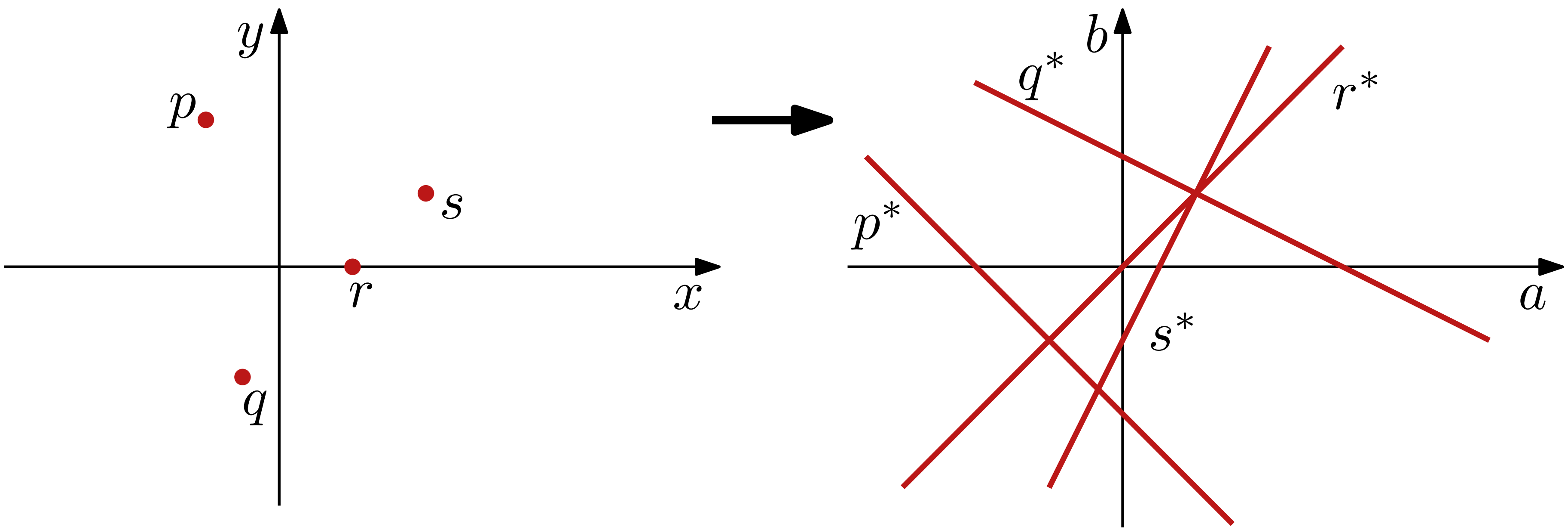




Aufgabe 4

Gegeben: Menge $S \subset \mathbb{R}^2$

Finde Linie, die durch die meisten Punkte geht [in $O(n^2)$].



1. Transformiere alle Punkte in Geraden
2. Berechne Geraden-Arrangment
3. Bestimme Knoten mit höchsten Grad.

Begründung: Kolineare Punkte im primalen Raum sind Geraden die sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden.