

## Übungsblatt 12 - Well Separated Pair Decomposition

**Ausgabe:** 01. Juli 2014

**Abgabe:** 08. Juli 2014

### 1 Grundlegendes

Sei  $s > 0$  gegeben und sei  $x := 2/s + 1$ . Außerdem sei  $S := \{x^i \mid 0 \leq i \leq n-1, i \in \mathbb{N}\}$ . Sei  $\{A_j, B_j\}$  für  $1 \leq j \leq m$  eine beliebige  $s$ -WSPD für  $S$ . Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{j=1}^m (|A_j| + |B_j|) = \binom{n}{2} + m$$

*Hinweis:* Für jedes  $j$  ist wenigstens eine der Mengen  $A_j$  oder  $B_j$  ein Singleton.

### 2 Nachbarn I

Sei  $P$  eine  $n$ -elementige Menge von Punkten aus dem  $\mathbb{R}^d$ . Sei  $p \in P$  und der Punkt  $q \in P$  der nächste Nachbar von  $p$  in  $P$  (d.h.,  $|pq| = \min\{|pr| : r \in P, r \neq p\}$ ). Betrachten Sie nun eine beliebige  $s$ -WSPD für  $P$  mit  $s > 2$ .

- Sei  $\{A, B\}$  ein Paar in dieser Dekomposition. Dabei liege der Punkt  $p$  in  $A$  und der Punkt  $q$  in  $B$ . Zeigen Sie, dass dann in  $A$  nur der Punkt  $p$  enthalten sein kann.
- Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um zu zeigen, dass die Größe einer beliebigen  $s$ -WSPD für  $P$  mit  $s > 2$  mindestens  $n/2$  ist.

### 3 Nachbarn II

Sei  $P$  erneut eine  $n$ -elementige Menge von Punkten aus dem  $\mathbb{R}^d$ . Außerdem seien die Punkte  $p, q \in P$  das Paar von Punkten das minimalen Abstand zueinander hat (d.h.,  $\min\{|ab| : a, b \in P, a \neq b\}$ ). Betrachten Sie eine beliebige  $s$ -WSPD  $\mathcal{W}$  für  $P$  mit  $s > 2$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{W}$  das Paar  $\{\{p\}, \{q\}\}$  enthalten muss.