Übungsblatt 6 - Bereichsabfragen II

Ausgabe: 20. Mai 2014
Abgabe: 27. Mai 2014

1 Intervall-Bäume

Betrachten Sie das in der Vorlesung vorgestellte Problem zur Abfrage von Strecken mit beliebiger Orientierung:

Gegeben: n disjunkte Strecken und ein achsenparalleles Rechteck $R = [x, x'] \times [y, y']$

Gesucht: alle Strecken, die R schneiden.

In der Vorlesung wurde das Problem mithilfe von Segment-Bäumen gelöst. Können auch Intervall-Bäume verwendet werden? Welche Probleme treten gegebenenfalls auf?

2 Segment-Bäume – Konstruktion

In der Vorlesung wurde folgender Satz bewiesen:

Satz 2. *Sei S eine Menge im Inneren disjunkter Strecken in der Ebene. Alle k Strecken, die ein achsenparalleles Rechteck R schneiden, lassen sich in $O(\log^2(n) + k)$ Zeit finden. Die Datenstruktur benötigt $O(n \log n)$ Platz und $O(n \log^2 n)$ Aufbauzeit.*

Im folgenden soll gezeigt werden, dass die Datenstruktur in $O(n \log n)$ Zeit aufgebaut werden kann. Seien $s, s' \in S$ zwei Strecken. Die Strecke s liegt *unterhalb* von s' ($s \prec s'$), falls es Punkte $p \in s$ und $p' \in s'$ mit $x(p) = x(p')$ und $y(p) < y(p')$ gibt, dabei bezeichnet $x(p)$ die x-Koordinate von p und $y(p)$ die y-Koordinate von p.

1. Zeigen Sie, dass die Relation $\prec$ azyklisch auf S ist.
2. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der die Ordnung von S bezüglich $\prec$ in $O(n \log n)$ Zeit berechnet. *Hinweis:* Verwenden Sie ein Sweep-Line-Verfahren.
3. Zeigen Sie, dass die Datenstruktur aus Satz 2 in $O(n \log n)$ Zeit konstruiert werden kann.

3 Intervalle zählen

Sei eine Menge I bestehend aus n Intervallen gegeben. Geben Sie eine Datenstruktur an, mit deren Hilfe für einen Punkt $p \in \mathbb{R}$ die Anzahl Intervalle aus I, die p enthalten, möglichst effizient bestimmt werden kann. Betrachten Sie hierzu folgende Varianten.

1. Die Datenstruktur basiert auf einem Intervall-Baum.
2. Die Datenstruktur basiert auf einem Segment-Baum.
3. Die Datenstruktur verwendet weder einen Intervall- noch einen Segment-Baum.

4 Schnitte von Rechtecken

Gegeben eine Menge $\mathcal{R}$ bestehend aus n achsenparallelen Rechtecken in der Ebene. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet $w_{\mathcal{R}}(p)$ die Anzahl der Rechtecke aus $\mathcal{R}$, die p beinhalten. Geben Sie einen Algorithmus an, der in $O(n \log n)$ Zeit $\max_{p \in \mathbb{R}^2} w_{\mathcal{R}}(p)$ berechnet. *Hinweis:* Verwenden Sie Segment-Bäume und ein Sweep-Line-Verfahren.