Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Geometrie
Sommersemester 2012
Martin Nöllenburg/Andreas Gemsa

Übungsblatt 8 - Delaunay Triangulierung

1 Grundlegendes zu Triangulierungen

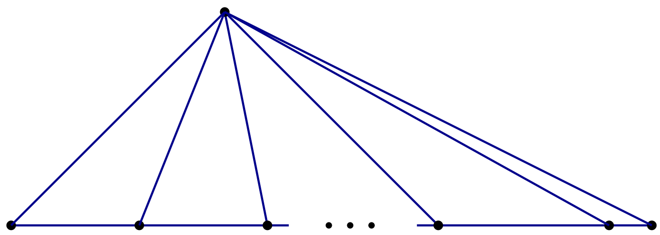
Ein paar Grundlegende Fragestellungen zu Triangulierungen folgen. Die Menge P sei eine Menge von n Punkten die alle in $\mathbb{R}^2$ liegen.

a) Zeige, dass es keine Menge P geben kann, für die es mehr als $2^{\binom{n}{2}}$ *verschiedene* Triangulierungen gibt.

b) Gebe eine Beispielmenge P an bei der, egal wie sie trianguliert ist, es wenigstens einen Punkt gibt der Grad $n-1$ hat.

Lösung:
zu a): Um Knoten aus P miteinander zu verbinden gibt es höchstens $\binom{n}{2}$ Kanten. Das heißt es gibt höchstens $2^{\binom{n}{2}}$ Kantenmengen und damit ist eine obere Schranke für Triangulierungen gegeben.

zu b):



2 Grundlegendes zu Delaunay Triangulierungen

Sei eine endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ gegeben bei der alle Punkte in allgemeiner Lage sind. Sei außerdem $q \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt der zwar nicht in P enthalten ist, aber innerhalb der konvexen Hülle von P liegt. Die Punkte $p_i, p_j, p_k \in P$ seien die Eckpunkte eines Dreiecks der Delaunay Triangulierung welches q enthält (es kann maximal 2 solche Dreiecke geben). Zeige, dass qp_j, qp_i und qp_k Kanten der Delaunay-Triangulierung der Punktemenge $P' := P \cup \{q\}$.

Lösung:
Zeige nur, dass qp_j Teil der Delaunay Triangulierung von $P \cup \{q\}$ ist (restlichen Kanten folgen analog).

Nach Satz 4 der Vorlesung zur Delaunay Triangulierung wissen wir, dass der Kreis C durch die Punkte p_i, p_j, p_k leer ist (bzw. nur q enthalten kann). Gleicher Satz besagt auch, dass die Kante qp_j Teil der Delanauy Triangulierung von $P \cup \{q\}$ ist, wenn es einen leeren Kreis C_{q,p_j} durch q und p_j gibt. Wir müssen zeigen, dass es genau so einen Kreis gibt. Das ist wie folgt einzusehen: Zeichne eine Strecke von p_j zum Mittelpunkt des Kreises der durch p_i, p_j, p_k definiert ist. Wir konstruieren einen neuen Kreis C' mit Mittelpunkt o der durch p_j läuft. Schiebt man C' in Richtung von p_j so liegt irgendwann der Punkt q auf dem Rand von C'. Offensichtlich liegt C' vollständig im Inneren von C. Da C leer ist, ist auch C' leer. Also ist C' ein leerer Kreis der durch q und p_j verläuft. Nach Satz 4 der Vorlesung ist also qp_j in der Delaunay Triangulierung von $P \cup \{q\}$ enthalten.

Analoge Argumention liefert, dass qp_i und qp_k in dieser Delaunay Triangulierung enthalten sind.

3 Minimaler Spannbaum

Der euklidische minimale Spannbaum (EMST) einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Baum der alle Punkte aus P enthält und minimale Gesamtkantenlänge hat.

a) Zeige, dass die Kantenmenge einer Delaunay-Triangulierung von P die Kanten eines EMST enthält.

b) Nutze das Wissen aus a) um einen Algorithmus zu entwickeln, der in $\mathcal{O}(n \log n)$ einen EMST berechnet.

