Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Geometrie
Sommersemester 2014
Martin Nöllenburg/Benjamin Niedermann

Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierung

Ausgabe: 10. Juni 2014
Abgabe: 17. Juni 2014

1 Grundlegendes zu Triangulierungen

Ein paar Grundlegende Fragestellungen zu Triangulierungen folgen. Die Menge P sei eine Menge von n Punkten die alle in $\mathbb{R}^2$ liegen.

a) Zeigen Sie, dass es keine Menge P geben kann, für die es mehr als $2^{\binom{n}{2}}$ *verschiedene* Triangulierungen gibt.

b) Geben Sie eine Beispielmenge P an, bei der, egal wie sie trianguliert ist, es wenigstens einen Punkt gibt, der Grad $n-1$ hat.

2 Grundlegendes zu Delaunay Triangulierungen

Sei eine endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ gegeben bei der alle Punkte in allgemeiner Lage sind. Sei außerdem $q \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, der zwar nicht in P enthalten ist, aber innerhalb der konvexen Hülle von P liegt. Die Punkte $p_i, p_j, p_k \in P$ seien die Eckpunkte eines Dreiecks der Delaunay Triangulierung, welches q enthält (es kann maximal 2 solche Dreiecke geben). Zeige Sie, dass qp_j, qp_i und qp_k Kanten der Delaunay-Triangulierung der Punktemenge $P' := P \cup \{q\}$ sind.

Bitte wenden

3 Minimaler Spannbaum

Der euklidische minimale Spannbaum (EMST) einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Baum, der alle Punkte aus P enthält und minimale Gesamtkantenlänge hat.

a) Zeigen Sie, dass die Kantenmenge einer Delaunay-Triangulierung von P die Kanten eines EMST enthält.

b) Nutzen Sie das Wissen aus a) um einen Algorithmus zu entwickeln, der in $\mathcal{O}(n \log n)$ einen EMST berechnet.

4 Gabriel Graphen

Der *Gabriel Graph* einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ ist wie folgt definiert: Zwei Punkte p und q sind mit einer Kante verbunden, wenn das Innere des Kreises, dessen Durchmesser $|pq|$ ist und bei dem p und q auf dem Rand liegen, leer ist.

a) Zeigen Sie, dass die Delaunay Triangulierung von P den Gabriel-Graph von P enthält.

b) Zeigen Sie, dass p und q genau dann in dem Gabriel-Graph von P adjazent sind, wenn die Delaunay-Kante zwischen p und q die zur ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

c) Geben Sie einen $\mathcal{O}(n \log n)$ Algorithmus an, um einen Gabriel-Graph für eine beliebige Menge von n Punkten zu berechnen.

5 Delaunay Triangulierungen

Zeigen Sie, dass der kleinste Winkel jeder beliebigen Triangulierung eines konvexen Polygons, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, gleich ist. Das bedeutet, dass jede Vervollständigung, einer Delaunay Triangulierung einer Menge von Punkten, den kleinsten Winkel der Triangulierung maximiert.