Übungsblatt 12 - Well Separated Pair Decomposition

1 Grundlegendes

Sei $s > 0$ gegeben und sei $x := 2/s + 1$. Außerdem sei $S := \{x^i \mid 0 \leq i \leq n-1, i \in \mathbb{N}\}$. Sei $\{A_j, B_j\}$ für $1 \leq j \leq m$ eine beliebige s -WSPD für S . Zeige, dass folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{j=1}^m (|A_j| + |B_j|) = \binom{n}{2} + m$$

Hinweis: Für jedes j ist wenigstens eine der Mengen A_j oder B_j ein Singleton.

Lösung:

Zunächst zeigen wir, dass für jedes $j, 1 \leq j \leq m$ wenigstens eins der beiden Mengen A_j, B_j Singleton ist. Da die Elemente aus S im $\mathbb{R}^1$ liegen sind für festes j in einer Menge (o.B.d.A. B_j) ausschließlich größere Zahlen als in der anderen Menge (o.B.d.A. A_j). Der 'Durchmesser' von B_j muss dann mindestens $x^{i+1} - x^i$ für ein i sein. Es gilt $x^{i+1} - x^i = x^i(x - 1) = x^i \cdot 2/s$. Dementsprechend ist der Radius r von B_j dann mindestens x^i/s . Damit A_j und B_j well-separated sind muss der Abstand zwischen ihnen mindestens $rs = x^i/s \cdot s = x^i$ sein. Da aber das kleinste Element in B_j den x^i ist und kein Element in S vorkommt, dass 0 oder kleiner als 0 ist, können A_j und B_j nicht well-separated sein. O.B.d.A. gilt nun $\sum_j |B_j| = m$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_j |A_j| = \binom{n}{2}$. Um das zu sehen benötigen wir eine leicht andere Definition¹ als die in der Vorlesung. Dabei wird gefordert, dass es bei einer WSPD für ein Knotenpaar p, q genau einen Index $1 \leq \ell \leq m$ gibt für den gilt, dass $p \in A_\ell$ und $q \in B_\ell$ oder umgekehrt. Um zu sehen warum $\sum_j |A_j| \geq \binom{n}{2}$ gilt hilft evtl. eine andere Intuition für WSPD. Man kann annehmen, dass die WSPD die $\binom{n}{2}$ Kanten des vollständigen Graphen auf S in eine Menge von m well-separated pairs unterteilt. Die zusätzliche Bedingung von oben klärt dann auch sofort, warum das Gleichheitszeichen gilt.

¹Giri Narasimhan, Michael Smi: Geometric Spanner Networks, Cambridge University Press

2 Nachbarn I

Sei P eine n -elementige Menge von Punkten aus dem $\mathbb{R}^d$. Sei $p \in P$ und der Punkt $q \in P$ der nächste Nachbar von p in P (d.h., $|pq| = \min\{|pr| : r \in P, r \neq p\}$). Betrachte nun eine beliebige s -WSPD für P mit $s > 2$.

- a) Sei $\{A, B\}$ ein Paar in dieser Dekomposition. Dabei liege der Punkt p in A und der Punkt q in B . Zeige, dass dann in A nur der Punkt p enthalten sein kann.
- b) Nutze das Ergebnis aus a) um zu zeigen, dass die Größe einer beliebigen s -WSPD für P mit $s > 2$ mindestens $n/2$ ist.

Lösung:

Zu a): Sei $m := |pq|$. Angenommen in A ist noch ein Punkt $p' \in P$ enthalten. Der Abstand $m' := |pp'|$ darf nicht kleiner als m sein (sonst Widerspruch zur Annahme, dass $|pq|$ minimal). Damit A und B well-separated sind muss der Abstand zwischen dem minimalen Kreis der A umschließt und dem minimalen Kreis der B umschließt $\geq sr$ sein, wobei r der Radius des größeren Kreises ist. Der Radius des A umschließenden Kreises ist mindestens $m'/2$ und der Radius (und der Radius des B umschließenden Kreises ist mindestens 0). Da $sr \geq s \cdot m'/2 > m'$ und der Abstand zwischen p und q höchstens $m \leq m'$ ist sind A und B Nicht well-separated. Widerspruch zur Annahme.

Zu b): Erkenntnis aus a) ist, dass wenn ein Knoten und sein nächster Nachbar in verschiedenen Mengen eines Paares der Dekomposition ist, dann ist eine der beiden Mengen ein Singleton. Insgesamt gibt es dann n Singletons und damit ist die Größe (die Anzahl der Paare der s -WSPD) mindestens $n/2$.

3 Nachbarn II

Sei P erneut eine n -elementige Menge von Punkten aus dem $\mathbb{R}^d$. Außerdem seien die Punkte $p, q \in P$ das Paar von Punkten das minimalen Abstand zueinander hat (d.h., $\min\{|ab| : a, b \in P, a \neq b\}$). Betrachte eine beliebige s -WSPD $\mathcal{W}$ für P mit $s > 2$. Zeige, dass $\mathcal{W}$ das Paar $\{\{p\}, \{q\}\}$ enthalten muss.

Lösung:

Da p nächster Nachbar von q (und umgekehrt) ist, können wir die Erkenntnis aus 2a) nutzen. Daraus folgt direkt, dass $\{\{p\}, \{q\}\}$ in jeder beliebigen s -WSPD enthalten sein muss.