

## Übungsblatt 8 - Voronoi Diagramme

**Ausgabe:** 03. Juni 2014

**Abgabe:** 10. Juni 2014

### 1 Voronoi-Zellen

Sei  $\text{Vor}(P)$  ein Voronoi Diagramm für die Menge  $P$  bestehend aus  $n$  Punkten. Eine einzelne Voronoi-Zelle in  $\text{Vor}(P)$  besteht aus maximal  $n - 1$  Kanten. Naiv könnte man annehmen, dass die Komplexität von Voronoi Diagrammen quadratisch ist. Allerdings kann man beweisen, dass die Komplexität nur linear ist. Zeigen Sie hierzu, dass die durchschnittliche Anzahl an Kanten aller Voronoi-Zellen in  $\text{Vor}(P)$  nicht größer als 6 sein kann.

### 2 Beach-Line

In der Vorlesung wurde erklärt, dass man ein Voronoi-Diagramm mit Hilfe einer *Beach-Line* konstruieren kann.

- a) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem eine Parabel (festgelegt durch einen Punkt  $p_i$ ) mehr als einen Kreisbogen zur Beach-Line beisteuert.
- b) Ist es möglich, dass eine einzelne Parabel eine lineare Anzahl an Kreisbögen zur Beach-Line beisteuert? Erläutern Sie Ihre Antwort.

### 3 Nächster Nachbar

Sei  $P$  eine Menge von  $n$  Punkten in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der in  $O(n \log n)$  Zeit zu jedem Punkt  $p$  in  $P$  einen anderen Punkt  $a(p)$  in  $P$  bestimmt, der  $p$  am nächsten liegt.

*Bitte wenden*

## 4 Atom-Kraftwerke

Angenommen, Sie sind ein Atomkraftgegner, der möglichst weit von den ihm bekannten Atomkraftwerken entfernt leben möchte. Gleichzeitig wollen Sie aber innerhalb eines von Ihnen bevorzugten Gebietes wohnen. Diese Situation kann man wie folgt formalisieren: Die Menge der Atomkraftwerke werde durch eine Menge  $S$  von Punkten in der Ebene repräsentiert. Das von Ihnen bevorzugte Wohngebiet sei der Einfachheit halber durch ein Rechteck  $R$  modelliert. Gesucht ist nun ein Punkt  $p \in R$  (Ihr Wohnort), dessen Abstand  $\min_{s \in S} d(p, s)$  zum nächstgelegenen AKW maximal ist.

- a) Zeigen Sie, dass jeder optimale Wohnort entweder eine Ecke des Voronoi-Diagramms  $\text{Vor}(S)$ , eine Ecke von  $R$ , oder ein Schnittpunkt des Randes von  $R$  mit einer Kante von  $\text{Vor}(S)$  ist.
- b) Geben Sie einen Algorithmus an, der in  $O(n)$  Zeit einen optimalen Wohnort findet, wenn das Voronoi-Diagramm  $\text{Vor}(S)$  bereits bekannt ist. Hierbei ist  $n$  die Anzahl der Punkte in  $S$ .
- c) Angenommen der bevorzugte Wohnort soll sich innerhalb eines gegebenen konvexen Polygons  $P$  mit  $m$  Ecken befinden. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit  $O(m + n)$  an, der unter dieser Voraussetzung einen optimalen Wohnort findet. Wir nehmen erneut an, dass das Voronoi-Diagramm  $\text{Vor}(S)$  bereits bekannt ist.