Lösung:
zu a): Sei T ein EMST. Erst werden wir zeigen, dass jede Kante in T Teil des Delaunay Graphs DG ist. Angenommen, es gäbe eine Kante $e = uv$ in T die nicht in DG enthalten ist. Nach Satz 4 der Vorlesung hat dann jeder Kreis durch u und v mit Durchmesser $|uv|$ einen Punkt aus $w \in P$ enthalten. Es folgt sofort, dass $|uw| < |uv|$ und $|vw| < |uv|$. Da T ein Baum ist würde des entfernen von e dazu fügen, dass T in zwei Teilbäume T_u und T_V aufgespalten wird. Wir konstruieren uns daraus einen neuen Baum T'. Der Baum T' besteht aus $T - uv + wv$ für den Fall, dass $w \in T_u$. Für den anderen Fall analog. Der Baum T' hat aber eine kleinere Gesamtkantenlänge als T was ein Widerspruch zur Annahme ist. Das bedeutet, dass e in DG liegen muss.

zu b): Berechne Delaunay Graph von P und lasse dann Kruskals Algorithmus laufen. Beides ist in $\mathcal{O}(n \log n)$.

4 Gabriel Graphen

Der *Gabriel Graph* einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ ist wie folgt definiert: Zwei Punkte p und q sind mit einer Kante verbunden, wenn das Innere des Kreises, dessen Durchmesser $|pq|$ ist und bei dem p und q auf dem Rand liegen, leer ist.

a) Zeige, dass die Delaunay Triangulierung von P den Gabriel-Graph von P enthält.

b) Zeige, dass p und q genau dann in dem Gabriel-Graph von P adjazent sind, wenn die Delaunay-Kante zwischen p und q die zur ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

c) Gebe einen $\mathcal{O}(n \log n)$ Algorithmus an um einen Gabriel-Graph für eine beliebige Menge von n Punkten zu berechnen.

Lösung:

zu a): Folgt direkt aus Satz 4 der Vorlesung über die Delauney-Triangulierung.

zu b): Beweis zweigeteilt. Hinrichtung: Sei G der Gabriel Graph auf der Punktmenge P. Sei pq eine Kante von G. Der Kreis durch p und q mit Mittelpunkt u der mittig zwischen p und q liegt kann keinen Punkt aus P enthalten. Das bedeutet, dass u näher an p und näher an q liegt als zu allen anderen Punkten aus P. Das bedeutet, dass u auf der Kante zwischen den Voronoi Zellen von p und q liegt. Was schließlich bedeutet, dass die Delaunay Kante pq und die ihre duale Voronoi-Kante sich am Punkt u schneiden.

Rückrichtung:Angenommen, die Delaunay Kante pq zwischen p und q schneidet ihre duale Voronoi Kante. Sei o der Schnittpunkt; aus der Definition folgt direkt, dass $o = (p + q)/2$ gilt.Der Kreis C mit Mittelpunkt O mit $|pq|$ als Durchmesser kann keine anderen Punkte aus P enthalten. Angenommen, dass sei nicht der Fall. Also beinhaltet C einen Punkt r. Dann liegt o näher an r als zu p und q, was ein widerspruch dazu ist, dass o auf der Voronoi-Kante zwischen den Zellen von p und q liegt. Das bedeutet, dass pq eine Kante des Gabriel Graphs ist.

zu c): Erstelle Voronoi-Diagramm in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit. Initialisiere eine Kantenmenge $S = \emptyset$. For jede Voronoi-Kante e, die zwei Voronoi-Zellen für Knoten p und q begrenzt, verbinde p und q. Wenn e die Kante pq schneidet, dann füge pq zu S hinzu. Durchlaufe alle Voronoi-Kanten (linear viele) bildet S den Gabriel Graph für P.

5 Delaunay Triangulierungen

Zeige, dass der kleinste Winkel jeder beliebigen Triangulierung eines konvexen Polygons, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, gleich ist. Das bedeutet, dass jede Vervollständigung, einer Delaunay Triangulierung einer Menge von Punkten, den kleinsten Winkel der Triangulierung maximiert.

Lösung:
Zunächst beachte, dass zwei benachbarte Knoten auf dem Kreis durch eine Kante in jeder Triangulierung verbunden sind. Dann folgt die Aussage direkt durch den verallgemeinerten Satz des Thales. Siehe dazu auch die Folien aus der Übung.