Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Geometrie
Sommersemester 2012
Martin Nöllenburg/Andreas Gemsa

Übungsblatt 7 - Voronoi Diagramme

Ausgabe: 29. Mai 2012
Abgabe: 05. Juni 2012

1 Voronoi-Zellen

Sei Vor(P) ein Voronoi Diagramm für die Menge P bestehend aus n Punkten. Eine einzelne Voronoi-Zelle in Vor(P) besteht aus maximal $n-1$ Kanten. Naiv könnte man jetzt annehmen, dass die Komplexität von Voronoi Diagrammen quadratisch ist. Allerdings kann man beweisen, dass die Komplexität nur linear ist. Zeige dazu, dass die durchschnittliche Anzahl an Kanten aller Voronoi-Zellen in Vor(P) nicht größer als 6 sein kann.

2 Beach-Line

In der Vorlesung wurde erklärt, dass man ein Voronoi-Diagramm mit Hilfe einer *Beach-Line* konstruieren kann.

a) Gib ein Beispiel an, bei dem eine Parabel (festgelegt durch einen Punkt p_i) mehr als einen Kreisbogen zur Beach-Line beisteuert.

b) Ist es möglich, dass eine einzelne Parabel eine lineare Anzahl an Kreisbögen zur Beach-Line beisteuert? Erläutere deine Antwort.

3 Nächster Nachbar

Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der in $O(n \log n)$ Zeit zu jedem Punkt p in P einen anderen Punkt $a(p)$ in P bestimmt, der p am nächsten liegt.

Bitte wenden

4 Atom-Kraftwerke

Angenommen, du bist ein Atomkraftgegner, der möglichst weit von den dir bekannten Atomkraftwerken entfernt leben möchte. Gleichzeitig willst du aber innerhalb eines von dir bevorzugten Gebietes wohnen. Diese Situation kann man wie folgt formalisieren: Die Menge der Atomkraftwerke werde durch eine Menge S von Punkten in der Ebene repräsentiert. Das von Dir bevorzugte Wohngebiet sei der Einfachheit halber durch ein Rechteck R modelliert. Gesucht ist nun ein Punkt $p \in R$ (dein Wohnort), dessen Abstand $\min_{s \in S} d(p, s)$ zum nächstgelegenen AKW maximal ist.

a) Zeige, dass jeder optimale Wohnort entweder eine Ecke des Voronoi-Diagramms $\mathrm{Vor}(S)$, eine Ecke von R, oder ein Schnittpunkt des Randes von R mit einer Kante von $\mathrm{Vor}(S)$ ist.

b) Gebe einen Algorithmus an, der in $O(n)$ Zeit einen optimalen Wohnort findet, wenn das Voronoi-Diagramm $\mathrm{Vor}(S)$ bereits bekannt ist. Hierbei ist n die Anzahl der Punkte in S.

c) Angenommen der bevorzugt Wohnort soll sich innerhalb eines gegebenen konvexen Polygons P mit m Ecken befinden. Gib einen Algorithmus mit Laufzeit $O(m + n)$ an, der unter dieser Voraussetzung einen optimalen Wohnort findet. Wir nehmen erneut an, dass das Voronoi-Diagramm $\mathrm{Vor}(S)$ bereits bekannt ist.

5 Rückblick – kd-Trees

Die in der Vorlesung vorgestellten Datenstruktur *kd-tree* für Bereichsabfragen ist ohne Modifikation nur für feste Eingabemengen geeignet. Würde die Eingabemenge verändert (Punkte werden hinzugefügt oder entfernt) werden müsste man den kd-Tree vollständig neu berechnen.

Überlege dir wie man kd-Trees dynamisieren kann. Dabei kannst du das rebalancieren des Baums ignorieren.