

Übungsblatt 2 (Lösung)

Ausgabe: Dienstag 22. April 2014

Abgabe: Dienstag 29. April 2014

1 Einfaches Polygon?

In der Vorlesung wurde ein Verfahren vorgestellt mit dem man Schnitte zwischen beliebigen Segmenten in $\mathcal{O}((n+k)\log n)$ bestimmen kann. Wir betrachten hier ein verwandtes Problem. Gegeben sei ein Polygon \mathcal{P} . Geben Sie einen Algorithmus an, der überprüft ob \mathcal{P} ein einfaches (d.h. schnittfreies) Polygon ist. Der Algorithmus soll eine worst-case Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(n \log n)$ haben.

Lösung: Modifikation des Algorithmus aus der Vorlesung: Beachte ein Polygon hat genau n Schnittpunkte (Strecken schneiden sich an Knoten des Polygons). Führe den Algorithmus aus und breche ab sobald der Algorithmus mehr als n Schnittpunkte erkannt hat und gebe aus, dass das Polygon *nicht* einfach ist. In diesem Fall ist $k = n + 1$. Damit ist die Laufzeit in $\mathcal{O}((n + n + 1) \log n) = \mathcal{O}(2n \log n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

2 Weniger Speicherplatzverbrauch

Der Algorithmus zur Bestimmung von Schnitten gegebener Segmente aus der Vorlesung benötigt $\mathcal{O}(n+k)$ Speicher. Modifizieren Sie den Algorithmus so, dass der Speicherplatzbedarf auf $\mathcal{O}(n)$ reduziert wird.

Lösung: Speichere nur die Schnittpunkte von benachbarten Kanten (bzgl. der aktuellen Position der Sweep Line). Es gibt nur $\mathcal{O}(n)$ viele solcher Punkte und der Speicherplatzbedarf sinkt auf $\mathcal{O}(n)$. Um dies zu erreichen, füge nur Schnittpunkte von benachbarten Kanten ein und entferne Schnittpunkte von Kanten die im Verlauf des Algorithmus keine direkt Nachbarn mehr sind. Diese Schnittpunkte werden erst dann wieder eingefügt wenn beide Kanten erneut Nachbarn werden.

3 Sweepen

Gegeben sei eine endliche Menge P von Punkten in der Ebene. Der *größte rechte obere Bereich* eines Punktes $p \in P$ ist die Vereinigung aller offenen achsenparallelen Quadrate, die p mit ihrer linken unteren Ecke berühren und keinen Punkt aus P in ihrem Inneren enthalten.

- Zeigen Sie, dass der größte rechte obere Bereich eines Punktes entweder ein Quadrat oder der Schnitt zweier offener Halbebenen ist.
- Überlegen Sie für einen Punkt $p \in P$ und jeden der beiden zugehörigen Oktanten (vgl. Abbildung 1), welche Punkte aus P im jeweiligen Oktanten den größten rechten oberen Bereich von p am stärksten einschränken. Reicht die Kenntnis dieser Punkte aus den beiden Oktanten aus, um den größten rechten oberen Bereich von p zu bestimmen?

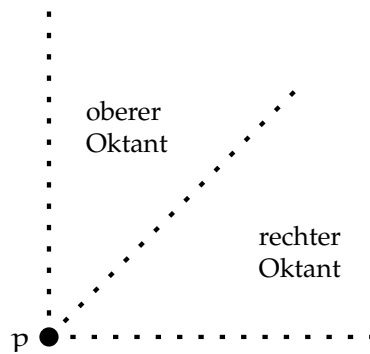


Abbildung 1: Oberer und rechter Oktant zum Punkt p

- Gegeben sei eine Menge P von n Punkten. Berechnen Sie für jeden Punkt aus P den größten rechten oberen Bereich mit einer Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(n \log n)$.

Hinweis: Sweepe die Ebene zweimal und ermittle dabei die Punkte aus Teilaufgabe b).

Lösung: Siehe Folien der Übung vom 30.04.2014.