Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
SS 11
Dorothea Wagner, Robert Görke und Ignaz Rutter

Zweites Übungsblatt

Ausgabe: 33. April 2011
Abgabe: Keine, Besprechung in einer der Übungen

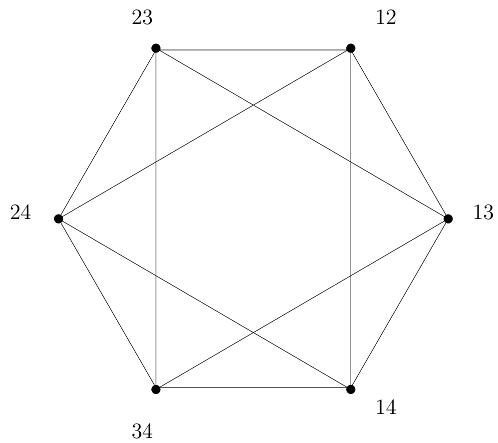
1 Maximal planare Graphen und Triangulierungen

Gegeben sei ein einfacher Graph G mit einer planaren Einbettung. G heißt *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt. G heisst *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt. Zeigen Sie, dass G genau dann maximal planar ist, wenn G trianguliert ist.

2 Der Petersengraph

Definition: Der Graph T_n hat als Knotenmenge die zweielementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist. Die Abbildung rechts zeigt T_4. Der *Komplementgraph*[1] P von T_5 heißt Petersengraph.

Teil 1: Zeichnen sie P.



Definition: Die *Kontraktion* der Kante $e = \{u, v\}$ in einem einfachen Graphen G bedeutet, dass u und v miteinander identifiziert werden, dass e aus G gelöscht wird und dass ggf. entstehende Mehrfachkanten gelöscht werden. Der neue, aus u und v entstandene Knoten w ist also genau dann zu einem anderen Knoten x adjazent, wenn in G mindestens einer der Knoten u und v zu x adjazent war.

Definition: Der einfache Graph G ist ein *Minor* des einfachen Graphen H, wenn G durch eine endliche (ggf. nichtleere) Folge von Kantenkontraktionen aus einem Teilgraph von H hervorgeht.

Bemerkung: Insbesondere ist also jeder Teilgraph von H auch ein Minor von H.

Satz (ohne Beweis): Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder $K_{3,3}$ noch K_5 als Minor enthält.

[1] Der Komplementgraph zu $G = (V, E)$ ist $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

Teil 2: Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

Teil 3: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

Teil 4: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph.

3 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph G heißt *außenplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außenplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann außerplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außerplanarer Graph G mit n Knoten höchstens $2n-3$ Kanten enthält.

4 Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen G^* ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n-2$.
2. Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.