Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Geometrie
Sommersemester 2012
Martin Nöllenburg/Andreas Gemsa

Übungsblatt 9 - Dualität

1 Dualität I

Wie aus der Vorlesung bekannt ist das Duale einer Strecke ist ein Doppelkeil mit einem Keil links und rechts des Punktes, der dual ist zu der Geraden, die die Strecke enthält.

a) Was ist das Duale eines Dreiecks mit Ecken p, q und r?

b) Was ist das Duale eines Kreises der durch die Punkte p, q und r verläuft?

Lösung:
Für die Illustration von beiden Problemen bietet sich Folgendes Applet an: [ttp://www-ma2.upc.es/%7Egeoc/dual/dual.html]

(Link ist auch auf der Vorlesungswebseite)

2 Dualität II

Es sei eine Menge L von n Geraden gegeben. Wir suchen ein achsenparalleles Rechteck $\mathcal{B}(L)$, das alle Ecken des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ enthält. Gebe einen Algorithmus an, der ein solches Rechteck in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit ermittelt.

Lösung:
Hier nur Beweisskizze für linke und rechte Begrenzung: Schlüssel ist es hier zu erkennen, dass es genügt die Geraden nach ihren Steigungen zu sortieren und dann nur die Schnitte zwischen (in dieser Sortierung) benachbarten Geraden zu betrachten und dort den Schnittpunkt der am weitesten links (rechts) liegt zu behalten. (Im Dualraum würde man nicht die Knoten und nach ihrer x-Koordinate sortieren und dann ähnlich fortfahren).

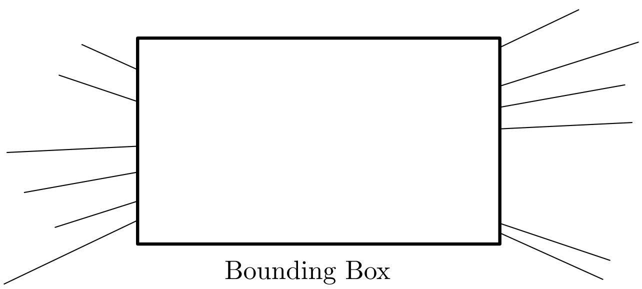

Abbildung 1: Beispiellösung für Aufgabe 3

3 Dualität III

Gegeben sei eine Menge R von n roten Punkten in der Ebene, sowie eine Menge B von n blauen Punkten. Eine Gerade ℓ, auf deren einer Seite alle blauen, und auf deren anderer Seite alle roten Punkte liegen, heißt *Separator* von R und B.

a) Gebe einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit entscheidet, ob ein Separator von R und B existiert.

b) Gebe einen *randomisierten* Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(n)$ erwarteter Zeit entscheidet, ob ein Separator von R und B existiert.

Lösung:
Zu a): Transfomiere alle Geraden in den dualen Raum. Jede Gerade im dualen Raum definiert zwei Halbebenen. Betrachte für die 'blauen' Geraden die rechte und für die 'roten' Geraden die linke Halbebenen. Berechne den Schnitt mit dem aus der VL bekannten Algorithmus. Ist dieser nicht leer ex. ein Separator. Anderfalls betrachte die linke Halbebenen der 'blauen' Geraden und die rechte Halbebenen der 'roten' Geraden. Berechne erneut den Schnitt. Sollte dieser nicht leer sein ex. ein Separator. Andernfalls ex. kein Separator.

Zu b): Gleiches Prinzip, aber verwende den Algorithmus aus der VL der benutzt wurde um lineare Programmierung zu lösen.

4 Dualität IV

Sei eine Menge S von n Punkten in der Ebene. Gebe einen $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus an, der die Linie angibt auf der die meisten Punkte aus S liegen.

Lösung:
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Geraden, deren korrespondierenden Punkte im primalen Raum kollinear sind, sich im dualen Raum in einem Punkt schneiden.

Bilde zu jedem Punkt p die duale Gerade $p^\star$. Berechen für diese Geraden das Arrangement (s. Vorlesung). Dieses Arrangement hat nur quadratische Komplexität. Durchlaufe alle Knoten und ermittle den Knoten v mit höchstem Grad. Alle Geraden $p^\star$ die sich in diesem Knoten schneiden sind im primalen Raum Punkte die auf der gleichen Gerade liegen. Transformiere v in den primalen Raum um die gesuchte Gerade zu erhalten.